DEVOIR 1 DE MATHEMATIQUES DU SECOND SEMESTRE
DUREE : 3 HEURES

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, donner les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^\alpha}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x$; c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}$ **(1 pt)**

2) Donner les primitives des fonctions suivantes :

   a) $(exp\ o\ f)f'$; b) $\frac{f'}{f}$ **(0,5 pt)**

3) Soient $z\ et\ z'$ deux nombres complexes, recopier et complèter

   a) $|z|^n = ----$ n est un entier naturel **(0,25 pt)**
   b) Si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = ----$ **(0,25 pt)**
   c) $arg(z^n) = -----$ n un entier naturel **(0,25 pt)**
   d) Si $z' \neq 0$ alors $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = ----$ **(0,25 pt)**

4) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   Soit z un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.

   a) Sous quelle forme est écrit z ? Donner sa partie réelle et sa partie imaginaire. **(0,75 pt)**
   b) Quel est le module de z ? Trouver deux arguments de z. **(0,75 pt)**

EXERCICE 2 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $a = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer $a^2\ et\ a^4$. Calculer le module et un argument de a^4. **(2 pts)**
2. En déduire le module et un argument de a. Vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{-3\pi}{8}$. **(1,5 pt)**
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$. **(1,5 pts)**
4. Soit M un point d'affixe z. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $|az| = 8$. **(1 pt)**

PROBLEME : (Extrait bac TS2 2021) (10 points)

Partie A :

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - \ln(1+x)$.

   a. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$. **(1 pt)**

   En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$. **(0,5 pt)**

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm.
   On considère la fonction f de représentation graphique (Cf) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}[1+\ln(1+x)]\ si\ x \geq 0 \\ x + \dfrac{2e^x}{e^x+1}\ si\ x < 0 \end{cases}$$

   a. Montrer que $Df = IR$. **(0,5 pt)**
   b. Etudier les limites aux bornes de Df. **(1 pt)**

TOURNEZ LA PAGE SVP !

c. Montrer que f est continue en 0. **(0,25 pt)**

d. Démontrer que pour tout $x \in \ ]0;\ +\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^x}\left[\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{e^x-1}{x}\right]$. **(0,5 pt)**

e. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenues.**(1 pt)**

3. Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles ou f est dérivable. **(1 pt)**
4. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations. **(1 pt)**
5. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 0[$ et vérifier que $-0{,}7 \leq \alpha \leq -0{,}6$. **(0,5 pt)**
6. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et donner l'autre asymptote à (Cf). **(0,75 pt)**
7. Préciser la position relative de (Δ) par rapport à (Cf). **(0,25 pt)**
8. Tracer (Cf) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**

Partie B :

Soit $\boldsymbol{h(x) = f(x) - x}$ sur $]-\infty; 0[$, $\lambda \in]-\infty; 0[$ tel que $\lambda < \alpha$, α étant le réel défini dans la **partie A**

1. Donner une primitive H de h sur $]-\infty; 0[$. **(0,5 pt)**
2. Soit $\mathcal{A} = H(\alpha) - H(\lambda)$. (**$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est l'aire du domaine délimité par $(\boldsymbol{Cf})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $\boldsymbol{x = \alpha \ et \ \ x = \lambda}$. *Son unité est en* $\boldsymbol{cm^2}$**.)

   a. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $\alpha\ et\ \lambda$. **(0,25 pt)**

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathcal{A}$. **(0,25 pt)**

BONNE CHANCE !