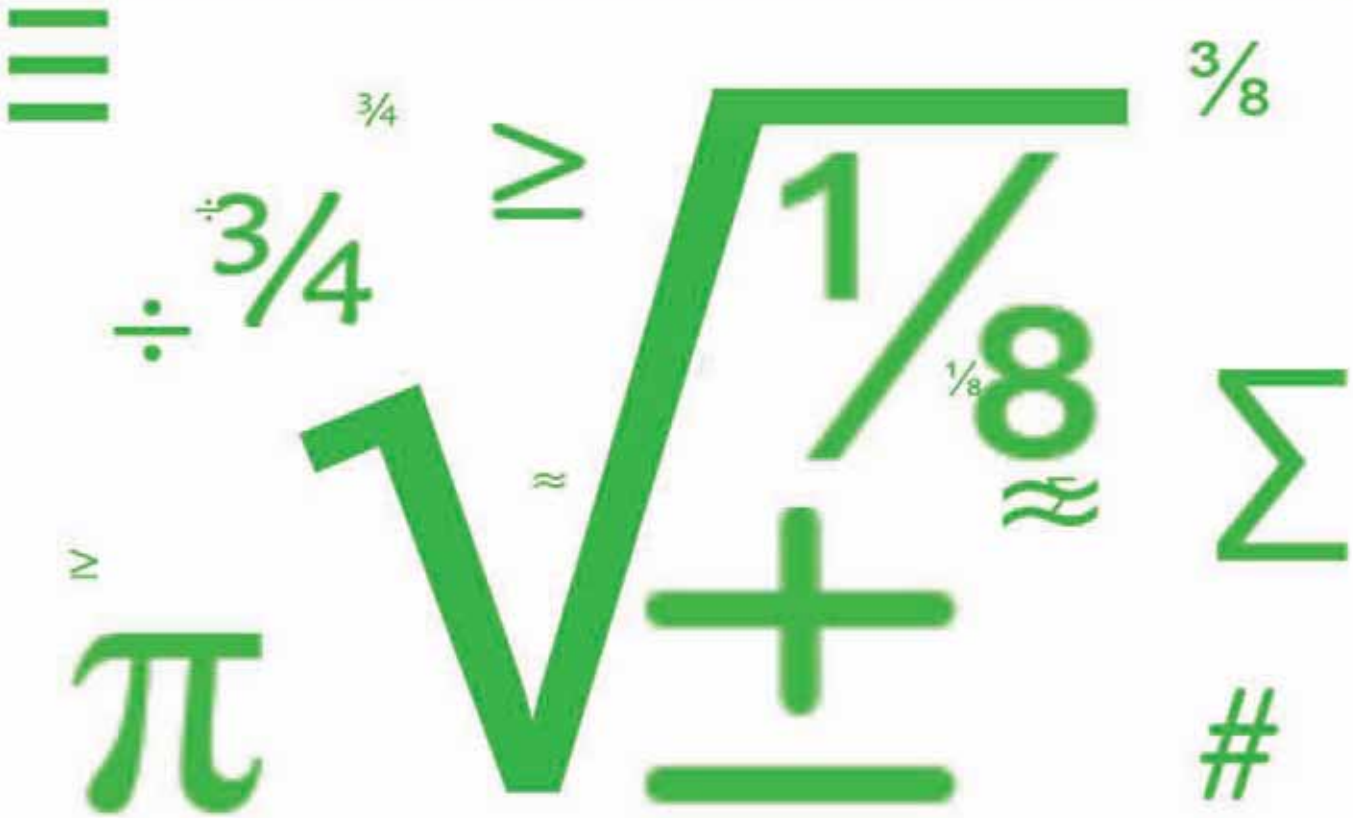
Publication destinée aux Lycées de la République du Sénégal
Approuvée par le Ministère de l'Enseignement Préscolaire, de l'Élémentaire, du Moyen Secondaire et des Langues Nationales

MATHÉMATIQUES

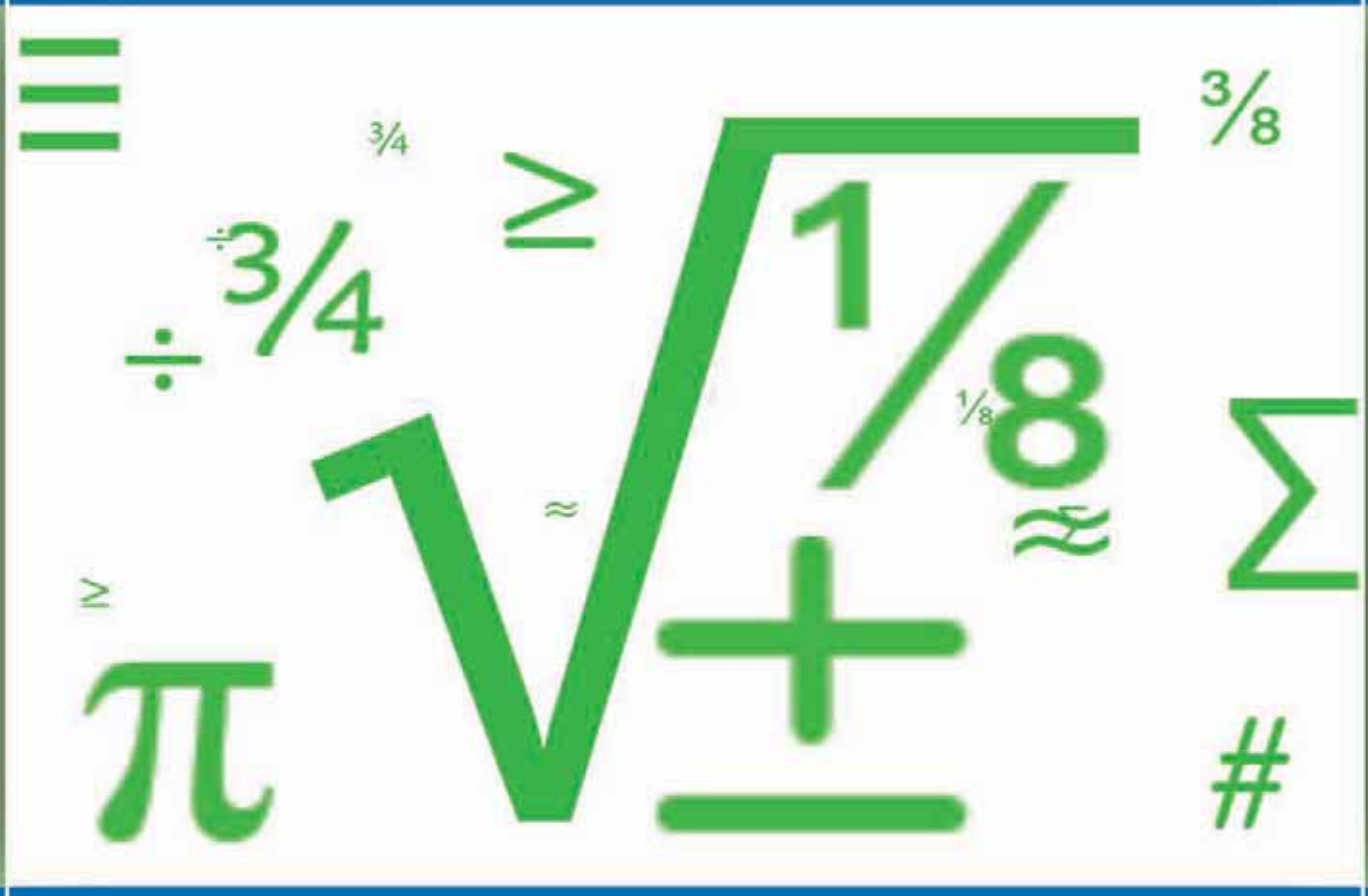


Seconde S

Édition 2010

Publication destinée aux Lycées de la République du Sénégal
Approuvée par le Ministère de l'Enseignement Préscolaire, de l'Élémentaire, du Moyen Secondaire et des Langues Nationales

MATHÉMATIQUES



Seconde S

Édition 2010

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT PRÉSCOLAIRE, DE LÉLÉMENTAIRE, DU MOYEN SECONDAIRE ET DES LANGUES NATIONALES

Mathématiques
Seconde S

Éditeur en Chef

Abdou M. Sène, Ph.D.

Assistant Éditeur en Chef

Johnny L. Houston, Ph.D.

Auteurs-rédacteurs

Samba	**Dabo**	**CPN**	**DAKAR**
Mamadou Bachir	**Diaham**	**IGEN**	**DAKAR**
Birame	**Dionne**	**PROFESSEUR**	**DAKAR**
Abdoulaye	**Faye**	**IGEN**	**DAKAR**
Mangary	**Ka**	**FORMATEUR**	**FASTEF**

Consultants

Farrah Chandler, Ph.D. **Samba Fall** **Pape M. Sow** **Cherif Seck, Ph.D.**

Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage (TLMP)
ECSU – Sénégal TLMP
Elizabeth City State University (ECSU)
Elizabeth City, Caroline du Nord 27909 (USA)

Un Projet pour le Gouvernement du Sénégal – Financé par l'Initiative pour l'Éducation en Afrique AEI de l'USAID
Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage (TLMP)

Ont contribué :

PRENOM	NOM	FONCTION	ACADEMIE
Ibrahima	BAR	IS	THIES
Diané	CISSE	CPI	KAFFRINE
Ibrahima	DIEDHIOU	CPI	LOUGA
Landing	DIEME	CPI	ZIGUINCHOR
Ousmane	DIOUF	CPI	KOLDA
Ibrhamia	FALL	IS	ZIGUINCHOR
Niowy	FALL	IS	DAKAR
Issakha	FAYE	CPI	TAMBA
Lathirol	FAYE	CPI	THIES
Moussa	FAYE	CPI	FATICK
Amet Aly	GAYE	CPI	SAINT LOUIS
Emmanuel	GUEYE	CPI	KAOLACK
Serigne Bassirou	GUEYE	CPI	DIOURBEL
El Hadji Daouda	LEYE	PROF	DAKAR
Youga	MBENGUE	IS	KAOLACK
Samba Aly	Ndiaye	CPI	SEDHIOU
Issa Khady	SARR	IS	SAINT LOUIS
Mame Bouh	TOURE	CPI	MATAM
Mouhamadou Charles	WADE	CPI	DAKAR
Abdourahmane	WATT	CPI	KEDOUGOU

Sous la validation scientifique de :

Monsieur MAMADOU BACHIR DIAHAM, IGEN de Mathématiques
Monsieur ABDOULAYE FAYE, IGEN de Mathématiques

© 2010 par Abdou Maty Sene, Ph.D., Éditeur en Chef, par l'Agence Américaine pour le Développement International (USAID), USA et par le Ministère de l'Éducation du Sénégal.

Droits d'auteurs réservés. Aucune partie de ce document ne peut être adaptée ou reproduite ou photocopiée par quelque moyen que ce soit, sans l'autorisation de

Abdou Maty Sene, ou de l'Agence Américaine pour le Développement International (USAID) ou du Ministère de l'Éducation du Sénégal.

ISBN 978-0-9825955-9-6

AVANT-PROPOS

Ce manuel de Seconde, élaboré dans le cadre du projet TLMP/USAID, est le fruit de la coopération sénégalo-américaine, dans le domaine de l'enseignement des sciences et des mathématiques en particulier. Il fait suite à deux manuels d'appoint : un manuel de 4^{è}-3^{è} et un manuel de 6^{è}-5^{è}, coproduits par une équipe d'experts de l'université d'état d'Elisabeth City (ECSU/USA) et une équipe d'experts sénégalais.

À la différence des deux premiers, celui-ci s'est voulu conforme au programme de mathématiques de seconde, ainsi a-t-il traité effectivement les onze thèmes de ce programme.

Ce souci de coller au programme justifie l'option pédagogico-didactique faite.

Chaque chapitre commence par un historique pour informer l'élève sur les progrès accomplis et ainsi le motiver. Le style direct et les présentations quelque fois ludiques sont des invites à une participation active de l'apprenant.

Par ailleurs les objectifs sont déclinés ce qui permet à l'apprenant de mieux se prendre charge.

L'approche genre n'a pas été perdue de vue, ainsi l'équité genre a été respectée.

Les notions sont systématiquement introduites par des activités dont l'exploitation débouche sur leur explicitation, ensuite des exemples suivis d'exercices d'application sont proposés. Des points méthodes et des rubriques «retenons» permettent de systématiser l'apprentissage.

Au sortir de ces premières pratiques des notions, des exercices de consolidation et des problèmes d'approfondissement sont donnés. Pour faciliter l'auto-apprentissage, certains problèmes sont corrigés ; à la fin de chaque thème, un devoir corrigé permet à l'élève de s'auto-évaluer.

Nous ne saurions terminer sans remercier le peuple américain de son soutien constant au système éducatif sénégalais et souhaiter que notre collaboration avec l'Université d'état de l'Elysabeth City (ECSU) aille de l'avant.

Il ne fait aucun doute que ce manuel, bien utilisé, participera à l'amélioration de la qualité d'enseignement-apprentissage des mathématiques en classe seconde S.

Abdoulaye Faye

Inspecteur Général de l'Education Nationale de Mathématiques

SOMMAIRE

SOMMAIRE

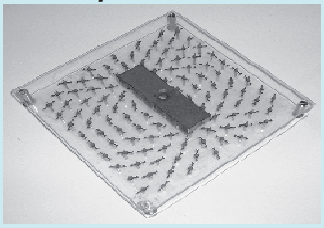
Thème	Page
CHAPITRE 1 : CALCUL VECTORIEL	12
Vecteurs	13
propriété fondamentale	13
Egalité de deux vecteurs	13
Addition vectorielle	14
Multiplication d'un réel par un vecteur	16
Colinéarité de deux vecteurs	18
Barycentre	21
Barycentre de deux points	21
Barycentre de trois points	24
Ensemble de points	27
Exercices et problèmes	29
Solutions des exercices et problèmes	45
CHAPITRE 2 : REPÉRAGE	48
Repérage sur une droite	49
Repères d'une droite, abscisse d'un point	49
Mesure algébrique	49
Repérage cartésien	51
Définition	51
Coordonnées d'un barycentre	53
Changement de repère par translation	55
Colinéarité de deux vecteurs	55
Déterminant de deux vecteurs	55
Equation de droites	56
Vecteur directeur	56
Equation générale	57
Equation réduite	58
Equation paramétrique	58
Exercices et problèmes	59
Solutions des exercices et problèmes	68
CHAPITRE 3 :ANGLES ET TRIGONOMÉTRIE	72
Rappels et compléments sur les angles	73
Angle inscrit ;angle au centre	73
Quadrilatère inscriptible	74
Le radian	77
Longueur d'un arc de cercle de rayon r	78
Orientation du plan	79
Orientation	79
Angle orienté de deux demi-droites de même origine	80
Angle de deux vecteurs	83
Trigonométrie	86
Cercle trigonométrique	86
Sinus et cosinus d'un angle orienté	87
Tangente d'un angle orienté	89
Exercices et problèmes	90
Solutions des exercices et problèmes	102
CHAPITRE 4 : PRODUIT SCALAIRE	105
Définitions et propriétés	106
Rappels : produit de mesures algébriques de deux bipoints	106
Définitions	106
Propriétés	108
Norme d'un vecteur	109
Définitions	109
Propriétés	109
Autres expressions du produit scalaire	110
Expression trigonométrique du produit scalaire	110
Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée	111
Orthogonalité	111
Condition de nullité du produit scalaire	111
Expression analytique de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée	113
Distance d'un point à une droite	113
Relations métriques	114
Produit scalaire et triangle	114
Produit scalaire et parallélogramme	115
Exercices et problèmes	116
Solutions des exercices et problèmes	128
CHAPITRE 5 :TRANSFORMATIONS DU PLAN	131
Rappel	132
Vocabulaire et généralités	132
Expressions analytiques	136
Expression analytique d'une symétrie centrale	136
Rotation	137
Activité préparatoire	137
Définition	137
Propriétés	138
Homothéties	138
Activité préparatoire	138
Définition	139
Propriétés	139
Homothétie et configuration de Thalès	141
Expression analytique	142
Composition de transformations	143
Homothéties de même centre	143
Homothétie et translation	144
Symétrie orthogonale	144
Lieux géométriques	146
Exemples de lieux géométriques d'un point	146
Exercices et problèmes	147
Solutions des exercices et problèmes	162

CHAPITRE 6 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE	166
Représentation de l'espace	167
Règles de la perspective cavalière	167
Représentation de solides de l'espace en perspective cavalière	170
Position relative de droites et de plans	171
Rappels et approfondissements	171
Représentation de l'espace	173
Position relative de deux droites	173
Position relative d'une droite et d'un plan	174
Position relative de deux plans	175
Application aux intersections de prismes et de pyramides avec des plans	177
Orthogonalité dans l'espace	179
Droites orthogonales	179
Droites et plans perpendiculaires	180
Plans perpendiculaires	183
Exercices et problèmes	185
Solutions des exercices et problème	194
CHAPITRE7 : CALCUL DANS IR	196
Calcul dans IR	197
Ordre dans IR (Rappels et complément	197
Calcul sur les radicaux	204
Valeur absolue	205
Distance d'un point à une droite	211
Intervalles et calcul approché	212
Intervalle de IR	212
Encadrement	214
Intersection et réunion d'intervalles	214
Approximation décimale d'un réel	215
Encadrement et opération	217
Arrondi, notation scientifique, ordre de grandeur.	220
Exercices et problèmes	221
Solutions des exercices et problèmes	231
CHAPITRE8 :FONCTIONS NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE	234
Généralités	235
Activité préparatoire	235
Définition d'une fonction	236
Ensemble de définition d'une fonction	237
Restriction d'une fonction	239
Sens de variation d'une fonction	239
Taux de variation d'une fonction	242
Représentation graphique	245
Extrémum d'une fonction	247
Parité	249
Composée de fonctions	252
Etude des fonctions usuelles	255
Fonction partie entière	255
Fonction carré	259
Fonction cube	266
Fonction inverse	267
Fonction inverse définie par f(x) = $\frac{a}{x}$	269
Etude de la fonction numérique définie par f(x) = $\frac{ax+b}{cx}$	270
Fonction racine carré	273
Fonction numérique définie par f(x)=$\sqrt{x+a}$	275
Application à la résolution graphique d'équations et d'inéquations	276
Résolution graphique d'équations	276
Résolution graphique d'inéquations	278
Exercices et problèmes	280
Solutions des exercices et problèmes	300
CHAPITRE9 :EQUATIONS ET INÉQUATIONS	303
Equations et inéquations du second degré	304
Equations du second degré	304
Inéquations du second degré	310
Systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues	312
Système d'équation linéaire s à deux inconnues	312
Système d'inéquation linéaire s à deux inconnues	315
Exercices et problèmes	318
Solutions des exercices et problèmes	332
CHAPITRE10 :POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES	336
Polynômes et fractions rationnelles	337
Polynômes	337
Définition et vocabulaire	337
Exemples	337
Différentes écritures d'un polynôme	337
Egalité de deux polynômes	338
Somme et produit de deux polynômes	338
Zéro ou racine d'un polynôme	339
Factorisation d'un polynôme	339
Etude du signe d'un polynôme	343
Division euclidienne d'un polynôme	344
Définition et technique de calcul	344
Fraction rationnelle	345
Définition	345
Condition d'existence d'une fraction rationnelle	345
Simplification d'une fraction rationnelle	346
Etude du signe d'une fraction rationnelle	346
Décomposition d'une fraction rationnelle	347
Exercices et problèmes	348
Solutions des exercices et problèmes	356
CHAPITRE11 :STATISTIQUE	358
Consolidation des notions du premier cycle	359
Paramètres de position	359
Paramètres de dispersion	361
Cas d'une série discrète	361
Cas d'une série groupées en classes	365
Autres formules de calcul de la variance	366
Exercices et problèmes	368
Solutions des exercices et problèmes	378

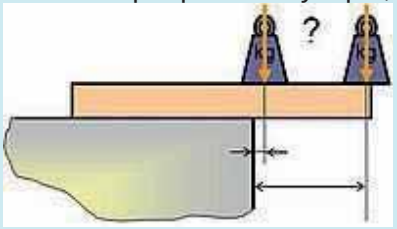
1 CALCUL VECTORIEL

APERÇU HISTORIQUE

En latin, « *vector* » désigne le conducteur d'un chariot. L'emploi de ce mot en mathématiques date de 1837. Après avoir introduit les opérations sur les vecteurs, Hermann Grassmann (1809-1877), mathématicien allemand, développa le calcul vectoriel sous sa forme la plus générale pour étudier les flots et les marées. En géométrie, les vecteurs ont la propriété d'être des objets qui n'ont pas de « localisation ».
Tu as été initié à la notion de vecteur depuis la classe de 4ème. En 3ème tu as utilisé les opérations sur les vecteurs pour illustrer, dans le plan, l'alignement de points, le parallélisme et la perpendicularité de droites.
En seconde tu reverras toutes ces notions étudiées antérieurement et tu les approfondiras avec le barycentre.
Sais-tu qu'on utilise les vecteurs en physique et dans les sciences de l'ingénieur pour traduire les notions de force, de vitesse, d'accélération, etc ?
Sais-tu que le barycentre te permet de faire des démonstrations et de résoudre certains problèmes de géométrie, de traduire des situations relatives à la ***moyenne*** d'une série statistique, à l'***équilibre*** d'une balance, au ***centre d'inertie*** d'une plaque en Physique,…?



En présence d'un champ magnétique, de petites boussoles s'orientent, indiquant la direction et le sens des vecteurs du champ.



Selon le point d'application des forces, le solide bascule ou ne bascule pas. L'objet mathématique associé à ce phénomène est un vecteur.

OBJECTIFS

- Utiliser les propriétés des vecteurs pour transformer des expressions vectorielles.
- Avoir une bonne connaissance de la notion de barycentre.
- Utiliser le barycentre et /ou les vecteurs pour résoudre des problèmes.
- Utiliser les vecteurs pour formaliser des situations concrètes.
- Utiliser les propriétés des vecteurs et les relations vectorielles dans la construction de figures géométriques.

VECTEURS

Propriété fondamentale

Activité

Soit un point A du plan et $\vec{v}$ un vecteur.

1) Construis un point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$
2) Construis un point N tel que : $\overrightarrow{AN} = \vec{v}$
3) Que peux-tu dire des positions des points M et N ?

Propriété

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ vecteur et A un point du plan.

$\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ entraîne que $t_{\vec{u}}(A) = M$. Etant donné que tout point du plan a une et une seule image par une translation de vecteur donné, A admet une seule image M.
D'où M existe et est unique.

Retiens :
Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Exercice

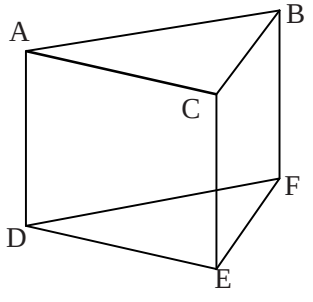
Démontre de la même manière que pour tout point B et pour tout vecteur vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point N tel que : $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

Egalité de deux vecteurs

Activité

Sur la figure plane ci-contre, les quadrilatères ADEC et CEFB sont des parallélogrammes.
Donne les vecteurs égaux à :

a) $\overrightarrow{AB}$;
b) $\overrightarrow{EF}$;
c) $\overrightarrow{DF}$.
Justifie tes réponses.



Norme d'un vecteur

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ le réel positif AB. On la note : $\|\vec{u}\|$ et on lit « norme de $\vec{u}$»

On a ainsi $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ = AB.

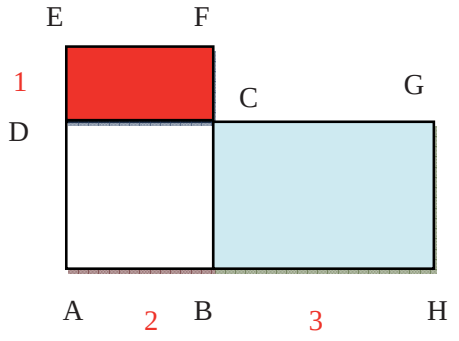
NB : La norme d'un vecteur est aussi appelée la longueur du vecteur.

Exercice d'application

Une unité est choisie. La figure ci-contre est formée d'un carré ABCD et de deux rectangles CDEF et BCGH.
Les vecteurs suivants sont définis à l'aide de points de la figure.
Quelles sont les normes de ces vecteurs ?

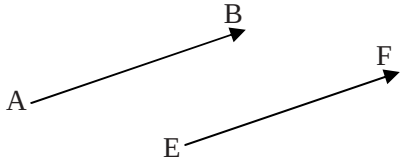
$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{FH}$.



Egalité de deux vecteurs

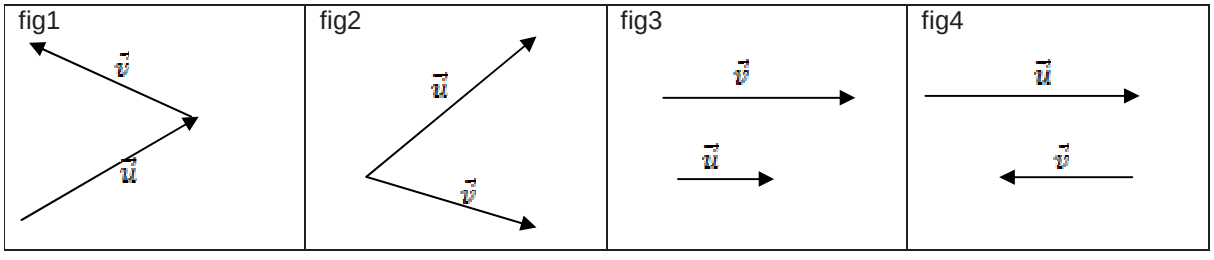
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont égaux lorsqu'ils ont **même direction** ((AB) // (EF)), **même sens** et **même norme.**



Addition vectorielle

Activité

Reproduis les figures suivantes et construis dans chaque cas le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$



Somme de deux vecteurs

Retiens : (Définition)

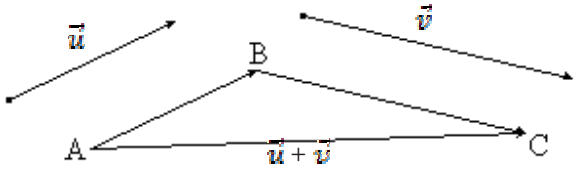
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; A, B et C des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Elle est notée $\vec{u} + \vec{v}$.
On a ainsi: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Relation Chasles

Pour tous points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Cette égalité est appelée **relation de Chasles**.

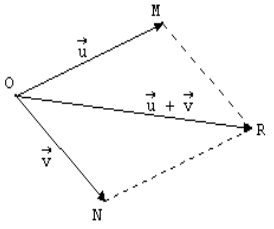
Construction

- **A l'aide de la Relation de Chasles**



- **À l'aide de la Règle du parallélogramme**

Remarque : si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ et R le point tel que OMRN est un parallélogramme, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$
Il s'agit donc de construire le quatrième sommet d'un parallélogramme connaissant les trois autres.

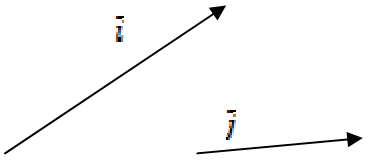


Retiens :

A, B, C sont trois points non alignés; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme.

Exercice d'application:

Construis la somme $\vec{i} + \vec{j}$ des deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en utilisant les deux méthodes de construction indiquées ci-dessus.



Propriétés algébriques

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

P1 : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ On dit que l'addition vectorielle est commutative	P2 : $\vec{u} + \vec{v} + w = (\vec{u} + \vec{v}) + w = \vec{u} + (\vec{v} + w)$ On dit que l'addition vectorielle est associative
P3 : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$	P4 : Tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé noté $-\vec{u}$ tel que : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Le vecteur $(-\vec{u})$ a même direction, même norme que $\vec{u}$ mais est de sens contraire.

Vecteur et milieu :

- I milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Vecteur et parallélogramme

Les énoncés suivants sont équivalents :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
c) ABCD est un parallélogramme.

Exercice d'application :

A, B, C ,D et E sont cinq points tels que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

Démontre que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}$, puis que BCDE est un parallélogramme.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Activité

Soit I le milieu d'un segment [AB] et J celui de [IB].
1) Compare les caractéristiques des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ (longueur, direction et sens).
2) Même question pour les vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

Solution

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ ont même direction, même sens et AB = 2 AI.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction, sont de sens contraires et JB = $\frac{1}{4}$ BA. On dit de ce fait que :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le produit du réel 2 par le vecteur $\overrightarrow{AI}$ et on note $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{JB}$ est le produit du réel - $\frac{1}{4}$ par le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et on note $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ .Les expressions $2\overrightarrow{AI}$ et - $\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ sont donc des vecteurs.

Remarque : De façon générale :

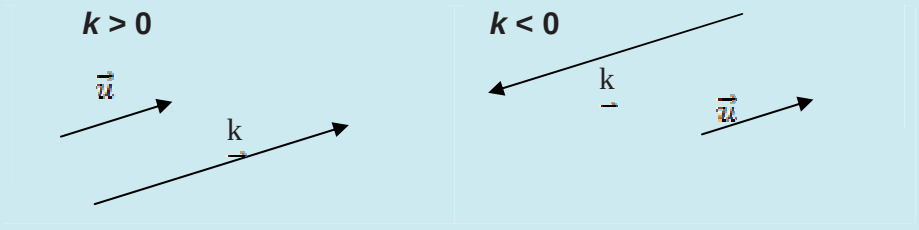
si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors : $\begin{cases} AC = k\,AB, \text{si } k > 0 \\ AC = -k\,AB, \text{si } k < 0 \end{cases}$

Les égalités de longueurs peuvent être résumées par : AC = $|k|$AB

Retiens :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et *k* un nombre réel non nul.
Le **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel *k*** est le vecteur $k\vec{u}$ qui a :

- pour direction celle de $\vec{u}$
- pour sens celui de $\vec{u}$ si *k* est strictement positif et de sens contraire à celui de $\vec{u}$ si *k* est strictement négatif ;



- pour norme $|k|\|\vec{u}\|$;

On pose, par ailleurs, pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel k :

0. $\vec{u} = \vec{0}$ et $k.\ \vec{0} = \vec{0}$.

Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres réels *a* et *b* on a :

- (a + *b*) $\vec{u}$ = a$\vec{u}$ + *b* $\vec{u}$
- *a*($\vec{u}+\vec{v}$) = a$\vec{u}$ + *a*$\vec{v}$
- *1.*$\vec{u}$ = $\vec{u}$
- a$\vec{u}$ =$\vec{0}$ *si et seulement si a = 0 ou* $\vec{u}$ = $\vec{0}$.
- *a(b* $\vec{u}$) = (*a b*)$\vec{u}$

Exercice d'application :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Construis les points E et F définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
2) Démontre que $\overrightarrow{AE}$ = - $\overrightarrow{CF}$
3) Démontre que O est le milieu de [EF].

Colinéarité de deux vecteurs

Dans l'activité du paragraphe multiplication d'un vecteur par un réel, tu avais établi que : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$; Ces deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont dits colinéaires. $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$, les vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont aussi colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement l'une au moins deux conditions suivantes est vérifiée :

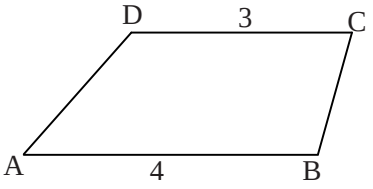
- l'un au moins des deux vecteurs est nul ;
- il existe un réel *k* non nul tel que $\vec{u} = k\ \vec{v}$.

Remarque 2 : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exercice :
Montre que : dans le plan si un vecteur est colinéaire à deux vecteurs non colinéaires alors il est nul.

Exemple

Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze de bases AB et DC.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires et de sens contraires.

car $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

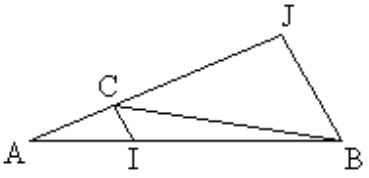
Parallélisme et alignement

- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel *k* non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.
- Les points A, B et C distincts deux à deux sont **alignés** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel *k* non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

Exercices corrigés

Exercice 1:

ABC est un triangle, les points I et J sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.



1. Exprime $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déduis-en que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Solution :

1. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ (d'après la relation de Chasles)

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ (d'après la relation de Chasles)

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2. D'après les égalités précédentes, on obtient : $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

Exercice 2

Sur la figure ci-contre :

ABCD est un parallélogramme de centre I , B est le milieu du segment [AE], G est le centre de gravité du triangle ACE et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

1) Détermine les relations reliant $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.

2) Calcule $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montre que E, G et F sont alignés.

Solution :

1) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de [AE]

$= 2\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{CD}$ car ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ car G est le centre de gravité du triangle ACE.

$\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ car G est le centre de gravité du triangle ACE, donc $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$.

2)- $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF}$ d'après la relation de Chasles

$= 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

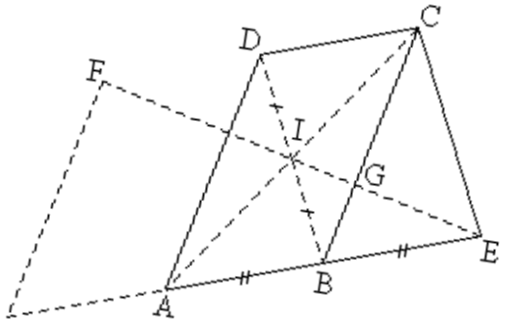
$= 2(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de [AE])

$= 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme)

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ ($2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CA}$ car I est le milieu de [AC])

On en déduit que I est le milieu de [EF].

On a alors $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EI}$ et de plus $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$ donc $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EG}$. D'où les points E, F et G sont alignés.



BARYCENTRE

Barycentre de deux points

Activités

Activité1

Aux extrémités A et B de la tige rigide et homogène ci-dessous sont suspendues deux plateaux de masses respectives m_1 et m_2 .

Figure1

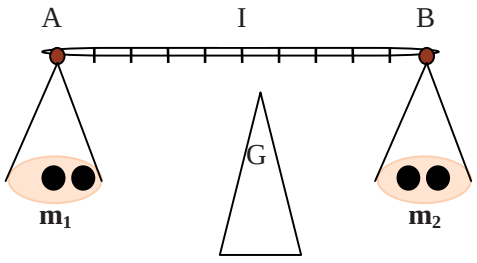
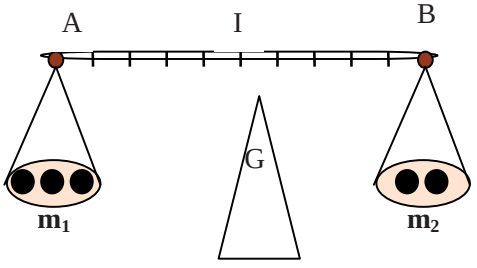


Figure2



On veut maintenir la tige en équilibre à l'aide du pointeau G.

- On suppose que $m_1 = m_2$.

Où dois-tu placer le pointeau G pour maintenir la tige en équilibre ?

- On suppose $m_1 > m_2$.

Le pointeau G sera-t-il plus proche de A ou de B pour que la tige soit maintenue en équilibre ?

Une loi générale de la physique permet d'affirmer que la position d'équilibre G est obtenue lorsque $m_1GA = m_2GB$.

Explique pourquoi $m_1\overrightarrow{GA} = - m_2\overrightarrow{GB}$.

La relation $m_1\overrightarrow{GA} = - m_2\overrightarrow{GB}$. qui s'écrit aussi $m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ signifie que G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs m_1 et m_2

Activité 2

Soient A et B deux points α et β deux réels avec $\alpha + \beta \neq 0$. Montre qu'il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Solution

En effet $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ entraine que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

donc $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.)

Cette dernière égalité entraîne, d'après la relation fondamentale, l'existence et l'unicité du point G.

Retiens :

Définition et théorème :

Soient A et B deux points, α et β deux réels non nuls avec $\alpha + \beta \neq 0$; il existe un point unique G tel que: $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. G est appelé barycentre du système {(A, α); (B, β)}

Si en plus $\alpha = \beta$, alors G est appelé **isobarycentre** des points A et B.

Notation :

Soient A et B deux points, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre du système {(A, α) ; (B, β)} se note : G = bar{(A, α) ; (B, β)}.

Comme chacun des points A et B est affecté d'un coefficient, on dit que les couples ((A, α) ; (B, β) sont des points pondérés.

On dit aussi que G est barycentre des points pondérés (A, α) et, (B, β).

Application :

A et B étant deux points.

Démontre que l'isobarycentre des points A et B est le milieu du segment [AB].

Retiens :

A et B étant deux points

L'isobarycentre de A et B est le milieu du segment [AB].

Exercice d'application :

On donne trois points A, B et G tels que : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{GB}$.

Trouve α et β pour que G soit le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β).

Construction de G = bar{(A, α) ; (B, β)}.

On sait que si G = bar{(A, α) ; (B, β)}, on a: $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. Connaissant les positions des points A et B et les valeurs des réels α et β on construit l'unique point G.

Retiens :

Soient A et B deux points, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

G = bar{(A, α) ; (B, β)} équivaut à : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. .

Application

Construis G = bar{(A, 2) ; (B, 3)}.

Propriétés

Propriété 1

Le barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB).

Propriété2 *(Homogénéité*)

On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés en multipliant ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Exercice :

Démontre ces deux propriétés en exercice.

Retiens :

Soient A et B deux points, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Pour tout réel k non nul, bar{(A, α) ; (B, β)} = bar {(A, kα) ; (B, kβ)}.

Propriété 3 (caractérisation du barycentre de deux points)

Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Le point G est barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) équivaut à :

pour tout point M du plan : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Preuve

G = bar{(A, α) ; (B, β)} équivaut à : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

équivaut à : $\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.

équivaut à : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Retiens :

G = bar {(A, α) ; (B, β)} si et seulement si pour tout point M du plan :

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Barycentre de trois points

Activité

ABCD est un parallélogramme de centre O et I le milieu de [AO].

- Démontre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Démontre que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ puis que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI}$.
- Déduis des questions précédentes que la relation : $4\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
  et 4 + (-1) + (– 1) = 2 ≠ 0 signifient que A est le barycentre des points pondérés (I, 4), (B, -1) et (C, -1).

Théorème et définition

Soit A, B et C trois points ; α, β, et γ trois réels tels que α + β + γ ≠ 0.
On appelle barycentre du système {(A, α) , (B, β) , (C, γ)} l'unique point G vérifiant :
$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Preuve :

A l'aide du relation de Chasles, on a:

$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à : $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$.

Donc $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA}\ \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

Cette dernière relation montre que G existe et il est unique.
Notation: G = bar {(A, α) , (B, β) , (C, γ)}.

Retiens :

A , B et C sont trois points du plan ; α , β et γ
trois réels tels que α + β + γ ≠ 0.
:G = bar {(A, α) , (B, β) , (C, γ)} équivaut à chacune des égalités vectorielles :

1) $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$;

3) $\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$.

Exercices d'application

Exercice 1
ABCD est un parallélogramme de centre O.
1) Trouve α , β et γ pour que A soit le barycentre de B, C et D affectés respectivement de ces coefficients.
2) Démontre que 2 $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
3) Cette égalité permet-elle d'affirmer que A est le barycentre de (O, 2) , (B, -1) et (D, -1) ?
Justifie ta réponse.

Exercice 2
Marque trois points non alignés A, B et C. En utilisant le théorème précédent, construis le barycentre du système :{(A, 1) , (B, -2) , (C, 3)}.

Remarque: Si α = β = γ ≠ 0, alors G est **l'isobarycentre** des points A, B, C.

Propriétés

Propriété 1 *(homogénéité)*

Activité
A, B et C sont trois points ; α, β, et γ sont trois réels tels que α + β + γ ≠ 0.
Soit G = bar {(A, α) , (B, β) , (C, γ)}.

1) Détermine le barycentre de chacun des systèmes :
{(A, 2α) , (B, 2β) , (C, 2γ)} et {(A, $\frac{1}{3}$α) , (B, $\frac{1}{3}$β) , (C, $\frac{1}{3}$γ)}.
2) Quelle conclusion peux-tu en tirer?
3) En déduire le barycentre du système {(A, kα), (B, kβ) , (C, kγ)} avec k réel non nul.

Indication :
G = bar {(A, α) , (B, β) , (C, γ)} équivaut à : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
équivaut : $2(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) = \vec{0}$
équivaut $2(\alpha)\overrightarrow{GA} + (2\beta)\overrightarrow{GB} + (2\gamma)\overrightarrow{GC}) = \vec{0}$
équivaut G = bar {(A, 2α) , (B, 2β) , (C, 2γ)}.

Tu t'inspireras de cette démarche pour répondre aux autres questions.

Retiens :
On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés en multipliant ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Exercice 1
Démontre la propriété 1.

Exercice 2
Ecris plus simplement : G = bar{(A, 15) ; (B, -45) ; (C, 60)}.

Propriété 2 *(Associativité)*

Activité
1) Marque trois point non alignés A, B et C. Construis G = bar {(A, 3), (B,1), (C, -1)};
2) Justifie que le système {(A, 3), (B,1)} admet un barycentre G'.
3) Construis G'.
4) Démontre que $4\overrightarrow{GG'}$ - $\overrightarrow{GC}$ = $\vec{0}$.
5) Interprète ce relation en terme de barycentre.
6) Cas général :
Soient A, B et C trois points, α, β, et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.
considère G = bar {(A, α) ; (B, β) ; (C, γ} et H = bar {(A, α) ; (B, β)}.
Montre que G = bar {(H, α + β); (C, γ)}.

Retiens :

Pour trouver le barycentre de trois points pondérés, on peut remplacer deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

Exercice d'application

Exercice 1
Utilise l'associativité du barycentre pour construire le barycentre L des points pondérés : (E, 2), (F, 3), et (G, -1).

Exercice 2
1) Marque trois points A, B et C du plan.
2) En utilisant la propriété d'associativité du système , construis le barycentre G du système {(A, 2) ; (B, -2) ; (C, 3)}.

Exercice 3
Soit un triangle ABC.
Démontre que l'isobarycentre des points A, B et C est le centre de gravité de ABC.

Solution exercice 3

Dire que G est l'isobarycentre de A, B, C signifie qu'il existe un réel α non nul tel que G =bar {(A, α) , (B, α) , (C, α)}.

En multipliant les coefficients du barycentre G par $\frac{1}{\alpha}$, on obtient d'après la propriété d'homogénéité du barycentre que G = bar{ (A,1), (B,1), (C,1)}.

Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] du triangle ABC **.**

On a G = bar{ (A,1), (B,1), (C,1)} équivaut à G = bar{ (A,1), (A',2)} d'où G appartient à la médiane (AA') (propriété du barycentre partiel). De même on montre que G appartient à la médiane (BB'). Ce qui signifie que {G}= (AA') $\cap$ (BB').

Comme le centre de gravité est le point de concours des trois médianes, l'isobarycentre des points A, B, C est le centre de gravité du Triangle ABC.

Retiens :

Le centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C.

Ensemble de points

Réduction de la somme vectorielle $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$, α et β réels.

Soient A, B deux points fixes distincts, M un point quelconque, α et β deux réels.

On a $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB}$.

Considérons deux cas :

- Premier cas : $\alpha + \beta = 0$. On a : $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \beta\overrightarrow{AB}$.

Donc $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est un vecteur constant qui ne dépend pas de M.

- Second cas : : $\alpha + \beta \neq 0$.

Comme $\alpha + \beta \neq 0$ le barycentre de {(A, α), (B, β) } existe ; appelons le G.

G = bar {(A, α), (B, β) } équivaut à :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\ .$$

Or G = bar{(A, α), (B, β)} $\Leftrightarrow$ $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.

Retiens :

Si $\alpha + \beta = 0$ alors le vecteur $\vec{V} = \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est constant : il ne dépend pas de M.

Si $\alpha + \beta \neq 0$ alors $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$, où G = bar{(A, α), (B, β)}.

Activité

Réduction d'une somme vectorielle : $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$, avec α, β et γ trois nombres réels ; A, B et C trois points fixés du plan; M un point quelconque du plan.

1) En t'inspirant de la méthode de réduction précédente, montre que:
$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.
2) Etudie le cas : $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
3) Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, montre que :
$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Retiens :

Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est constant: il ne dépend pas de M.

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$, $G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Application : Détermination et construction d'ensembles de points

Rappels

- Soient O un point du plan et r un réel strictement positif. L'ensemble des points M du plan tels que OM= r est le cercle de centre O et de rayon r.
- Soient A, B deux point distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que MA = MB est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 1

ABC est un triangle. I milieu de [AB] et J milieu de [AC]. Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

Solution :

Déterminons l'ensemble (E). I est le milieu de [AB] donc I est l'isobarycentre de A et B d'où $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

$M \in (E) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, d'où (E) est la droite passant par I et parallèle à la droite (BC), c'est à dire la droite (IJ).

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de coté 4cm.

1) Détermine et construis l'ensemble (C_1) des points M du plan tels que $\|-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\| = 4$.

2) Détermine et construis l'ensemble (C_2) des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = 8$.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points du plan.

1) Détermine et construis l'ensemble (Δ_1) des points M du plan tels que :

$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$.

2) Détermine et construis l'ensemble (Δ_2) des points M du plan tels que :

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICES ET PROBLEMES

Calcul vectoriel

Exercice 1 : O et A sont deux points distincts :

1. Placer les points M, N, P tels que :

a) $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$

b) $\overrightarrow{ON} = -3{,}5\overrightarrow{OA}$ **c)** $\overrightarrow{OP} = -7\overrightarrow{OA}$

2.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.

Exercice2 : ABC est un triangle. Les points N et P sont tels que :

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

1. Placer les points N et P.

2. Exprime $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Déduis-en que les points A, N et P sont alignés.

Exercice 3 :

Soit *ABCD* un parallélogramme de centre *I*.

1. Construis le point *M* tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point *N* tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$

2. Démontre que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

. Que peut-on en déduire ?

3. Justifie les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$

Déduis-en la nature du quadrilatère *ABNI*.

Exercice 4 :

Soit *ABC* un triangle.

1. Place le point *E* tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2. Place le point *F* tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

3. Démontre que les droites (*CE*) et (*FB*) sont parallèles.

Exercice 5

Soit A, B, C et E quatre points non alignés.
Dans chacun des cas ci-dessous, construis le point D défini par la relation vectorielle :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; b) $-2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; c) $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$;

d) $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

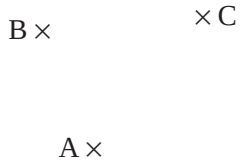
Exercice 6

1) Construis un carré ABCD de centre O.
2) Construis chacun des vecteurs ci-dessous :

a) $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$; c) $\frac{3}{2}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{ON}$;

d) $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{MN}$; e) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{MN}$; f) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{SN} + \frac{3}{2}\overrightarrow{NP}$

Exercice 7



En reproduisant à chaque fois la figure ci-contre :

1. Construis le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; A, B et C étant 3 points du plan .

2. a) Construis le vecteur :

i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ii) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ iii) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) Construis le vecteur :

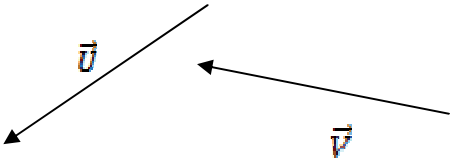
i) $2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$; ii) $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$; iii) $-2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exercice 8

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs du plan.

a) Reproduis la figure ci contre.

b) Construis le vecteur $\frac{1}{2}\vec{U} - 4\vec{V}$.



Exercice 9

A B C D est un quadrilatère.

1) Écris $\overrightarrow{AD}$ comme somme de 3 vecteurs dont les origines et les extrémités sont des sommets du quadrilatère.

2) Compète en remplaçant les pointillés par les vecteurs qui conviennent.

$\overrightarrow{AC}$ = …… + $\overrightarrow{BD}$ + ……

3) Parmi les égalités suivantes, indique celles qui sont vraies : i) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$; ii) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; iii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$; iv) $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$

Exercice 10

Parmi les relations vectorielles suivantes, quelles sont celles qui traduisent la relation de Chasles :

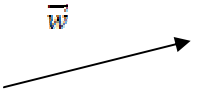
a) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{RB}$; b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{SE}$; c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{RE}$; d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{RS}$.

Exercice 11

Soient les points non alignés R, A, S et T. En utilisant la relation de Chasles, décompose chacun des vecteurs ci-après : $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{SA}$.

Exercice 12

Etant donné un vecteur $\vec{w}$, en utilisant la relation de Chasles, construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



Exercice 13

En décomposant $\overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{CA}$ + $\overrightarrow{AB}$, exprime les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: i) $\vec{u}$ = 2 $\overrightarrow{AB}$, – 3$\overrightarrow{CB}$; ii) $\vec{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.

Exercice 14

A, B, C, D sont quatre points. Démontre que :

i) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{DA}$. ii) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Exercice 15

A, B, C sont trois points non alignés ;

a) Soit I le milieu de [BC]. Démontre que $2\vec{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. Démontre que: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

c) Soit J le milieu de [AB], démontre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Exercice 16

ABCD est un quadrilatère convexe ; I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD] et L celui de [DA].

a) Compare les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$. b) Déduis-en la nature du quadrilatère IJKL.

Exercice 17

ABC est un triangle tel que le point A' est le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

1) a) Justifie que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

b) Exprime $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ respectivement en fonction de $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

2) Déduis-en que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Exercice 18

Complète chacune des phrases suivantes en mettant la longueur qui convient.

a) $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AE}$ donc AM = ….. ; b) $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AL}$ donc BS = ….. ;

c) $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AC}$ donc EF = …... ; d) $\overrightarrow{MN} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{RT}$ donc MN = …..

Exercice 19

Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont vraies :

a) Si $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BM}$ alors AR = BM ; b) Si $\overrightarrow{MS} = -4\overrightarrow{BT}$ alors MS = -4BT

c) Si $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CD}$ alors HE + AP = CD ; d) Si $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{MS}$ alors MP + PS = MS

e) Si $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{IG}$ alors BR = IG ; f) Si $\overrightarrow{MH} = -3\overrightarrow{KL}$ alors MH = 3 KL ;

g) Si $-5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{CB}$ alors 5AB = 7CD.

Exercice 20
Deux vecteurs non nuls sont dits orthogonaux si et seulement si leurs directions sont orthogonales. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux se note : $\vec{u} \perp \vec{v}$ **.**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 9$.
Calcule $\|\vec{w}\|$.

Exercice 21
A, B et C sont trois points non alignés. Les points N et M sont définis par les relations :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.
Démontre que les droites (MC) et (BN) sont parallèles.

Exercice 22
A, B et C sont trois points non alignés. Les points A', B' et C' sont définis respectivement par : $\overrightarrow{BA'} = -\overrightarrow{BA}$, B' est le milieu de [AC] et $-3\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA}$
1) Démontre les égalités suivantes :a) $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ b) $2\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
2) Déduis de ce qui précède que les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice 23
Soit un triangle ABC. On note A' le milieu de [BC]. Soient P, Q et M trois points respectivement sur l'intérieur des segments [BC], [AC] et [AB] tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,
(MQ) // (BC) et (MP) // (AC).
Montrer que les droites (AA') et (QP) sont parallèles en utilisant les vecteurs.

Exercice 24
OIJK est un parallélogramme. A, B et G sont trois points tels que :
$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.Démontre que les points O, G et J sont alignés.

Exercice 25
O et A sont deux points distincts :
1. Place les points M, N, P tels que : a) $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$; b) $\overrightarrow{ON} = -3{,}5\,\overrightarrow{OA}$; c) $\overrightarrow{OP} = -7\overrightarrow{OA}$.
2. a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.
b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.
c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 26
A et B sont deux points distincts.
Place les points M, N, P, Q tels que :
a) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$; **b)** $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$; **c)** $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$; **d)** $\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{AQ}$.

Exercice 27

ABC est un triangle. Les points N et P sont tels que:

$\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

1. Place les points N et P. **2.** Exprime $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Détermine alors un réel *k* tel que $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AP}$.

Exercice 28

ABCD est un parallélogramme de centre I, B est le milieu du segment [AE], G est le centre de gravité du triangle ACE, et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

1)Détermine une relation entre $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$, entre $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, et entre $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$.

2) Calcule $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$, puis montre que E, G et F sont alignés.

Exercice 29

ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB].

1. a) Construis le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$. b) Déduis-en que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2. On note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

a) Exprime $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Construire K.

b) Déduis-en que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ puis montre que les points I, J et K.

Exercice 30

ABC est un triangle, les points I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

1. Exprime $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Déduis-en que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Exercice 31

1°) a) I étant le milieu d'un segment [AB] du plan, montre que pour tout point M du plan, on a : Si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) Réciproquement, montre que si A, B, I et M sont des points du plan tels que : Si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ alors I est le milieu de [AB].

2°) Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB].

a) Montre que $\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Déduis-en que dans un triangle :

- la droite qui passe par les milieux de deux cotés est parallèle au support du troisième coté
- le segment joignant les milieux de deux cotés a pour longueur la moitié de celle du troisième coté.

b) ABC étant un triangle, I le milieu du segment [AB], montre que le point J, tel que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, est le milieu de [AC].

Déduis-en que dans un triangle, toute droite qui passe par le milieu d'un coté et qui est parallèle au support du deuxième coté, passe par le milieu du troisième coté.

Exercice 32

A, B et C sont trois points donnés. Parmi les relations vectorielles ci-dessous, quelles sont celles qui traduisent l'existence d'un barycentre ?

a) $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} = \vec{0}$ b) $-3\overrightarrow{MA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$;

d) $3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 4\overrightarrow{GM}$ e) $5\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ f) $5\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice 33

Construis le barycentre K dans chacun des cas suivants :

1) Les points A et B sont des points tels que AB = 5 cm **:**

a) $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} = \vec{0}$ b) $-3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \vec{0}$.

2) Les points A, B et C sont des points non alignés tels que AB = 5 cm, AC = 6 cm et BC = 4 cm **:**

a) $-4\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ b) $5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ c) $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice 34

Soit O un point fixé, A et B deux points distincts du plan.

Les points A' et B' tels que : $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$ avec k un réel non nul.

1°) Pour k = 2 ;

a) Construis les points A' et B' tels que : $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$ et montre que : O, A et A' sont alignés ; de même que O, B et B'.

b) Montre que (AB) // (A'B').

c) Déduis-en une relation reliant AB et A'B'.

2°) On donne k = $-\frac{1}{2}$; reprendre les questions a), b) et c).

Calcul barycentrique

Exercice 35

Soit *PQR* un triangle de centre de gravité *G*. Soient les points *I*, *J* et *K* tels que :

$\overrightarrow{GI} = -3\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{GJ} = -3\overrightarrow{GQ}$ et $\overrightarrow{GK} = -3\overrightarrow{GR}$

1. Fais une figure. 2. Démontre que *G* est le centre de gravité du triangle *IJK*.

Exercice 36

Soit ABC est un triangle. On définit les points H, K, L et G par : H est le barycentre du système {(A;3);(B;2)}, K est le barycentre du système {(B;2);(C;-1)}, L est le barycentre du système {(A;3);(C;-1)}, G est le barycentre du système {(H;5);(C;-1)}.

1) Démontre que : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2) Déduis-en que:

a) G est le milieu du segment [BL].

b) G est le barycentre des points A et K affectés de coefficients que l'on déterminera.

Exercice 37

On considère un triangle ABC, I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), J le barycentre des points pondérés (A,1),(B,2), K le barycentre des points pondérés (C,1),(B,- 4).

1) Exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer.

2) Déterminer le barycentre de (A,2),(K,3),(C,1).

3) Démontrer que le point J est le milieu de [IK].

4) Soit L le milieu de [CI] et M celui de [KC]. Déterminer *a*,*b*,*c*,*d* réels pour que L soit le barycentre de (A,*a*),(C,*b*) et M celui de (B,*c*),(C,*d*).

Exercice 38

Soit ABC un triangle et $\vec{v}$ le vecteur défini par $\vec{v} = \overrightarrow{CA} - 2\,\overrightarrow{CB}$. G est le barycentre de (A,1) et (B, -2). Soit C' le point tel que $\overrightarrow{CC'} = \vec{v}$.

1) Fais une figure où sont placés les points A, B, C, G et C'.
2) Montre que les points C, C' et G sont alignés.
3) On suppose que ABC est rectangle en A tel que BC = 5 cm et AC = 3cm, détermine AG.

Exercice 39

Soit le système de points pondérés {(A,1) ; (B,-2) ; (C, 5) }

1)Justifie que le système admet un barycentre appelé G.

2) Soit I le barycentre de {(A,1); (B,-2)}, J celui de {(B,-2); (C,5)} et K celui de {(A,1); (C,5) }.

En utilisant l'associativité du barycentre, démontre que :

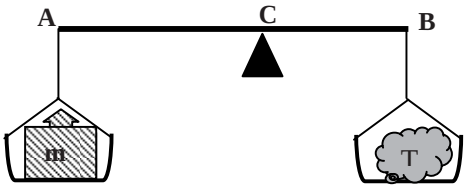
a) $G \in (IC)$ b) $G \in (JA)$ c) $G \in (KB)$.

3) Déduis-en que les droites (IC), (JA) et (KB) sont concourantes.

Exercice 40

Observe la figure ci-contre où la tare T a une masse de 5 kg, AB = 6 et BC = 1,5.

Détermine la masse marquée m pour que le point C soit le point d'équilibre du système.



Exercice 41

Soit A, B et C trois points non alignés. Dans chacun des cas ci-dessous, détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{AB}$, k décrivant I ;

c) $\| \overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM} \| = 5$ d) $\| 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{CM} \| = \| \overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} \|$

e)) $\| 4\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CM} \| = \| -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CM} \|$.

Exercice 42

Soit A, B et C trois points non alignés tels que AB = 5 cm, BC = 6 cm et AC = 4 cm. On considère le système {(A, 1) ; (B, -2) ; (C, a) } où a est un réel.

1- Détermine l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles le système admet un barycentre qui sera noté G_a ?
2- On suppose dans cette question que a est différent de 1.
   a) Place sur une même figure les points G_0 , G_{-1} et G_2 correspondant respectivement à : a = 0, a = -1 et a = 2.
   b) Déterminer puis représenter l'ensemble des points G_a lorsque a décrit $\mathbb{R}/\{1\}$. (*On pourra utiliser le barycentre du système {(A, 1) ; (B, -2)})*

Exercice 43

Soient ABC un triangle et A', B', C' les barycentres respectifs des systèmes :
{(B, 1) ; (C, 2)} , {(C, 1) ; (A, 2)}, {(A, 1) ; (B, 2)}.

a) Construis les points A', B', C'.

b) Détermine l'ensemble des points M définis par :$\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \|$.

c) En t'inspirant de la question précédente, démontre qu'il existe un point O et un seul tel que : $\| \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \| = \| \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} \| = \| \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA} \|$.

d) Que représente O pour le triangle A'B'C'

Exercice 44

1) Construis un triangle ABC et place les points : B', milieu de [AC]; C', milieu de [AB].; D, barycentre de (A, 3) et (B, 2) et E, barycentre de (B, 2) et (C, 3). (C,1).

2) Soit I le barycentre de (A, 3), (B,2) et (C,1).

a) Justifie que I est aussi le barycentre de (A, 2), (B, 2), (A, 1) et (C,1).

b) Prouve que I est le barycentre de (B',1) et (C',2) d'une part et de (D ,5) et (C, 1) d'autre part. Montre que I appartient à (CD) et à (C'B').

3) a) Prouve que I est le barycentre des points A et E affectés de coefficients que l'on déterminera.
b) Quelle est la position de I sur le segment [AE]? Milieu de [AE].
4) Déduis de ce qui précède la position relative des droites (CD), (AE) et (B'C').

Exercice 45
Un train roule durant 2 heures à la vitesse constante de 40km/h et pendant 3 heures à la vitesse constante de 50 km/h.
1°) Quelle est la vitesse moyenne durant les 5 heures de vo yage ?
2°) Interprète le résultat en terme de barycentre.

Exercice 46
Dans cet exercice, les objets considérés sont un alliage d'or pur avec un autre métal. Le titre d'un alliage est le rapport entre la masse d'or pur et la masse totale de l'alliage. (On exprime aussi ce titre en carats : un titre de 75% correspond à 18 carats.) On fait fondre ensemble deux objets: l'un de 5g à 18 carat; l'autre de 15 g à 14 carats.
1) Quel est le titre de ce mélange en carats ?
2) Retrouve le résultat précédent en utilisant la notion de barycentre.

Exercice 47
Deux triangles ABC et A'B'C' ont pour isobarycentres respectifs G et G'.
1) Démontre que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\,\overrightarrow{GG'}$.
2) Déduis-en que deux triangles ABC et A'B'C' ont même isobarycentre si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Exercice 48
1) Etant donné un triangle ABC, construis les points I, J et K définis par :
a) I est le barycentre de (A, 2) et (C, 1) b) J est le barycentre de (A, 1) et (B, 2)
c) K est le barycentre de (C, 1) et (B, -4).
2) Démontre que B est barycentre de (K, 3) et (C, 1).
3) Quel est le barycentre de (A, 2), (K, 3) et (C, 1).
4) Déduis de la question 2) que I, J et K sont alignés et que J est le milieu de [IK].
5) L étant le milieu de [CI] et M celui de [KC], démontre que IJML est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de ABC.

Exercice49
A, B et C sont 3 points deux à deux distincts du plan. E et F sont les points du plan définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $-2\,\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$.
1) Fais une figure en y plaçant les points A, B, C, E et F.
2) Détermine deux entiers relatifs a et b tels que E = bar {(A,a) ; (B, b)} .
3) Détermine trois entiers a', b' et c' tels que F soit le bar {(A, a'),(B, b'), (C, c') } .
4) J est le barycentre de (E, 2) et (F, 1) . Montre, sans faire de calcul vectoriel, que J est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients à déterminer.

Exercice 50
ABCD est un carré de 5 cm.
1) Justifie l'existence des barycentres E et F des systèmes respectifs {(A,2) ; (B, 3)} et {(B, -1) ; (C, 3)} . Place E et F.
2) La droite (EF) coupe la droite (CD) en I et la droite (AD) en J.
a)Trouve deux réels a et b tels que I soit le barycentre de (C, a) et (D, b).
b)Trouve deux nombres entiers x et y tels que J soit le barycentre de (A, x) et (D, y).

Exercice 51
Une plaque homogène d'épaisseur constante est constituée d'un rectangle ABCD de côtés 5 cm et 8 cm et d'un triangle équilatéral ABE extérieur à ABCD.

1) Fais une figure.
2) Construis le centre de gravité du solide.

Exercice 52
ABCD est un losange, C' le milieu de [AB]. et G le point d'intersection de [BD] et [CC'].
1) Montre que G est le centre de gravité de ABC ; en déduire que
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1)
2) Montre que (1) est équivalent à $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
3) A chaque point M du plan , on associe le vecteur $\vec{V} = 3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
On appelle (C) l'ensemble des points M du plan pour lesquels le vecteur $\vec{V}$ associé, est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

a) Montre que A et D appartiennent à (C).
b) Montre que (C) = (AD).

Exercice 53
Soient A et B deux points distincts du plan.

1) G est barycentre de (A, a) et (B, b). montre que G $\in$ (AB) .
2) Soit M un point de (AB). Montre que M est un barycentre des points A et B affectés de coefficients à déterminer.
3) Compare l'ensemble des barycentres des points A et B et la droite (AB).

Exercice 54
ABC est un triangle tel que BC = a, AC = b et AB = c.

1) La bissectrice de $\hat{A}$ coupe (BC) en A'. La parallèle à (AA') passant par C coupe (AB) en D. Démontre que le triangle ACD est rectangle et isocèle en A.
2) a) Montre que $\overrightarrow{A'C} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{A'B}$ (1).
   b) Déduis-en que A' est barycentre des points (C, c) et (B, b).
3) B' est le pied de la bissectrice issue de C. En utilisant la relation (1) , montre que B' est barycentre de A et C et C' est barycentre de A et B.

4) Montre que I est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) ; c'est-à-dire $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

a) Montre que : $a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$. En déduire que I ∈ (AA').

b) Montre de façon analogue que I∈ (BB') et I ∈ (CC').

c) Quelle propriété géométrique du triangle viens-tu de démontrer ?

Exercice 55

Question préliminaire

Soit les réels a, b, c et d tels que

a+b ≠ 0, c+d ≠ 0, b ≠ 0, d ≠ 0

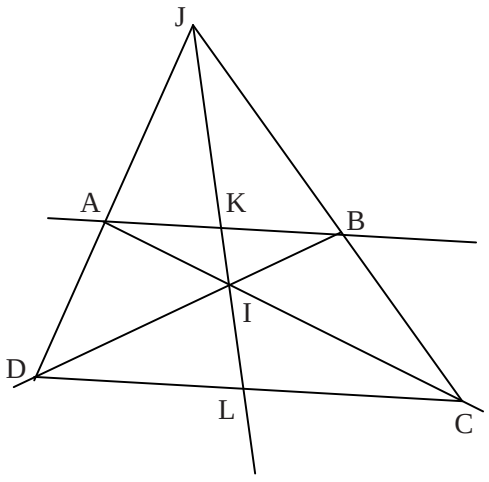
1)Montre que si $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2) Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles

a) Soit A le barycentre de (J, 1) et (D, a)

En utilisant la question préliminaire,

montre que : $\frac{JA}{JD} = \frac{JB}{JC}$ implique $\frac{AJ}{AD} = \frac{BJ}{BC}$.



b) Montre alors que le point B est le barycentre de (J, 1) et (C, a). Déduis-en que I est le barycentre de (J, 1), (C, a) et (D, a) puis que la droite (IJ) passe par le milieu L de [CD].

c) Montre de même que (IJ) passe par le milieu K de [AB].

3) Réciproque

a) On suppose maintenant que les points I, J et le milieu L du segment [CD] sont alignés et que I est le barycentre de (J, 1) et (L, b).

b)Montre que I est le barycentre de (J, 1), (C, $\frac{b}{2}$) et (D, $\frac{b}{2}$).

c) Montre que A et B sont les barycentres respectifs des systèmes : {(J, 1), (D, $\frac{b}{2}$}

et {(J, 1) , (C, $\frac{b}{2}$) }. Déduis-en que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Problèmes de synthèse

Exercice 56

Soit ABC un triangle quelconque ; on appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1°) Construis à la règle et au compas le point H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}$.

2°) Soit A' milieu de [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB].

Montre que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{BH} = 2\,\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{OC'}$.

3°) Montre que : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.

Déduis-en que H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montre que : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Déduis-en que dans un triangle ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre O du cercle circonscrit sont alignés.

NB : La droite passant par O, G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC.

5°) Soient [AM] , [BN] et [CQ] les hauteurs du triangle ABC.

Soient E, F et R les milieux respectifs des segments [AH] , [BH] et [CH].

a) Montre que les quadrilatères EFA'B' et ERA'C' sont des rectangles.
b) Déduis-en que les neufs points M, A', R, B', N, E, C', Q et F appartiennent à un même cercle.

Ce cercle est appelé cercle d'Euler ou cercle des neuf points du triangle ABC.

NB : Les points M, A', R, B', N, E, C', Q et F appartenant à un même cercle sont dits cocycliques. On dit aussi que le polygone MA'RB'NEC'QF est inscriptible dans un cercle.

Exercice 57

1°) Soit un angle $\widehat{xOy}$, I un point de la demi droite [Ox), J un point de la demi droite [Oy) avec I et J distincts de O et OI = OJ.

Soit K le point tel que : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$, L le point tel que $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$, J' le symétrique J par rapport à O.

a) Quelle est la nature des quadrilatères OIKJ et OILJ' ? Justifie la réponse.

b) Déduis-en que (OK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ et que (OL) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ'}$.

NB : (OK) et (OL) sont alors respectivement appelées bissectrice intérieure et bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{xOy}$.

2°) ABC étant un triangle, on pose a = BC, b = CA, c = AB et m = a + b + c.

On considère les points M, N et T tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{m}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{c}{m}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AT} = \frac{b}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{m}\overrightarrow{AC}$.

a) Montre que AM = AN et que (AT) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.

b) Montre que : $\overrightarrow{BT} = \frac{a}{m}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{m}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{CT} = \frac{a}{m}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{m}\overrightarrow{CB}$. Déduis-en que les droites (BT) et (CT) sont les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

c) Montre que T est le barycentre du système {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}.

d) Montre que T est le centre d'un cercle (***C***) situé à l'intérieur du triangle ABC et tangent à la fois à (AB), (AC) et (BC).

e) Déduis des questions précédentes que les bissectrices intérieures des angles d'un triangle sont concourantes.

NB : Le point de concours T des bissectrices intérieures des angles d'un triangle ABC est le centre du cercle inscrit (***C***) dans le triangle ABC.
T est aussi le barycentre du système {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}.

3°) On considère le point S tel que $\overrightarrow{BS} = \frac{c}{m}\overrightarrow{BC} - \frac{a}{m}\overrightarrow{BA}$.

a) Montre que $\overrightarrow{AS} = \frac{b}{m}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{m}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CS} = \frac{b}{m}\overrightarrow{CB} - \frac{c}{m}\overrightarrow{CA}$.

b) Montre que (AS) est la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$, (BS) est la bissectrice extérieure de extérieure de $\widehat{ABC}$ et (CS) est la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$.

c) Montre que S est le barycentre du système {(A, -a) ; (B, b) ; (C, c)}.

d) Montre que S est le centre d'un cercle (***C***$_1$) situé à l'extérieur du triangle ABC et tangent à la fois à (AB), (AC) et (BC).

NB : Ce cercle (***C***$_1$) est unique et est appelé cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC ; son centre S est le point de concours de la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ et des bissectrices extérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

e) Construis les cercles (***C***$_2$) et (***C*** $_3$) respectivement exinscrits dans les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ au triangle ABC. Tu donneras un programme de construction.

Exercice 58

1) On donne un angle $\widehat{xOy}$, deux points A et B à l'intérieur de cet angle, un point I sur [Ox) et un point J sur [Oy) tels que AIBJ soit un parallélogramme. Soit K le point d'intersection de (AB) et (IJ).
La droite passant par K et parallèle à la droite (Ox) coupe [Oy) en E.
La droite passant par K et parallèle à la droite (Oy) coupe [Ox) en F.

a) Montre que $\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KJ}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère FIKE ?

2. On donne deux points A et B à l'intérieur d'un angle $\widehat{xOy}$. Soit K le milieu de [AB]. La droite passant par K et parallèle à (Ox) coupe [Oy) en E ; la droite passant par K et parallèle à (Oy) coupe [Ox) en F.
Soient I est le symétrique de O par rapport à F et J le symétrique O par rapport à E.

a) Montre que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{KJ}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère AIBJ ?

3. On donne deux points A et B à l'intérieur d'un angle $\widehat{xOy}$.
Utilise les questions précédentes pour construire à la règle et au compas le point I sur [Ox) et le point J sur [Oy) tels que le quadrilatère AIBJ soit un parallélogramme.

Exercice 59

(***C***) est un cercle de centre O et de rayon , A et B sont deux points situés à l'extérieur du cercle (***C***) tels que AB < 2r.

Soit O' le point tel que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$. (***C'***) est le cercle de centre O' et de rayon r.

1°) Montre que les cercles (***C***) et (***C'***) sont sécants. On appelle J et J' les points d'intersection des cercles (***C***) et (***C'***).

2°) On considère la droite passant par J et parallèle à (OO') ; elle recoupe le cercle (***C***) en I. La droite passant par J' et parallèle à (OO') recoupe le cercle (***C***) en I'.

a) Montre que (OO') est perpendiculaire à (JJ') et (IJ) est perpendiculaire à (JJ')

b) Montre que les points I, O et J' sont alignés et que $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{OJ'} = \overrightarrow{JO'}$.

c) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{I'J'} = \overrightarrow{AB}$.

3°) En utilisant les questions précédentes construis, à la règle et au compas, les points I, J, I' et J' du cercle (***C***) tels que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{I'J'} = \overrightarrow{AB}$.

On donnera un programme de construction.

Devoirs

Devoir 1

Exercice 1 (4 points)

Soit ABCD un quadrilatère. Construis sur des figures différentes le vecteur :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$ c) $-3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$

f) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$ (0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt + 1 pt+ 1 pt)

Exercice 2 (6,5 points)Soit ABCD un quadrilatère. I est le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) Montre que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$. (1 pt)

2) Soit I' le milieu de [AB].
   a) Compare $\overrightarrow{DI'}$ et $\overrightarrow{DI}$ b) Déduis-en que I' = I (0,5 pt + 0,5 pt)

3) Soit J le point défini par $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DA}$
   a) Construis le point J. (0,5 pt)
   b) Montre que les points I, J et D sont alignés. (1 pt)
   c) Construis le point K défini par $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DJ}$. (0,5 pt)
   d) Montre que les droites (AJ) et (CK) sont parallèles. (1 pt)
   e) Justifie que les droites (DA) et (JB) sont sécantes à (CK). (0,5 pt)
   f) On appelle E le point d'intersection de (DA) et (CK) ; F celui de (JB) et (CK). Exprime $\overrightarrow{FK}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ (1 pt)

Exercice 3 (5 points)

A, B et C sont trois points non alignés. G est le barycentre du système {(A, 2);(B, -3)}

1) a) Traduis vectoriellement le fait que G soit le barycentre du système. (0,5 pt)

b) I est le point du plan défini par $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Recopie la phrase suivante et complète la en mettant les nombres appropriés à la place des pointillés :

I est le barycentre du système {(A,…) ; (B, …) ; (C, …)} (0,5 pt)

c) Recopie la phrase qui suit et complète la par les nombres qui conviennent :

I est le barycentre du système de {(G,…) ; (C, …)} (1 pt)

d) Quel est l'ensemble des réels a tels que le barycentre {(A, 2) ;(B, -2) ; (C, a)} existe. (1 pt)

2) Fais la figure (2 pt)

Exercice 4 (4 points)
Soit ABC un triangle équilatéral de coté 5. G est le barycentre de {(A,1); (B,1); (C,-1)}
M est un point quelconque du plan, et sont les vecteurs définis par :
$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

1) a) Montre que est indépendant de M (c'est-à-dire que l'on peut écrire $\vec{v}$ avec les points A, B et C seulement) (1 pt)

b) Construis l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires (2 pt)

2) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{5}$. (1,5 pt)

Devoir 2

Exercice 1 06 points
ABCD est un parallélogramme.

1) Place les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ (1,5 pt).

2) Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ (1,5 pt).

3) Exprime $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ (1,5 pt).

4) Montre que les points I, J et C sont alignés. (1,5 pt)

Exercice 2 06 points
Soit ABC un triangle.

1) Construis les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (1,5pt).

2) Montrer que $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On détaillera soigneusement les calculs (2 pts).

3) Montrer que N est le milieu [MP]. (2,5 pts)

Exercice 3 08 points
Soit ABC un triangle et G le point du plan tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Ecris G comme barycentre de B et C affectés de coefficients à déterminer(1,5 pts)

2)Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Montre que H est le barycentre du système (A,-2) , (B, 2) et (C, 1). (1,5 pts)

3) Construis les points G et H. (1 pt)

4) Montre que A, G et H sont alignés. (2 pts)

5) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ (2 pts)

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Exercices et problèmes

Exercice 1 (indication)

2 a) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=-1{,}5\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{ON}$

Exercice 2

1) $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.

2) $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{AN}$ donc A, N et P sont alignés.

Exercice 3

2)$\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$

$=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID})$

$=\vec{0}$. On en déduit que I est le milieu de [MN].

3) $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}$ d'où $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{IC}$.

I milieu de [AC] donc $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$. ABNI est un parallélogramme.

Exercice 4

3) $\overrightarrow{BF}=-3\overrightarrow{CE}$ donc (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 35

1)Construction.

2) $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=-3(\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR})=\vec{0}$ donc G est le centre de gravité de IJK.

Exercice 36

Si H est le barycentre du système {(A;3);(B;2)}, alors $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Si K est le barycentre du système {(B;2);(C;-1)}, alors $\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{BC}$.

Si L est le barycentre du système {(A;3);(C;-1)}, alors $\overrightarrow{AL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Si G est le barycentre du système {(H;5);(C;-1)}, alors $\overrightarrow{HG}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{HC}$.

1) G est le barycentre de {(H, 5), (C,-1)} ; or H est le barycentre de { (A, 3), (B,2)}. Donc G est le barycentre de {(A,3), (B,2), (C,-1)} d'où $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

2) a) Puisque L est le barycentre du système {(A;3);(C;-1)}, on écrit

G = Bar{(A;3);(B;2);(C;-1)}=Bar{(L;3-1);(B;2)}

= Bar{(L;2);(B;2)}=Bar{(L;1);(B;1)}. Donc G est le milieu du segment [BL].

b) Puisque K est le barycentre du système {(B;2);(C;-1)}, on écrit :
G = Bar{(A;3);(B;2);(C;-1)} = Bar{(A;3);(K;2-1)}, c'est-à-dire G = Bar{(A;3);(K;1)}.

Exercice 37

1) Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire: $\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Cela traduit le fait que B est le barycentre du système {(K;3);(C;1)}.

2) En utilisantle barycentre partiel _B du système {(K;3);(C;1)}, on écrit :
Bar{(A;2);(K;3);(C;1)} = Bar{(A;2);(B;3+1)} = Bar{(A;2);(B;4)} = Bar{(A;1);(B;2)}**.**
Le barycentre cherché est donc le point J
3) Puisque J = Bar{(A;2);(K;3);(C;1)}, en utilisant le fait que I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), on écrit :
J = Bar{(I;2+1);(K;3)} = Bar{(I;3);(K;3)} = Bar{(I;1);(K;1)} ; donc J est le milieu de [IK].
4) En utilisant la technique dite des barycentre partiel , on écrit : si L est le milieu de [CI], alors L = Bar{(I,1) ; (C,1)} = Bar{(I,3); (C,3)} ; donc $3\overrightarrow{LI} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.(a)

Or I=Bar{(A,2) ;(C,1)} donc pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$.

Donc $2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LC} = 3\overrightarrow{LI}$ (b)

(a) et (b) entrainent que $2\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LC} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{O}$; on en titre : $2\overrightarrow{LA} + 4\overrightarrow{LC} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

Par suite : L = Bar{(A,1) ; (C,2)} ; d'où *a* = 1 et *b* = 2.
De la même manière, si M est le milieu de [KC], alors M = Bar{(K,1) ; (C,1)} = Bar{(K,-3) ;(C,-3)} ; donc $-3\overrightarrow{MK} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (c)

Or K = Bar{(C,1) ;(B,- 4)}; donc pour tout point N du plan $\overrightarrow{NC} - 4\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NK}$.

On en déduit : $\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MK}$ (d)

(c) et (d) entrainent $\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{O}$. Cela donne $-4\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

D'où $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Donc M = Bar{(B,2) ; (C,1)} et par suite *c* = 2 et d = 1.

DEVOIR

Devoir2

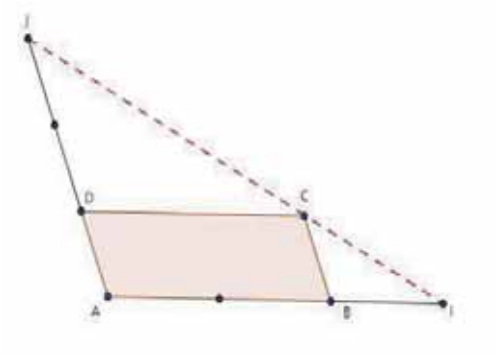
Exercice1

1) Voir figure ci contre.

2) $\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

3) $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

4) $\overrightarrow{IJ}$=3 $\overrightarrow{IC}$ donc I,J et C sont alignés



Exercice2

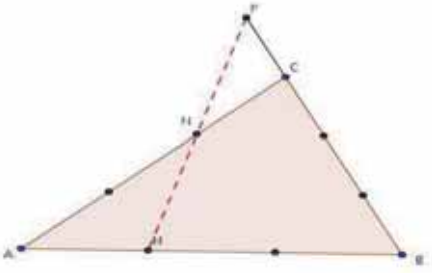
1)Voir figure

2)$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$= -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$ donc N est le milieu de [MP]



Exercice 3

1) G=bar { (B,2) ; (C,1)}

2) $-2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ donc H est le barycentre de (A,-2), (B, 2), (C, 1)

3) H=bar {(A, -2), (G, 3)} donc A, G et H sont alignés.

4) On a $\overrightarrow{MH} = k\,\overrightarrow{BC}$ (k ϵ IR) donc l'ensemble cherché est la droite passant par H et parallèle à (BC).

2 REPERAGE

APERÇU HISTORIQUE

La géométrie analytique est une branche de la géométrie dans laquelle les objets sont représentés par des équations ou des inéquations. Elle est fondamentale pour la physique et l'infographie..
En géométrie analytique le choix d'un repère est indispensable. En mathématique, un repère est constitué d'un point auquel on se réfère et d'un ensemble d'éléments permettant de situer de manière simple n'importe quel objet. Ceci permet de déterminer, chaque point, de manière unique et précise.
Grâce au système de coordonnées cartésiennes on détermine la position d'un point sur une droite , dans un plan ou dans l'espace. Il permet aussi de caractériser un vecteur. Le mot cartésien est un adjectif qui vient du mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650). Il existe d'autres systèmes de coordonnées que tu verras ultérieurement, permettant de repérer un point dans le plan ou dans l'espace

OBJECTIFS

- Effectuer des changements de repère adéquats pour faciliter la résolution de problèmes d'analyse ou de géométrie.
- Avoir une bonne connaissance de la notion de repère.
- Avoir une bonne connaissance de la notion d'équation d'une courbe dans un repère.
- Utiliser un repère pour résoudre analytiquement des problèmes de géométrie.

REPERAGE SUR UNE DROITE

Repère d'une droite, abscisse d'un point

Activité

Trace une droite (D) de vecteur directeur $\vec{i}$ et place un point O sur (D).

Place les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 tels que :

$\overrightarrow{OA_1} = 2\,\vec{i}$; $\overrightarrow{OA_2} = -2\,\vec{i}$; $\overrightarrow{OA_3} = 3\,\vec{i}$ $\overrightarrow{OA_4} = 5\,\vec{i}$; $\overrightarrow{OA_5} = -\frac{5}{3}\vec{i}$

1- Compare les distances OA_1, OA_3 et OA_4.
Quelle remarque fais-tu sur les positions des points A_1, A_3 et A_4 par rapport à O ?
2- Compare les distances OA_1 et OA_2.
3- Quelle remarque fais-tu sur les positions des points A_2 et A_5 par rapport à O ?
4- Soit un point M tel que $\overrightarrow{OM} = k\,\vec{i}$ avec k réel ; indique suivant le signe de k, la position de M par rapport à O.

Définitions

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{i}$ et O un point de (D). Soit M un point de (D) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$

- Le couple (O ; $\vec{i}$) est appelé repère de la droite (D).
- Le réel x est l'abscisse du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$).

L'abscisse du point M est quelquefois notée x_M.

Exercice

Donne l'abscisse de chacun des points de la droite (D) de l'activité précédente.

Mesure algébrique

Activité

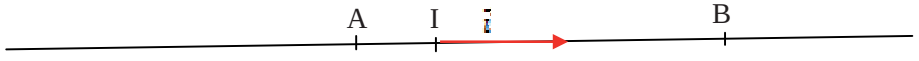
Dans l'activité précédente trouve les réels a , b et c tels :

$\overrightarrow{A_2A_3} = a\,\vec{i}$; $\overrightarrow{A_1A_4} = b\,\vec{i}$; $\overrightarrow{OA_5} = c\,\vec{i}$.

Soient A et B deux points de la droite (D) d'abscisses respectives x_A et x_B.
Montre que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i}$

Définition et notation

Soit (D) une droite de repère (I, $\vec{i}$), A et B deux points de cette droite :



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires , donc il existe un réel x tel que : $\overrightarrow{AB} = x\,\vec{i}$

Le réel x est appelé **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement à $\vec{i}$.

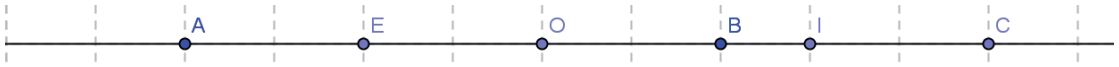
La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ est notée $\overline{AB}$

Retiens :

$\overline{AB} = x_B - x_A$

Exercice :

(D) est une droite graduée de repère (O, I) (figure ci-dessous).



Donne la mesure algébrique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EC}$.

Solution

Les points A , B , C et E ont pour abscisses respectives $-\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}$ et $-\frac{2}{3}$

Ainsi $\overline{AB} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$; $\overline{AC} = \frac{5}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$

$\overline{BE} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$; $\overline{EC} = \frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

Conséquences immédiates

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{i}$. Pour tous points A, B et C de (D) et pour tout nombre réel λ , on a :

- $|\overline{AB}| = AB$;
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$;
- Lorsque A et B sont distincts :
  $\overline{AB} = AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens ;
  $\overline{AB} = -AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires ;
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \lambda\overline{AB}$;
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (**Relation de Chasles)**

Version algébrique du théorème de Thalès

ABC étant un triangle, k un nombre réel, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).
Si (MN) et (BC) sont parallèles et $\overline{AM} = k\overline{AB}$ alors $\overline{AN} = k\overline{AC}$ et $\overline{MN} = k\overline{BC}$.

Propriété réciproque :

ABC étant un triangle, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).
S'il existe un réel k tel que $\overline{AM} = k\overline{AB}$ et $\overline{AN} = k\overline{AC}$ alors (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice d'application

ABC est un triangle, E le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

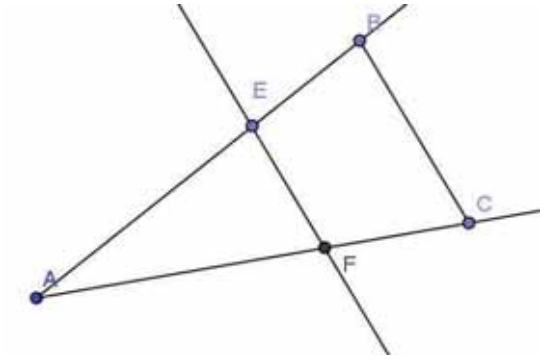
La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.

Démontre que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Solution

Les triangles ABC et AEF sont en position de Thalès. De plus $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; D'où en utilisant la relation de Chasles :

.$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *ce qui entraine* $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.



REPERAGE CARTESIEN

Définitions

Base et repère

On appelle base, tout couple de vecteurs $(\vec{i},\vec{j})$ non colinéaires du plan.

Un **repère** du plan est un triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ où O est un point du plan, $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan.

Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et M un point quelconque du plan.

Le couple de réels (x,y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées du point M et on note M(x,y) ou M $\binom{x}{y}$.

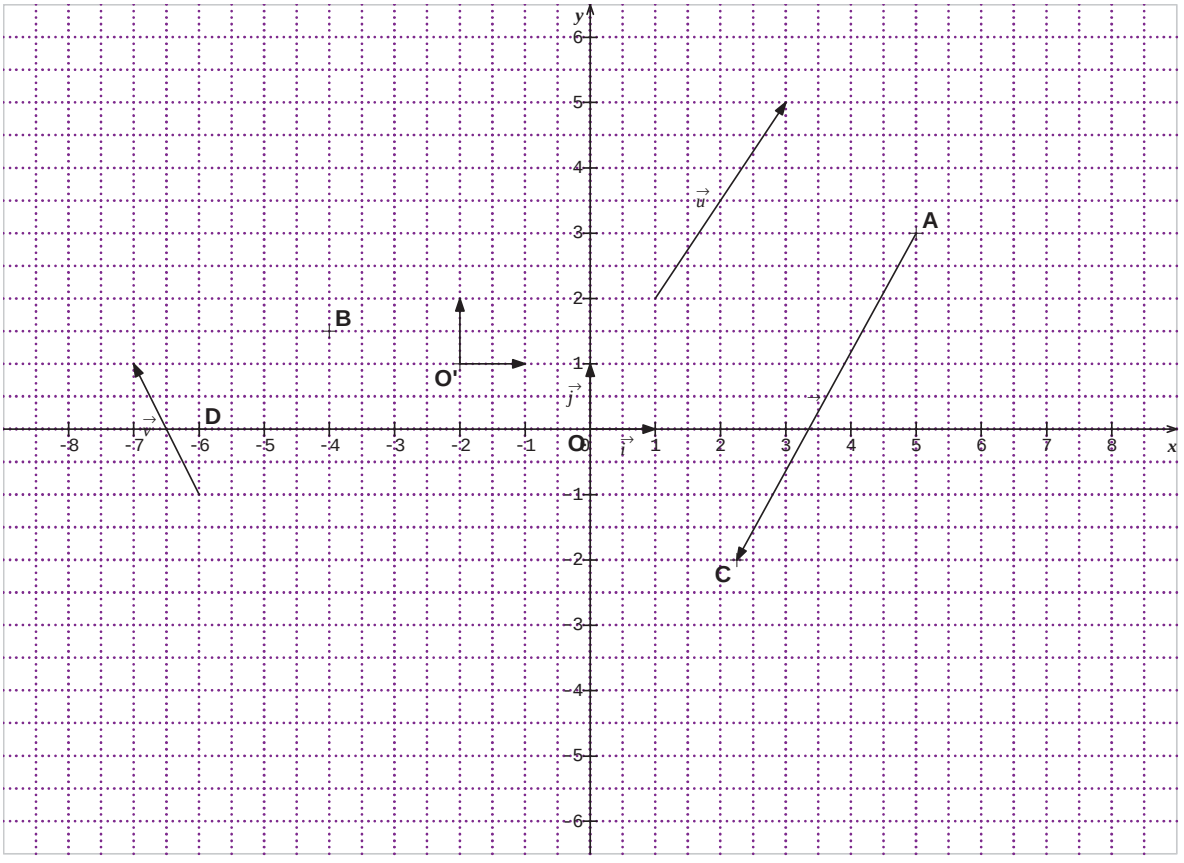
Coordonnées d'un vecteur dans une base

Le couple de réels (x,y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ et on note $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Exercices

Exercice 1

On considère la figure ci-dessous :



a) Donne les coordonnées des points A, B ,C , D et O' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

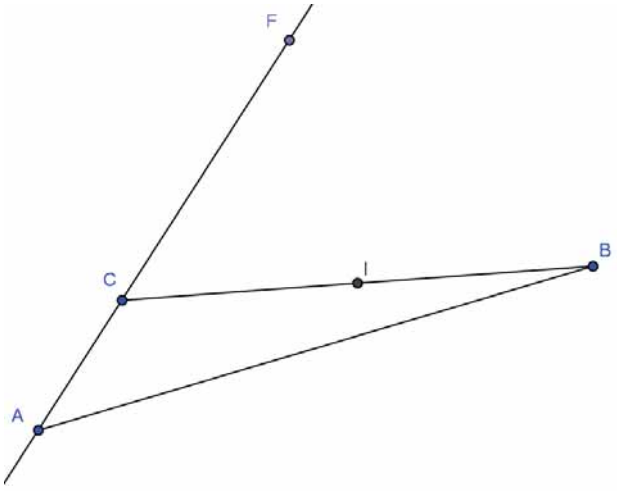
b) Détermine par lecture graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Donne les coordonnées des points A, B ,C , D et O dans le repère $(O',\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2

Sur la figure ci-contre I est le milieu de [BC] et F le point tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

a) Justifie que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
b) Donne les coordonnées des points A , B , C, I et F dans ce repère.
c) De même, justifie que $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est un repère du plan.
d) Donne les coordonnées des points A , B , C, I et F dans ce nouveau repère.



Base orthogonale

- Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale et que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal.
- Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de longueurs égales à 1, on dit que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal.
  On parle aussi de repère orthonormé.

Coordonnées d'un barycentre

Barycentre de deux points

Activité

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B). Soit G = bar$\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ tel que G (x_G, y_G).

1) Ecris la relation vectorielle traduisant que G est barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$.
2) En déduire les coordonnées de G en fonction de celles de A et B.

Solution

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(x_A - x_G) + \beta(x_B - x_G) = 0 \text{ et } \alpha(y_A - y_G) + \beta(y_B - y_G) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x_G = \alpha x_A + \beta x_B \text{ et } (\alpha + \beta)y_G = \alpha y_A + \beta y_B.$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, on a :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Retiens :

Si G = bar$\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors : $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ e $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

Application:

Soient A$\binom{-1}{2}$ et B$\binom{3}{1}$ dans un repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$) . Calcule les coordonnées du point G barycentre des points pondérés (A ;2) et (B ; -5).

Barycentre de trois points

Activité

Soit ($O, \vec{i}, \vec{j}$) un repère et G = bar $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

En procédant de manière analogue à l'activité précédente, détermine les coordonnés du point G barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ en fonction de celles des points A, B et C.

Solution :

On a $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(x_A - x_G) + \beta(x_B - x_G) + \gamma(x_A - x_G) = 0$

et $\alpha(y_A - y_G) + \beta(y_B - y_G) + \gamma(y_A - y_G) = 0$.

On en déduit :

$(\alpha+\beta+\gamma)x_G = \alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C$ et $(\alpha+\beta+\gamma)y_G = \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C$

comme $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$: $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Retiens :

Si G =bar$\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$, alors : $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

Application :

Soient A(-1 ; 2) , B(3 ;1) et E(5 ; 3) dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$). Calcule x et y pour que C(x ; y) soit le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, 1) et (E, -2).

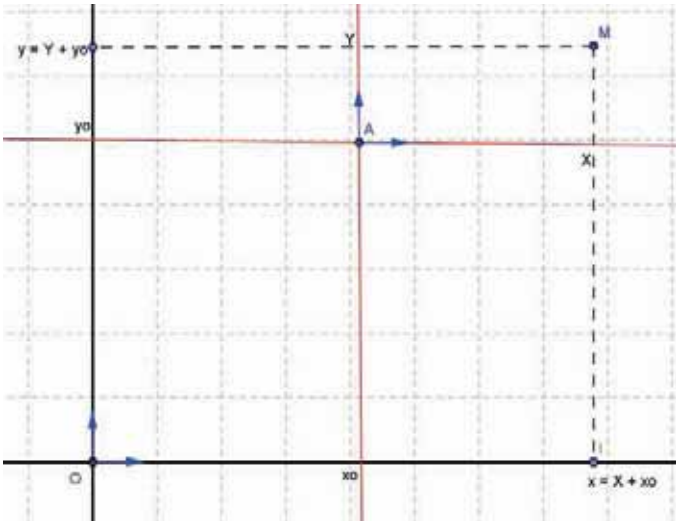
Changement de repère par translation

Activité

Soient A(x_0 ; y_0) et M(x ; y) dans un repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$) .

On considère les coordonnées X et Y du point M dans le repère ($A, \vec{i}, \vec{j}$).

1) Exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$.



2) Déduis-en que $\overrightarrow{AM} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$.

3) En remarquant que : $(x - x_0,\ y - y_0)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, montre que : $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$.

Chacun de ces systèmes est appelé : formules de changement de repère.

Application :

Soit A(-1 ; 2) et B(5 ; 3) dans un repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$) . Calcule les coordonnées de B dans le repère($O, \vec{i}, \vec{j}$) et les coordonnées de A dans le repère ($B, \vec{i}, \vec{j}$) .

COLINEARITE DE DEUX VECTEURS

Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base($\vec{i}, \vec{j}$) . On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $xy' - x'y$ noté **det ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Ainsi on a: **det ($\vec{u}$, $\vec{v}$) =** $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Condition de colinéarité

Activité

Soient deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Montre que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors det $(\vec{u},\vec{v}) = 0$;

Solution

a) Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, il est évident que det $(\vec{u},\vec{v}) = 0$;

b) Supposons que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est sont tous non nuls. Il existe donc un réel k non nul tel que si $\vec{u} = k\vec{v}$. Ce qui donne :

x = kx' et y = ky' c'est-à-dire , x = kx' et ky' = y.

En multipliant membre à membre les deux égalités, on obtient :x(ky') = (kx')y.

Ce qui équivaut : k(xy' – x'y) = 0. Comme k est non nul, on a l'égalité : det $(\vec{u},\vec{v}$ = 0.

Retiens :

Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont colinéaires alors det $(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Application :

Vérifie si $(\vec{u},\vec{v})$ est une base et justifie ta réponse dans chacun des cas suivants :

- $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -9\vec{i} + 6\vec{j}$
- $\vec{u} = (1 - \sqrt{2})\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + (1 + \sqrt{2})\vec{j}$
- $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$ (on discutera suivant les valeurs du réel a).

EQUATIONS DE DROITES

Vecteur directeur

Rappel

On appelle vecteur directeur d'une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que la droite.

Remarques:

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et k un réel non nul, alors $k\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).
- Si A et B sont deux points distincts de (D) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormée (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Soient deux points A (1 ; 3) et B (-1 ; -1) de la droite (Δ) et C le point de coordonnées (2 ; 1). Trouve l'ordonnée du point D d'abscisse 3 tel que $\overrightarrow{CD}$ soit un vecteur directeur de (Δ).

Equation générale

Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormée (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), on considère la droite (D) passant par A (-1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}$(2 ; 1).

Soit M(x ; y) un point quelconque ; établis une relation entre x et y pour que M appartiennent à la droite (D).

Solution

M appartient à (D) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ (x+1 ; y-3) et $\vec{u}$ (2 ; 1). colinéaires.

On en déduit que det ($\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$) = 0.

(x + 1) × 1 – (y – 3) × 2 = 0 ⇔ x – 2y + 7 = 0 ;

L'équation **:** x – 2y + 7 = 0 ; est appelée équation générale de la droite (D) passant par A (-1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}$(2 ; 1).

Cas général

Cette fois-ci, considère dans le même repère la droite (D) passant par A (x_0 ; y_0) et de vecteur directeur $\vec{u}$(-b ; a).

De la même manière que précédemment, établis que M appartient à (D) équivaut $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$

Retiens

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et a ; b et c trois nombres réels tels que(a, b) ≠ (0, 0) .
Toute équation de type : $ax + by + c = 0$ est appelé équation générale d'une droite dont un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées (-b ; a).

Exercices

Exercice1

Soient A(1; -5) et B(-2 ; 3) dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Détermine une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice2

Dans un repère orthonormée (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on considère la droite (L) d'équation générale : 3x- 2y +1 = 0.

1) Détermine l'abscisse du point A de la droite (L) d'ordonnée 2.
2) Détermine l'ordonnée du point B de la droite (L) d'abscisse -1.
3) Détermine les coordonnées d'un point C de la droite (L).
4) Le point M (1 ; 2) appartient-il à la droite (L) ?

Equation réduite

Soit :ax + by + c = 0 l'équation générale d'une droite (D) telle que b ≠ 0.
Exprime y en fonction de x. Tu dois trouver y = $-\frac{a}{b}$ x $-\frac{c}{b}$. En posant m = $-\frac{a}{b}$
et p = $-\frac{c}{b}$ tu obtiens l'équation : y = mx + p appelée équation réduite de la droite (D).

Retiens :

- Toute équation du type : y = mx + p est l'équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- m est appelé coefficient directeur ou pente de la droite ; p est l'ordonnée à l'origine de la droite.

Exercices :

Exercie1
Détermine l'équation réduite de (D) passant par A(2 ; 3) et de coefficient directeur -3.

Exercice2
Donne l'équation réduite :

a) de la droite (Δ) passant par B(-1 ; 2) et C(0 ; 3).
b) de la droite (d) d'équation générale 2x + 5y – 1 = 0.

Equations paramétriques

Activité
Soit (D) une droite passant par A(x_0 ; y_0) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$.
On considère un point M(x ; y) appartenant à (D).

1) Justifie qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM}$ = t $\vec{u}$.
2) Déduis en que : $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ ($t \in IR$)

   $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ ($t \in IR$) est appelé système d'équations paramétriques de (D).

Retiens :
Soit (D) une droite passant par A$\binom{x_0}{y_0}$ de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$.
$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ ($t \in IR$) est un système d'équations paramétriques de (D).

Exercices

Exericie1 :
Donne un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par B(-1 ; 2) et C(0 ; 3).

Exercice 2
Soit (D) : -x + y + 4 = 0 dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Détermine un système d'équations paramétriques de (D).

Exercice 3
Soit (Δ) : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ (t $\in$ IR)

a Trouve un point A de la droite (Δ);
b Le point B(-3 ; 4) appartient-il a (Δ) ? Justifie la réponse.
c Trouve une équation cartésienne (Δ).

EXERCICES ET PROBLEMES

Repères d'une droite et mesures algébriques

Exercice 1
Soit D une droite du plan. Comment définir un repère de D ?

Exercice 2
(D) est une droite du plan ; A, B et C sont trois points distincts de D ; I est un point du plan n'appartenant pas à D. Pour chacune des affirmations suivantes, dis si elle est **vraie** ou **fausse** ; tu justifieras à chaque fois ta réponse.

a) (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan.
b) (A, $\overrightarrow{AB}$) est un repère de D.
c) (A, B) est un repère de D
d) (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$) est un repère du plan.
e) (I, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$) est un repère du plan.
f) (I, $\overrightarrow{IB}$) est un repère du plan.
g) (I, $\overrightarrow{IB}$) est un repère de (D).
h) (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère de D.

Exercice 3
(D) est une droite graduée du plan, A et B sont deux points de D.
Donne la définition de la mesure algébrique de $\overline{AB}$.

Exercice 4
(D) est une droite graduée du plan, I et J sont deux points de D.
Répondre par **oui** ou **non** aux questions suivantes :
a) $\overline{IJ} = x_I - x_J$ b) $\overline{IJ} = x_J - x_I$
c) la mesure algébrique de (I,J) est égale à l'abscisse de J diminuée de celui de I.

Exercice 5
Sur une droite (d) munie d'un repère $(O\ ,\ \vec{i})$.

Place les points $A(2)$; $B(-5)$; $C\left(-\frac{7}{2}\right)$; $D\left(\frac{13}{4}\right)$ et $E(6{,}25)$

1) Calcule les mesures algébriques

a) $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{ED}$; $\overline{AE}$; b) $\overline{AB}-\overline{AE}$; $2\overline{BC}+\overline{ED}$.

2) a) Place le point I tel que $\overline{BI}=3$ b) Montre que $\overline{AI}=-2\,\overline{DE}$.

Exercice 6
Une droite Δ est munie d'un repère $(O\ ,\ \vec{i})$. Les points A , B , C , D et E de cette droite sont tels que $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$; $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{i}$; $\overrightarrow{OD}=8\vec{i}$ et $\overrightarrow{OE}=-5\vec{i}$

1)Fais une figure

2) Dans chacun des cas suivants, détermine l'abscisse x du point M vérifiant :

a) $\overline{AM}=\overline{BC}$ b) $2\overline{AM}-\overline{ME}=-4$

3) Dans chacun des cas suivants, détermine les abscisses des points N vérifiant

$a)\ -1\leq\overline{ON}\leq 2$ b) $BN^2=9$.

Repères dans le plan

Exercice 7
Soit (P) un plan. Comment définir un repère du plan (P) ?

Exercice 8
Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère les points I(1; 2), B(-1; 3) et M(x ; y).

a) Détermine les coordonnées du point B dans le repère (I ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
b) Détermine les coordonnées (X, Y) de M dans (I ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Exercice 9
Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On considère les points : A(-1 ; 2), B(2 ; - 1), C(-2 ; -1) et I(0 ; 1). Montre que :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

Exercice 10
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ puis M avec :

a) $A(4\ ,\ 2)$; $B(-2\ ,\ 1)$; $C(-3\ ,\ 5)$ et $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

b) $A(-3\ ,\ 1)$; $B(5\ ,\ 2)$; $C(4\ ,\ -1)$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Exercice 11

1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec A(4 ; -1); B(7; -3) et C(-5; 5).

2) Les points A, B, C sont ils alignés ?

Exercice 12

Comment choisir le réel k tel pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires avec :

a) $\vec{u}(5\ ,\ -2)$ et $\vec{v}(k\ ,\ 5)$;

b) $\vec{u}(-3\ ,\ |k|)$ et $\vec{v}(2\ ,\ -4)$;

c) $\vec{u}(4\ ,\ 3k)$ et $\vec{v}(-5,\ k^2\sqrt{2})$.

Exercice 13

On donne les points A(2 ; -1) ; B(5 ; -3) et C(3 ; 2).(AB) et (OC) sont-elles parallèles ?

Exercice 14

On donne quatre points A, B , C et D. Sans faire de représentation graphique , dis si les droites (AC) et (BD) sont parallèles ?

a) $A(3\ ,\ -1)$; $B(5\ ,\ 7)$; $C(-8\ ,\ 1)$: $D\ (7\ ,\ 4)$.

b) $A(2\ ,\ 3)$; $B(4\ ,\ -1)$; $C(3\ ,\ -4)$; $D\ (1\ ,\ 5{,}2)$.

Exercice 15

Trouve une équation de la droite (d) qui passe par A et qui a pour vecteur directeur $\vec{V}$ dans chacun des cas suivants : a) A(-4 ; 3) ; $\vec{V}(5\ ,\ -3)$;

b)A(5 ; 3) ; $\vec{V}(-7\ ,\ 2)$ c)A(4 ; -8) ; $\vec{V}(100\ ,\ 200)$.

Exercice 16

Trouve une équation de la droite (AB) , calcule la coordonnée manquante du point C afin qu'il soit sur la droite (AB) . Dis si oui ou non D est sur la droite (AB) :

a) $A(-4\ ,\ 3)$; $B(5\ ,\ -2)$; $C\left(\frac{2}{3}\ ,\ ....\right)$; $D\ \left(296\ ,\ -\frac{491}{3}\right)$.

b) $A(-6\ ,\ 2)$; $B(-3\ ,\ 5)$; $C(....,\ 0)$; $D\ \left(-\frac{23}{5}\ ,\ \frac{16}{5}\right)$.

c) $A(\sqrt{2}\ ,\ 0)$; $B(-\sqrt{2}\ ,\ 1)$; $C(3\ ,\ ....)$; $D\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.

Exercice 17

Trouve une équation de la droite qui passe par A et qui est parallèle à la droite (Δ)

a) $A(0\ ,\ 1)$ et $(\Delta): x - y + 1 = 0$; b)$A\left(\frac{4}{7},\ \frac{8}{5}\right)$ et $(\Delta) : \frac{4}{5}x - \frac{5}{7}y + \frac{3}{8} = 0$.

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ puis celles de M dans chacun des cas suivants :

a) $A(4\ ,\ 2)$; $B(-2\ ,\ 1)$; $C(-3\ ,\ 5)$ et $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

b) $A(-3\ ,\ 1)$; $B(5\ ,\ 2)$; $C(4\ ,\ -1)$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Exercice 19

Détermine dans chacun des cas suivants la ou les valeurs du réel k pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires : a) $\vec{u}(5\ ,\ -2)$ et $\vec{v}(k\ ,\ 5)$;

b) $\vec{u}(-3\ ,\ |k|)$ et $\vec{v}(2\ ,\ -4)$; c) $\vec{u}(4\ ,\ 3k)$ et $\vec{v}(-5,\ k^2\sqrt{2})$

Exercice 20

On donne dans le plan muni d'un repère cartésien les points $A(2\ ,\ -1)$; $B(5\ ,\ -3)$ et $C(3\ ,\ 2)$. Les droites (AB) et (OC) sont elles parallèles ?

Exercice 21

On donne dans le plan muni d'un repère cartésien quatre points A, B , C et D. Sans faire de représentation graphique, dis si trois de ces points sont alignés ?

$A(3;\ -1)$; $B(5;\ 7)$; $C(-8;\ 1)$; $D\ (7;\ 4)$.

Exercice 22

Le plan est muni d'un repère cartésien. Trouve une équation de la droite (d) qui passe par A et qui a pour vecteur directeur $\vec{V}$ dans chacun des cas suivants :

a) A(-4 ; 3) ; $\vec{V}(5\ ,\ -3)$ b) $A(5\ ,\ 3)$; $\vec{V}(-7\ ,\ 2)$

c) $A(4,\ -8)$; $\vec{V}(100,\ 200)$.

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient A(1 ; 2) et B(-2 ; 3) deux points du plan et $\vec{u}\binom{-1}{2}$ un vecteur. (D) est la droite de repère (A, $\vec{u}$).

a) Détermine une équation cartésienne de (D) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

b) Détermine un système d'équations paramétriques de chacune des deux droites (D) et (AB).

Exercice 24

Pour chacun des systèmes suivants, dis si il est un système d'équations paramétriques d'une droite.

a) $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -1,\ k \in IR \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = k \\ y = 2 - k,\ k \in IR \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 + k_1 + k_2 \\ y = k_1 - k_2,\ k_1, k_2 \in IR \end{cases}$

Exercice 25

La droite (d) passe par A(1 ; 3) et a pour coefficient directeur 2. La droite (d') passe par B(2 ; 2) et a pour coefficient directeur -3.

Construis ces deux droites. Trouve les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 26

Donne deux points distincts A et B, un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite (D) dans les cas suivants : a) (D) : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t.\ t \in IR \end{cases}$;

b)(D) : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4k,\ k \in IR \end{cases}$; c) (D) : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t,\ t \in IR \end{cases}$ d) (D) : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1\ ;\ t \in IR \end{cases}$

Exercice 27

Donne deux points distincts A et B, un vecteur directeur, le coefficient directeur (si possible) et un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) dans les cas suivants : a) (Δ) : x – y + 4 = 0. b) (Δ) : 2x – y + 3 = 0.
c) (Δ): x + 4 = 0. d) (Δ): – y + 3 = 0. e) (Δ): 2x +3 y = 0.

Exercice28

Dans chacun des cas suivants donne une représentation paramétrique de (D) :

1) (D) passe par $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ b) (D) passe par $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$

2) (D) passe par $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et est dirigé par $\vec{u}(3\ ,\ -4)$;

3) (D) passe par $A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et est parallèle à la droite Δ d'équation : $x+5y-4=0$.

Exercice 29

Dans chacun des cas suivants donne une représentation paramétrique de la droite :
1) (D) a pour équation cartésienne : x – 2y + 5 = 0.
2) (D) passe par $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et est perpendiculaire à la droite d'équation – x + 5y – 8 = 0.
3) (D) est la médiatrice du segment [BC] avec $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 30

Trouve les coordonnées du point d'intersection I des deux droites (d) et (d') s'il existe d'existence : a) (d) : 2x – y + 5 = 0 et (d') : 3x – 5y + 6 = 0
b)(d) : x = 3 et (d') : x + 5y – 4 = 0 d) (d) : 2x – y = 0 et (d') : 5x + 3y + 1 = 0.

Exercice 31

Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. O' et A deux points de coordonnées respectives (2 ; -2) et $(\frac{3}{2}$; 3)

a) Retrouve les formules de changement de repère par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$; déduis-en les coordonnées du point A dans le repère $(O';\vec{i},\vec{j})$.

b) Soit (D) la droite d'équation y = - 3x + 4 dans le repère $(O';\vec{i},\vec{j})$.

Donne une équation cartésienne de (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Fais une figure.

Exercice 32

A tout réel m on associe la droite D_m d'équation : (2m – 1)x + (3 – m)y – 7m + 6 = 0. a) Dans chacun des cas ci-après détermi ne m pour que :
i) D_m passe par $A(1,1)$ ii) D_m passe par l'origine du repère
iii) D_m soit parallèle à l'axe des abscisses iv)D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées

b) Démontre qu'il existe un point K qui appartient à toutes les droites D_m
c) Trouve m pour que D_m ait un coefficient directeur égal à un réel c donné.
d) Toutes les droites qui passent par K sont elles des droites D_m ?

Exercice 33
Dans un repère orthonormal, on donne les points A(4 ; 9); B(10 ; 11) et K(6 ; 7).
1) D est le point tel que $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BK}$. Quelles sont les coordonnées de D ?
2) Par D on mène la parallèle à (AB) ; elle coupe (AK) en C. Quelles sont les coordonnées de C ?
3) Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ? Justifie ta réponse de deux façons :
- par la géométrie analytique (c'est-à-dire avec les coordonnées) ;
- sans utiliser la géométrie analytique.

Exercice 34
Le plan est muni d'un repère orthonormal. ABC est un triangle, A(0 ; 1). La médiane (d_1) issue de B a pour équation y = $= -\frac{1}{2}$x + 2 ; la médiane (d_2) issue de C a pour équation y = - 2x + 3. On cherche à partir des ces données à construire le triangle ABC, c'est-à-dire à trouver les coordonnées de B et C.
a) Représente graphiquement les droites (d_1) et (d_2) et le point A.
b) Trouve les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
c) A' est le point tel que $\overrightarrow{AG}$ = $\overrightarrow{GA'}$. Trouve les coordonnées de A'.
d) Trouve une équation de la droite (d'_2) qui passe par A' et qui est parallèle à (d_2).
e) Pourquoi B est il à l'intersection de (d'_2) et (d_1) ?
f) Déduis-en alors les coordonnées de B
g) Trouve les coordonnées de C.

Exercice 35
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Détermine les valeurs possibles de m pour que $\vec{u}$ soit un vecteur directeur d'une droite dans chacun des cas suivants :
i) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2-3m+2 \\ m^2-1 \end{pmatrix}$; ii) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2+m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$; iii) $\vec{u}\begin{pmatrix} m+2 \\ m-1 \end{pmatrix}$;
iv) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ m^2-1 \end{pmatrix}$; v) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2-3m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 36
Dans chacun des cas suivants, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$;
b)) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Exercice 37

Dans chacun des cas suivants détermine l'ensemble des valeurs possibles de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\x\end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}x-1\\x-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\x-1\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{x^2-1}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\1\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}x^2+1\\\sqrt{x}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x^2\sqrt{x}+\sqrt{x}\\x\end{pmatrix}$

Exercice 38

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points A(1 ; 2), B(3 ; 1) ; C(3 ; 4) et D(9 ;1).

1) Montre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Détermine une équation cartésienne de chacune des médiatrices des cotés du triangle ABC ; en déduire les coordonnées du centre Ω du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et le rayon de ce cercle.

3) a) Détermine un système d'équations paramétriques de la hauteur issue de A du triangle ABC

b) Donne une équation cartésienne de la hauteur issue de B du triangle ABC.

c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

4) a) Détermine un système d'équations paramétriques de la médiane relative au sommet A du triangle ABC.

b) Donne une représentation paramétrique de la médiane relative au sommet C du triangle ABC.

c) En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

5) a) Montre que les points Ω, G et H sont alignés.

b) Détermine la position du point G sur le segment [OH].

c) Montre que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

6) Montre que le triangle BCD est un triangle rectangle.

7) Montre que le quadrilatère ABDC est un trapèze.

8) Donne les équations cartésiennes des droites (AC), (BD), (AD) et (BC).

9) Soient I et J les milieux respectifs de [CD] et de [AB] ; soient K le point d'intersection de (BC) et (AD), L celui de (AC) et (BD).

a) Détermine les coordonnées des points I, J, K et L.

b) Montre que les points I, J, K et L sont alignés.

Exercice 39

Dans le plan P, on donne un triangle ABC rectangle en A avec AB < AC.

Soit E le point tel que : AB = AE et $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AE}$ avec k > 0.

On considère le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$).

1) Montre que (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé.

2) Détermine les coordonnées des points A, B, C et E.

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]. En utilisant l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$, la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$, montre que le couple des coordonnées de H est $\left(\frac{k^2}{1+k^2};\frac{k}{1+k^2}\right)$.

4) En utilisant les coordonnées des points précédents, montre que :

a) $AB^2 = BH \times BC$; b) $CA^2 = CH \times BC$; c) $AH^2 = HB \times HC$; d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Exercice 40

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle ABC tel que A(1 ; 2), B(3 ; 1) et C(4 ; 4). On note :

- **Ω** le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC ;
- G le centre de gravité de ABC , A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB] ;
- I, J et K les pieds des hauteurs relatives respectivement à A, B et C ;
- H l'orthocentre du triangle ABC ;
- M, N et E les milieux respectifs de [AH], [BH] et [CH].

1) En utilisant la relation vectorielle définissant G, détermine les coordonnées de G.
2) Détermine les coordonnées des points H, Ω, I, J, K, M, N et E.
3) On note F le milieu de [ΩH] et (C') le cercle de centre F passant par B'.
a) Détermine les coordonnées de F.
b) Montre que (C') passe par les neuf points I, J, K, A', B', C', M, N et E.

constructions géométriques

Exercice 41

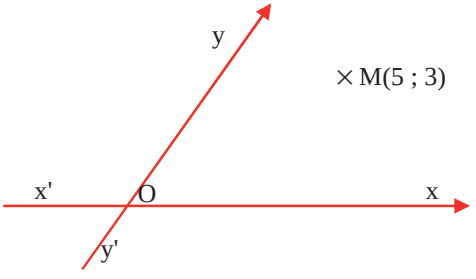
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la droite (D) passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

Construis la droite (D) dans chacun des cas suivants : 1) A(1 ; 2) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$;

2) A(-2 ; -1) et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$; 3) A(2 ; 0) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; 4) A(0 ; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

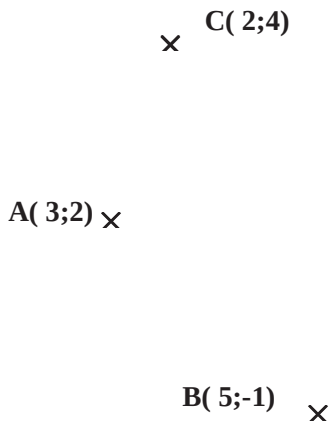
Exercice 42

Dans ce repère d'origine O, on a perdu les points unités I et J respectifs des axes (x'x) et (y'y).
En utilisant les coordonnées du point M, retrouver ces points unités. On donnera un programme de construction.



Exercice 43

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on a perdu les axes, l'origine et les points unités.
Mais dans ce repère on connaît les coordonnées des trois points A, B et C ainsi placés.
En utilisant ces trois points, retrouver les axes, l'origine et les points unité du repère. On donnera un programme de construction.



DEVOIR

DUREE 2 HEURES

Exercice 1 : 5,5 Points

Sur une droite (D) munie d'un repère $(O, \vec{i})$, on considère les points A , B et C d'abscisses respectives -5, 3 et $-\frac{3}{2}$

1) a) Place ces points. **1pt**

b) Détermine l'abscisse du point M de (D) tel que : $\overrightarrow{MA} - \frac{7}{2}\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 0$ **1pt**

c) Détermine l'ensemble des points N de (D) pour lesquels $0 \leq \overrightarrow{AN} \leq 8$ **1pt**

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(2;-3)$ et la droite (Δ) d'équation : $-4x + 3y + 1 = 0$

a) Vérifie que (Δ) contient les points $B(1;1)$, $C(-2;-3)$ **0,5pts**

b) Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ). **1pt**

c) Trouve une équation de la droite (Δ) dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$. **1pt**

Exercice 2 : 7 Points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points : A (7 ; -2) , B (-2 ; -4) , C (1 ; 4).

1) Fais la figure. **1pt**

2)Calcule les coordonnées de A', B' et C', milieux respectifs de [BC],[CA] et [AB]**1,5 pt**

3) Ecris les équations cartésiennes des médianes du triangle ABC **(1+1+1)pts**

4) Déduis-en les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC **(1pt)** 5) Vérifie que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. **0,5pt**

Exercice 3 : 7,5points

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2AC$, I est le milieu du segment [BC], F le symétrique de C par rapport à A, et G le barycentre des points $(A, -6)$; $(E, 3)$ et $(C, 5)$.

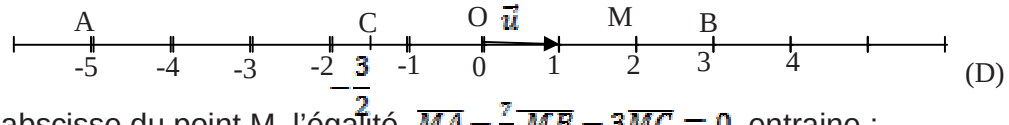
1) Justifie que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthogonal. (1pt)
2) Quelles sont les coordonnées des points I , F et G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? (0,75+0,75+1)pts
3) Trouve les équations des droites (CG) et (AI). (0,5 + 0,5)pt
4) Montre, de deux façons, que les droites (CG) et (AI) sont parallèles. (0,75+0,75)
5) La parallèle à la droite (BC) passant par F coupe la droite (CG) en J. Trouve une équation de (FJ), puis les coordonnées du point J. **(1 + 0,5)pts**

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Devoir

Exercice 1

1) a)



b) Soit x l'abscisse du point M, l'égalité $\overrightarrow{MA} - \frac{7}{2}\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 0$ entraine :

$-5 - x - \frac{7}{2}(3 - x) - 3(-\frac{3}{2} - x) = 0$, ce qui donne $x = 2$.

c) Soit x_N l'abscisse du point N, l'inégalité $0 \leq \overrightarrow{AN}$ entraine $0 \leq x_N + 5$, ce qui donne $x_N \geq -5$. L'inégalité $\overrightarrow{AN} \leq 8$ entraine, $x_N + 5 \leq 8$, ce qui donne $x_N \leq 3$.

Par suite la double inégalité $0 \leq \overrightarrow{AN} \leq 8$ entraine $-5 \leq x_N \leq 3$.

Ainsi, l'ensemble à déterminer est le segment [AB].

2) a) On a : $-4 \times 1 + 3 \times 1 + 1 = -4 + 3 + 1 = 0$, donc (Δ) contient B.

$-4 \times (-2) + 3 \times (-3) + 1 = 8 - 9 + 1 = 0$, donc (Δ) contient C.

b) (Δ) contient le point B (1 ; 1) et le vecteur $\vec{u}$ (- 3 ; - 4) donc une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 - 4k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

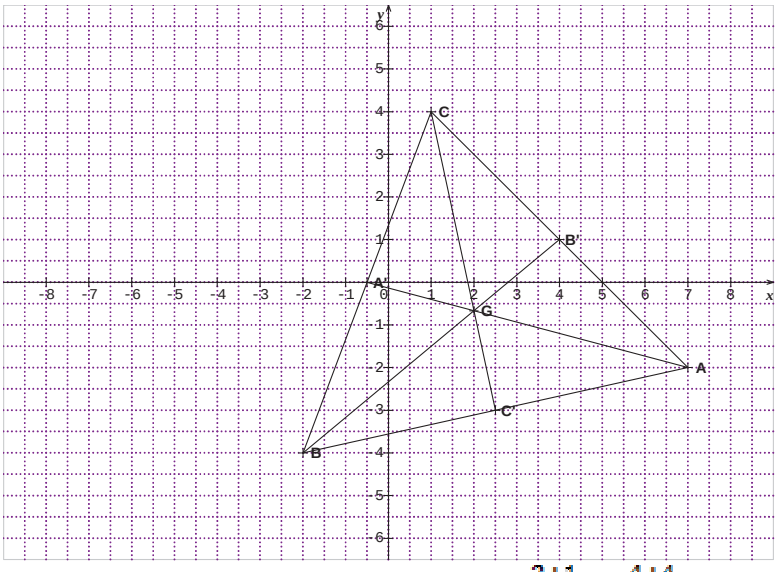
c) Les formules de changement du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ au repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$\begin{cases} x = 2 + X \\ y = -3 + Y \end{cases}$. Donc l'équation (Δ) dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$-4(2 + X) + 3(-3 + Y) + 1 = 0$ ce qui donne $-4X + 3Y - 16 = 0$.

Exercice : 2

1) Voir figure



2) A' est le milieu de [B C], donc A' ($\frac{-2+1}{2}$, $\frac{-4+4}{2}$). D'où A' ($\frac{-1}{2}$, 0) .

B' est le milieu de [AC], donc B' ($\frac{1+7}{2}$, $\frac{4-2}{2}$) .D'où B' (4 , 1) .

C' est le milieu de [AB] , donc C' ($\frac{7-2}{2}$, $\frac{-2-4}{2}$) D'où C' ($\frac{5}{2}$, -3) .

3) Les médiatrices du triangle ABC sont les droites (AA'), (BB') et (CC').

<u>Equation de la médiane de (AA').</u>

Un point $M\ (x,y)$ appartient à (AA') si les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. On a $\overrightarrow{AM}(x-7\ ,y+2)$ et $\overrightarrow{AA'}$ $(\frac{-15}{2}\ ,2)$

Donc $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AA'}$ si $\frac{-15}{2}(y+2)-2(x-7)=0$.

Ce qui donne $-15y-4x-2=0$. Donc (AA') : $-4y-15x-2=0$.

<u>Equation de la droite (BB')</u>

Un point $M\ (x,y)$ appartient à (BB ') si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, autrement dit $\det\ (\overrightarrow{BM}\ ,\overrightarrow{BB'})$= 0.

$\overrightarrow{BB'}(6\ ,5)$ et $\overrightarrow{BM}\ (x+2\ ,y+4)$.

Par suite $\det\ (\overrightarrow{BM}\ ,\overrightarrow{BB}\ )$ = 0 si et seulement si $6(y+4)-5(x+2)=\ 0$.

Ce qui donne après calcul : $6y-5x+14=0$. Donc (BB') : $-5x+6y+14=0$.

<u>Equation de la droite (CC').</u>

Un point $M\ (x,y)$ appartient à (CC') si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont colinéaires, autrement dit $\det\ (\overrightarrow{CM}\ ,\overrightarrow{CC'}\ )$ = 0.

On a $\overrightarrow{CC'}$ ($\frac{3}{2}$, -7) et $\overrightarrow{CM}(x-1\ ,y-4)$. Par suite $\det\ (\overrightarrow{CM}\ ,\overrightarrow{CC'}\ )$ = 0 si et seulement si $\frac{3}{2}\ (y-4)+7(x-1)=\ 0$. Après calcul : (CC') : $14x+3y-26=0$.

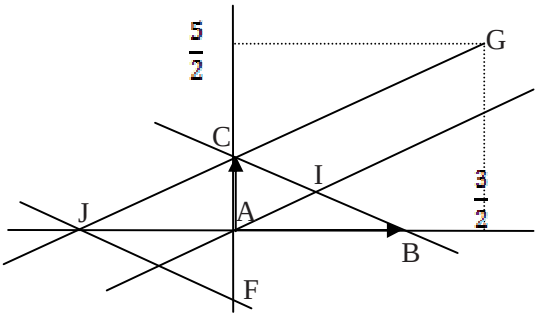
4)Le centre de gravité G de ABC est le point d'intersection des médianes (AA'), (BB') et (CC'); ses coordonnées (x ;y) vérifient donc le système :

$$\begin{cases} -4x - 15y - 2 = 0 \\ 14x + 3y - 26 = 0 \end{cases}$$

5) On trouve $x = 2$ $et\ y = \frac{-2}{3}$. Le point G a pour coordonnées (2 ,$\frac{-2}{3}$).

On vérifie bien que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 3



1) ABC est un triangle rectangle en A, donc les points A, B et C sont non alignés et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. On en déduit que (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est un repère orthogonal ;

2) Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$), on a :

A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ;1).

I est le milieu de [BC], donc $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

F est le symétrique de C par rapport à A, on a donc $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}$, d'où $F(0, -1)$

G le barycentre des points $(A, -6)$; $(E, 3)$ et $(C, 5)$ donc on a

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$. D'où $G(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

3) <u>Equation de la droite (CG)</u>

Un point $M\ (x, y) \in (CG)$ ssi det $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CM})$ =0. On a $\overrightarrow{CG}(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et

$\overrightarrow{CM}(x - \frac{1}{2} ; y - \frac{1}{2})$. Donc det $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CM})$ =0 si et seulement, si $\frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Ainsi (CG) : $y = x + 1$.

<u>Equation de la droite (AI)</u>

Un point $M\ (x, y) \in (AI)$ ssi det $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM})$ =0 . On a $\overrightarrow{AI}(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ et

$\overrightarrow{AM}(x ; y)$. Donc det $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM})$ =0 ssi $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 0$ soit $y - x = 0$.

Ainsi (AI) : $y = x$

4) Montrons que (CG) est parallèle à (AI)

<u>1ere Méthode</u>

On a $\overrightarrow{CG}(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et $\overrightarrow{AI}(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ donc det $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{AI}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires donc les droites (CG) et (AI) sont parallèles.

2eme Méthode

Une équation de (CG) est $y = x + 1$ et une équation de (AI) est $y = x$.

Ces deux droites ont même coefficient directeur , elles sont donc parallèles.

Un point $M\ (x\ ,y) \in\ (FJ)$ ssi det $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{FM})$ =0 . On a $\overrightarrow{BC}(\ -1;1)$ et $\overrightarrow{FM}(x\ \ ;y+1)$ d'où det $(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{FM})$ =0 . ssi $-\ (y+1) - x\ = 0$.

Ainsi $(FJ): y = -x - 1.$

J est le point d'intersection de (CG) et (FJ) , donc les coordonnées $(x\ ,y)$ de J vérifient le système $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

On résous le système et on trouve x = -1 et y = 0 ;

Donc $J(\ -1;0)$.

3 ANGLES ET TRIGONOMETRIE

APERÇU HISTORIQUE

Très tôt dans l'histoire, l'homme a senti le besoin de mesurer des phénomènes apparemment réguliers, comme le retour des saisons, le déplacement des planètes. Mesurer dans le but de prévoir et ainsi apprivoiser ces phénomènes qui, croyaient-ils, influençaient leur vie.
Or, noter la position des étoiles sur la voûte céleste ne se fait correctement qu'au moyen des angles, notion qui apparaît déjà en filigrane dans les premiers écrits des Sumériens.
La trigonométrie (littéralement « mesures » dans le « triangle ») s'est d'abord intéressée à donner des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et ses angles. Elle est devenue une branche à part à part entière des mathématiques, à cheval entre l'analyse, l'algèbre et la géométrie.
Les applications de la trigonométrie sont immenses. En effet, elle est utilisée en astronomie avec la technique de triangulation, qui permet de mesurer la distance entre les étoiles. Elle intervient aussi en statistique, en économie, en biologie, en médecine, en physique, en géographie, en météorologie, etc.

OBJECTIFS

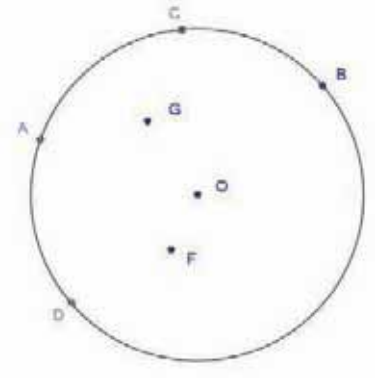
- Mobiliser les connaissances sur les angles et la trigonométrie pour résoudre des problèmes .
- Connaître les notions élémentaires de trigonométrie (angle orienté, cercle trigonométrique, les lignes trigonométriques des angles).
- Utiliser les angles et la trigonométrie dans des situations de communication appropriées.

RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES ANGLES

Angle inscrit – angle au centre

Activité

a)- Dans la figure ci-contre C est un cercle de centre O et A, B, C ,D, G et F des points du plan.
En utilisant ces points indique:
- 3 angles inscrits dans le cercle
- 3 angles au centre
- Les angles suivants sont-ils des angles au centre : $\widehat{AOF}$, $\widehat{AFO}$, $\widehat{ACG}$, $\widehat{GOF}$?
- Les angles suivants sont-ils des angles inscrits dans le cercle :
$\widehat{CAD}$, $\widehat{BCG}$, $\widehat{ACG}$, $\widehat{CGB}$?
- En utilisant uniquement les points de la figure, cite :
  - les angles au centre qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AC}$.
  - les angles inscrits qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{AC}$.



b)- On suppose que $\widehat{AOB} = 120°$ et $\widehat{ACD} = 30°$.
Détermine les angles $\widehat{ADB}$, $\widehat{ACD}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DBA}$.

Retiens :

- Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre de ce cercle.
- Un angle est dit inscrit dans un cercle si son sommet appartient au cercle et ses deux côtés recoupent le cercle.
Dans le cas où le sommet est sur le cercle, l'un des côtés recoupe le cercle et l'autre est tangent au cercle, on dit aussi que l'angle est inscrit au cercle.
- L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Quadrilatère inscriptible

a)- Activité

Soit C un cercle de centre O. ABCD est un quadrilatère non croisé (convexe) dont les sommets appartiennent au cercle ; un tel quadrilatère est alors dit inscrit au cercle C .

1°) Montre que l'angle $\widehat{ABC}$ et l'angle $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires. Qu'en déduis-tu pour les deux autres angles du quadrilatère ? Conclus.

2°)

a) Construis un quadrilatère convexe IJKL tel que $\widehat{IJK}$ et $\widehat{ILK}$ soient supplémentaires.

b) Construis le cercle circonscrit au triangle IJK puis vérifie que L appartient à ce cercle.

c) Quelle conjecture peux-tu faire ?

Solution

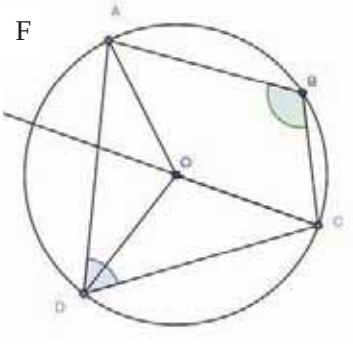
1°) Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont inscrits au cercle et interceptent des arcs dont la réunion est égale au cercle.

Deux cas peuvent se présenter :

- Ces deux angles sont des angles droits dans ce cas ils sont alors supplémentaires.
- L'un des angles est aigu et l'autre obtus. On peut supposer que $\hat{B}$ est obtus et $\hat{D}$ est aigu comme indiqué sur la figure. L'angle inscrit $\widehat{ADC}$ intercepte l'arc $\widehat{AC}$ qui contient B donc $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

Soit F le point diamétralement opposé à C sur le cercle.

L'angle inscrit $\widehat{ABC} = \widehat{ABF} + \widehat{FBC}$. L'angle $\widehat{ABF}$ est un angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOF}$ donc $\widehat{ABF} = \frac{1}{2}\widehat{AOF}$. De même l'angle $\widehat{FBC}$ est un angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{FOC}$ qui est un angle plat donc $\widehat{FBC} = \frac{\pi}{2}$.



Par suite $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} + \frac{1}{2}\widehat{AOF} + \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{AOC} + \widehat{AOF}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{FOC} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi$$

Les angles $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{ADC}$ sont donc supplémentaires.

On en déduit que les angles $\widehat{BAD}$ *et* $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires puisque la somme des 4 angles d'un quadrilatère convexe est égale à 2π.

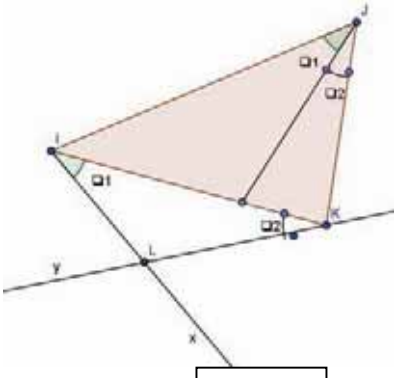
2°)- construction du quadrilatère IJKL°

Etape 1

a)- Construisons un triangle IJK et traçons une demi-droite d'origine J partageant l'angle $\widehat{IJK}$ en deux angles non nuls θ_1 et θ_2.

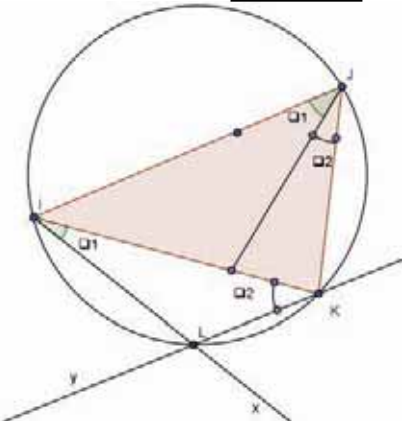
Etape 2

- Dans le demi-plan de frontière (IK) ne contenant pas J, construisons
les demi-droites [I*x*) et [K*y*) telles que $\widehat{xIK} = \theta_1$ et $\widehat{yKI} = \theta_2$.
Les supports de ces deux demi-droites sont sécants.
Puisque s'ils étaient
strictement parallèles l'angle $\widehat{yKz}$ à [K*z*) étant la demi-droite de (IK) ne contenant pas I, serait égal à θ_1.
On aurait alors :
$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \widehat{yKz} + \widehat{IKy} = \pi$.



Etape 3

Appelons L le point d'intersection des supports des deux demi-droites ; nous admettons que L est dans le demi-plan de frontière (IK) ne contenant pas J.
IJKL est alors un quadrilatère convexe et on a :
$\widehat{IJK} + \widehat{ILK} = (\theta_1 + \theta_2) + \widehat{ILK} = \pi$ (Somme des angles du triangle IKL). On en déduit que les deux autres angles opposés sont supplémentaires.



b)- Construction du cercle circonscrit au triangle IJK
Construisons les médiatrices respectives des segments [IJ] et [JK] ; leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.

Nous constatons que L appartient à ce cercle.

c)- Conjecture

Quand un quadrilatère non croisé a ses angles opposés supplémentaires, il est inscriptible dans un cercle.

NB : Cette conjecture est en fait vraie ; nous l'admettons ici. Elle pourra être démontrée en classe de terminale S_1.

Retiens

- Un quadrilatère est dit inscriptible (dans un cercle) s'il existe un cercle qui contient ses trois sommets.
- Si un quadrilatère non croisé est inscrit dans un cercle, alors ses angles opposés sont supplémentaires.
- Si un quadrilatère convexe non croisé a ses angles opposés supplémentaires, alors il est inscriptible dans un cercle

Application

Exercice1

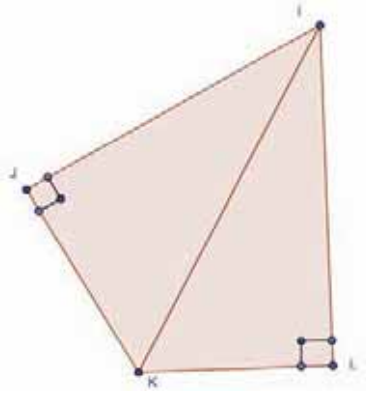
Soit ABCD un trapèze isocèle, montre que ABCD est inscriptible.

Solution

Soient [AD] et [BC] les bases de ce trapèze. On sait que $\hat{A} = \hat{D}$ et que $\hat{D} = \widehat{BCx}$ (angles correspondants). Comme $\widehat{BCx}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires, il en est de même de $\hat{A}$ et $\widehat{BCD}$. Par suite, ABCD est inscriptible dans un cercle.

Exercice2

IJKL est un quadrilatère tel que $\hat{J} = \hat{L} = \frac{\pi}{2}$. Montre que IJKL est inscriptible dans un cercle. Quel est le centre de ce cercle ?



Solution

Faisons une figure.

$\hat{J} + \hat{L} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Le quadrilatère IJKL est alors inscriptible.

Son cercle circonscrit a pour centre le milieu de [IK]

Point Méthode

Permet de démontrer :

- qu'un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle, il suffit de prouver que deux de ses angles opposés sont supplémentaires ;
- qu'un point appartient à un cercle , il suffit de prouver qu'il est cocyclique à trois points deux à deux distincts de ce cercle.
- Deux angles sont supplémentaires, il suffit de montrer qu'ils sont respectivement égaux à deux angles opposés d'un quadrilatère inscriptible.

Le radian

Définition

Activité

1°) Sur du papier cartonné trace un cercle de rayon r et de centre O ;
2°) Découpe un fil de longueur r
3°) En utilisant ce fil, construis un angle au centre intercep tant un arc de longueur r
4°) En prenant cet angle $\hat{a}$ comme unité, donne un encadrement de la mesure de l'angle plat, d'un angle de 60°, de 150°.

Solution

Les questions 1°) , 2°) et 3°) relèvent d'une manipulation simp le. Pour la troisième question, il faudra poser correctement, sur le cercle, le fil de longueur r découpé à la deuxième question.
Pour la question 4°), on trace un diamètre [AB] du cercle, on construit un angle $\widehat{AOM_1}$ égal à $\hat{a}$; puis un angle $\widehat{M1OM2}$ égal à $3\hat{a}$, M_2 et A étant situés de part et d'autre de (O M_1), ainsi de suite.
On vérifie aisément que l'angle plat $\widehat{AOB}$ est compris entre $3\hat{a}$ et $4\hat{a}$. En affinant par le tracé de bissectrices on vérifie aisément que l'angle plat $\widehat{AOB}$ est compris entre $3\hat{a}$ et $3,25\hat{a}$.
En procèdent de façon analogue on vérifie que l'angle de 60° est compris entre $\hat{a}$ et $1,25\hat{a}$ et l'angle 150° est compris entre $2,5\hat{a}$ et $2,75\hat{a}$.

Retiens

- **Définition** : L'angle $\hat{a}$ qui intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle est appelé radian, en le prenant comme unité de mesure d'angle, il est symbolisé par « rad ».
- La mesure de l'angle plat selon cette unité est le nombre π.
- C'est-à-dire : 180° = 200gr = π rad
- $3,14 < \pi < 3,15$

Conversions

La mesure en degré d'un angle est proportionnelle à sa mesure en radians ; la conversion des mesures se fait donc par règle de trois.

- Passage des degrés aux radians

Soit α la mesure en degré d'un angle **;** cherchons sa mesure β en radians.

$\beta = \frac{\pi\alpha}{180}$ rad.

- Passage des radians aux degrés

Soit β la mesure en radians d'un angle **;** cherchons sa mesure α en degré.

$\alpha = \left(\frac{180\ \beta}{\pi}\right)^{\circ}$

Application

- Trouve la mesure y en radian d'un angle de 75°, de 120°, d e 15° puis de 80°.
- Trouve la mesure x en degré d'un angle de 2,48 rad, de 1,5 rad, puis de 0,5 rad.

Longueur d'un arc de cercle de rayon r

Activité

La longueur d'un cercle de rayon r est égale à $2\pi r$. Justifie que :

- la longueur d'un demi-cercle est égale à πr ;

- la longueur d'un quart de cercle est égale à $\frac{\pi}{2}$ r ;

Tu sais qu'un demi-cercle et un quart de cercle sont respectivement interceptés par des angles au centre de mesures π rad et $\frac{\pi}{2}$ rad. Ainsi tu vois que la longueur de ces arcs est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui les intercepte. Nous admettons de façon générale que la longueur d'un arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte

- Quelle est alors la longueur d'un arc de cercle intercepté par un angle de $\frac{\pi}{5}$ rad ?
- Quelle est alors la longueur d'un arc de cercle intercepté par un angle de α rad ?
- Retrouve la formule vue en classe de quatrième, donnant la longueur d'un arc de cercle en fonction de la mesure en degrés de l'angle au centre qui l'intercepte

Retiens

- La longueur d'un arc de cercle de rayon r intercepté par un angle au centre de mesure α radians est égale à rα

- La longueur d'un arc de cercle de rayon r intercepté par un angle au centre de mesure β degrés est égale à $\frac{2\pi r\ \beta}{360}$

Application

Exercice1

Complète le tableau suivant dans lequel L désigne la longueur d'un arc de cercle de rayon r intercepté par un angle au centre de mesure α rad :

L(cm)	…	…	…	$\frac{9\pi}{2}$	7,5	2,5 π
r (cm)	4	12	1	6	…	…
α (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	…	3,75	$\frac{\pi}{3}$

Exercice 2:

Sur un cercle de centre O et de rayon 4 cm un arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ mesure 6,4 cm.

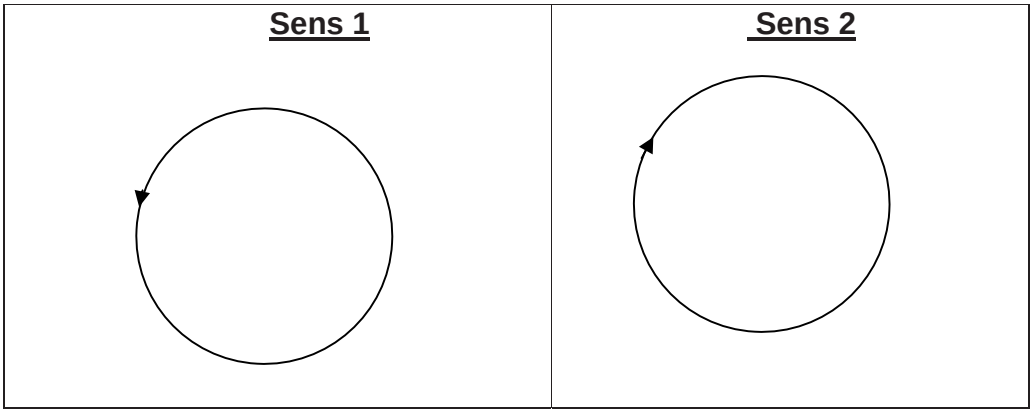
Détermine la mesure en radian et en degré de l'angle $\widehat{AOB}$.

ORIENTATION DU PLAN

Orientation

a) **Orientation du cercle**

Sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours,le sens indiqué par la figure1 et celui indiqué par la figure 2.



Orienter le cercle c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours et décider qu'il est le sens direct, l'autre est alors le sens indirect.

Le cas échéant le cercle est dit orienté.

b) Orientation du plan

Orienter le plan, c'est convenir de l'orientation de tous les cercles dans le même sens. Ce sens est appelé sens direct (ou sens positif, ou sens trigonométrique).
Le sens contraire de l'orientation choisie est appelé sens négatif, sens indirect ou sens rétrograde.
Généralement le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre. Dans la suite, sauf avis contraire, ce sens est pris pour sens direct (sens 1).

Remarque
Un triangle ABC du plan orienté est dit direct si, en le parcourant de A à C en passant par B, le mouvement se fait dans le sens direct.

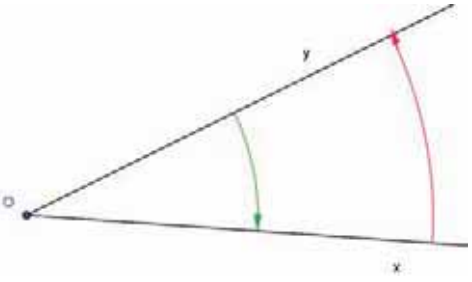
Angle orienté de deux demi-droites de même origine

Définition

Soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites de même origine. Elles déterminent deux angles orientés de demi-droites :
L'angle orienté de demi-droites ([Ox), [Oy)), noté $(\widehat{Ox,Oy})$; O est son sommet, [Ox) est la demi-droite origine et[Oy)la demi-droite extrémité.
- L'angle orienté de demi-droites ([Oy), [Ox)), noté $(\widehat{Oy,Ox})$; O est son sommet, [Oy) est la demi-droite origine et [Ox) la demi-droite extrémité.
- Si [Ox)= [Oy) (les demi-droites sont confondues), l'angle orienté de demi-droite est dit angle orienté nul.
- Si [Ox) et [Oy) sont opposées, l'angle $(\widehat{Ox,Oy})$ est égal à l'angle $(\widehat{Oy,Ox})$ est appelé angle plat.

Représentation

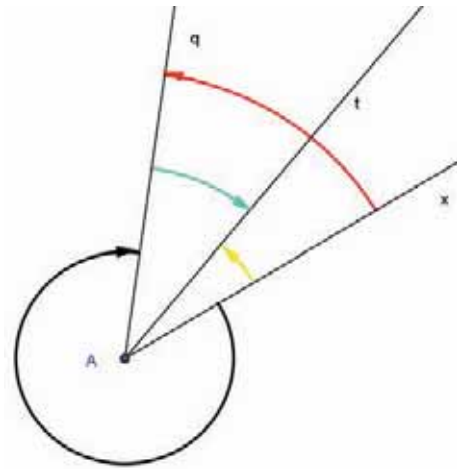
Pour distinguer les angles $(\widehat{Ox,Oy})$ et $(\widehat{Oy,Ox})$ sur une figure, on dessine une flèche en forme d'arc dont l'origine indique le demi-droite origine et l'extrémité, la demi-droite extrémité.



Ainsi sur la figure ci-dessus, les demi-droites [Ox) et [Oy), et la flèche rouge constituent la représentation de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$; les deux demi-droites et la flèche verte constituent la représentation de l'angle $(\widehat{Oy,Ox})$.

Application

Exercice 1[Ox) , [Ot) et [Oz) sont trois demi-droites de même origine deux à deux distinctes. Représente sur une même figure les angles orientés(Oy, Ot), (Oz, Ot) et (Oz, Oy) .

Exercice 2 Sur la figure ci-contre sont représentés des angles orientés de demi-droites. Nomme et note chacun de ces angles.	

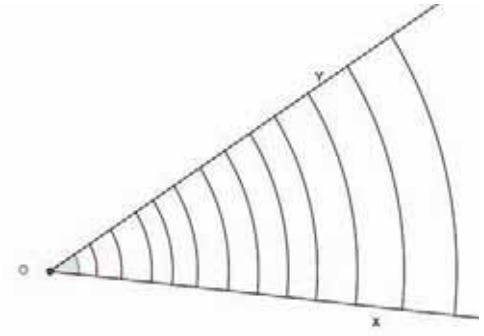
Exercice 3

a) Trace un triangle ABC.

b) Nomme, note et représente les angles orientés de demi-droites non nuls et non plats, dont les côtés ont pour supports les côtés du triangle.

Mesure principale

On considère dans le plan orienté un angle orienté $(\widehat{Ox, Oy})$ de demi-droites non nul et non plat.
$x\widehat{O}y$ est l'angle géométrique défini par ces deux demi-droites ; sa mesure en radian est strictement comprise entre 0 et π.
Le secteur saillant défini par ces demi-droites est la partie du plan qu'elles délimitent ; c'est la partie hachurée sur la figure ci-contre.



Nous allons définir la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox, Oy})$ en utilisant la mesure de l'angle géométrique $x\widehat{O}y$.

Manipulation

- Représente l'angle orienté$(\widehat{Ox,Oy})$.

- Ferme ton compas et pose le sur la demi-droite origine [Ox) de sorte que le sommet du compas soit sur le sommet O de l'angle.

- Maintiens l'une des branches du compas sur [Ox) et écarte l'autre branche pour la mettre sur la demi-droite [oy), extrémité de l'angle, de sorte que le déplacement s'effectue dans le secteur saillant x,O,y.

Définition

Deux situations seulement peuvent se présenter :

- Le sens du mouvement de cette branche du compas est le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). On dit, dans ce cas, que la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$ est égale à la mesure de l'angle géométrique $\widehat{xOy}$; si l'unité est le radian, elle est alors positive et comprise strictement entre 0 et π.

- Ou bien le sens du mouvement est le sens indirect (sens de marche des aiguilles d'une montre). On dit, dans ce cas, que la mesure principale de l'angle orienté est l'opposé de la mesure de l'angle géométrique $\widehat{xOy}$; elle est alors négative et comprise strictement entre $-\pi$ et 0, dans le cas où l'unité est le radian.

Remarques

- Dans la pratique, ce mouvement du compas est imaginé ou est simulé avec des doigts de la main.

- On convient que l'angle plat a pour mesure principale π et l'angle nul pour mesure principale 0.

- L'unité étant le radian, la mesure principale d'un angle orienté de demi-droites est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

- Deux angles orientés de demi-droites sont dits égaux s'ils ont la même mesure principale.

Exemple

ABC est triangle direct, rectangle en A et isocèle du plan orienté.

- La mesure principale de l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{AB,AC})$ est $\frac{\pi}{2}$.
- La mesure principale de l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{BA,BC})$ est $-\frac{\pi}{4}$.
- La mesure principale de l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{CA,CB})$ est $\frac{\pi}{4}$

Application

ABC est triangle équilatéral direct du plan orienté. H est son centre de gravité et A' est le milieu de [BC].

En utilisant seulement les points A, B, C, H et A', note tous les angles orientés de demi-droites non nuls et non plats et détermine la mesure principale de chacun d'eux. Indique les angles qui sont égaux.

Remarque

Etant donnés un nombre réel α. de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et une demi-droite [OX), il existe une seule demi-droite [OY) telle que la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$ soit égale à α.

Application

On considère dans le plan orienté une demi-droite [Ot).

Construis les demi-droites [Ox), [Oh) et [Oy) telles que : les mesures principales respectives des angles orientés $(\widehat{Ot,Oy})$, $(\widehat{Ox,Oy})$ et $(\widehat{Ot,Oh})$ soient $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{2}$

Angle de deux vecteurs

Angle orienté de deux vecteurs

Activité

1. Représente deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Construis six points O, A, B, O', A' et B' du plan orienté tels que :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{O'A'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{O'B'}= \vec{v}$.

3. En utilisant le compas, compare les angles orientés de demi-droites

   $(\widehat{OA,OB})$ et $(\widehat{O'A',O'B'})$.

Conclusion : Nous admettons que l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; c'est-à-dire qu'en prenant d'autres points O', A' et B' tels que $\overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$, nous avons : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'}})$.

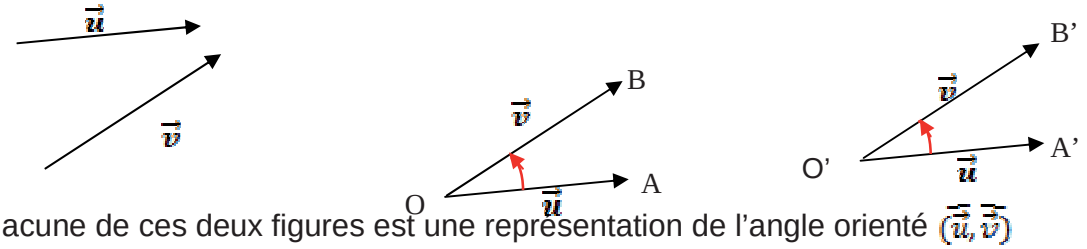
Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls. O, A et B sont trois points tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

- On appelle angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, l'angle noté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ qu'on lit « *angle orienté* $\vec{u}$, $\vec{v}$ » et qui est défini par : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

- L'angle orienté de demi-droites $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est dit associé à l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors l'angle orienté devient $(\widehat{\vec{u},\vec{u}})$ ou encore $(\widehat{\vec{v},\vec{v}})$; il est dit angle orienté nul, de vecteurs.
- Si $-\vec{u} = \vec{v}$ alors l'angle orienté de vecteurs devient $(\widehat{\vec{u},-\vec{u}})$ ou encore $(\widehat{-\vec{u},\vec{u}})$; il est dit angle orienté plat de vecteurs.

Représentation
La représentation est celle d'un angle orienté de demi-droites, avec la possibilité de prendre n'importe quel point comme sommet.



Chacune de ces deux figures est une représentation de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Application

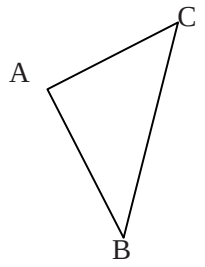
A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan. Représente l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ en prenant successivement pour sommet A, B, C.

Mesure principale

Définitions

- La mesure principale d'un angle orienté de vecteurs est celle de l'angle orienté de demi-droites qui lui est associé.
- Deux angles orientés de vecteurs sont dits égaux s'ils ont la même mesure principale.
- Dans le plan orienté , on dit qu'un repère orthonormal (O, I,J) est direct si : l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$

Exemple
On considère, dans le plan orienté, un triangle direct ABC, rectangle en A et isocèle.
On a :

• la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est $\frac{\pi}{2}$. Le repère (A,B,C) est alors un repère orthogonal direct. • la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ (est - $\frac{\pi}{4}$ • la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est $\frac{\pi}{4}$	

Application

Exercice 1
Reprends l'exemple ci-dessus et donne la mesure principale de tous les autres angles orientés de vecteurs non nuls et non plats que l'on peut former en utilisant seulement les points A, B et C.

Exercice 2
ABC est triangle équilatéral direct du plan orienté. H est son centre de gravité et A' est le milieu de [BC].
En utilisant seulement les points A, B, C, H et A', note tous les angles orientés de vecteurs non nuls et non plats et détermine la mesure principale de chacun d'eux.
Indique les angles qui sont égaux.

Remarque

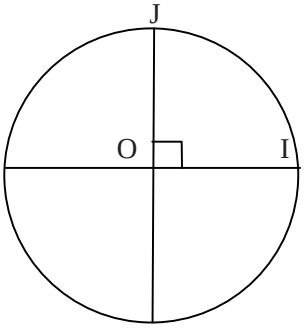
Etant donnés un nombre réel α de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et un vecteur non nul $\vec{u}$, il existe un seul vecteur non nul $\vec{v}$ tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ soit égale à α.

TRIGONOMETRIE

Cercle trigonométrique

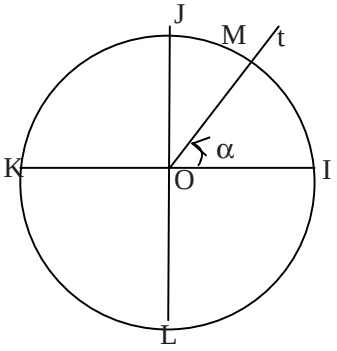
Définition

Le plan orienté étant muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) ; on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.



Activité

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.



1. Justifie qu'il existe une demi-droite d'origine O et une seule [Ot) telle que α soit la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{Ot}})$.
2. Montre qu'il existe un point M et un seul du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ ait pour mesure principale α.

Retiens

- Il existe ainsi une bijection de $]-\pi;\pi]$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

- Le point M du cercle trigonométrique, tel que α soit le mesure principale, en radians, de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$, est appelé image de α.

Exemple

I est l'image de 0, J est l'image de $\frac{\pi}{2}$, K est l'image de π et L est l'image de $-\frac{\pi}{2}$.

Application

Exercice 1

1) Sur un repère orthonormé direct (O, I, J), construis le cercle trigonométrique puis place l'image de chacun des réels , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4}$

Exercice 2

Sur la figure de l'activité précédente, le point M est l'image du réel α, place les images des réels $-\alpha$; $\pi + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $\pi - \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Sinus et cosinus d'un angle orienté

Définition

Activité

1) Construis dans le repère orthonormé direct (O, I, J) le cercle trigonométrique (C) puis place les points A, B, A' et B' images respectives des réels 0 ; $\frac{\pi}{2}$; π ; et $-\frac{\pi}{2}$
2) Place un point M sur l'arc $\widehat{AB}$ et soit P son projeté orthogonal sur (OA) et Q son projeté orthogonal sur (OB).
3) Calcule : $\cos(\widehat{AOM})$ et $\sin(\widehat{AOM})$

Solution

$\cos(\widehat{AOM}) = \frac{OP}{OM}$ or OM = 1 donc $\cos(\widehat{AOM}) = OP = x_M$

De même $\sin(\widehat{AOM}) = \frac{OM}{OP} = OQ = y_M$

En s'inspirant de ce résultat on définit le cosinus et le sinus de la mesure principale d'un angle orienté ; c'est à dire de nombres appartenant à l'intervalle$]-\pi ; +\pi]$.

Retiens

Un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de même principale α étant donné, soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique ; P et Q le projetés orthogonaux de M respectivement sur (AA') et (BB'), le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de sa mesure principale α sont définies par :

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \cos(\alpha) = \overline{OP} = x_M$ et $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \sin(\alpha) = \overline{OQ} = y_M$

Autrement dit, dans le repère (O, I, J), M $\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.

Exemple

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$; $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$;

$\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Propriétés

Pour tout réel α de l'intervalle]- π , π]

$-1 < \cos\alpha \leq 1$ $\quad$ $-1 < \sin\alpha \leq 1$ $\quad$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Preuve

- Si M est un point du cercle trigonométrique et α son image alors
  $-1 \leq x_M \leq 1$ et $-1 \leq y_M \leq 1$
  D'où $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
  $OM^2 = x_M^2 + y_M^2$ et $OM = 1$ d'où $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- Si M est l'image de α et M' celle de $-\alpha$ alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses du repère (O, I, J)
  donc $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Etude du signe du sinus et du cosinus d'angles orientés

Activité

Soit α un réel appartenant à]-π ; +π]. En t'aidant du cercle trigonométrique détermine:

a. Le signe de cos α suivant la position de α dans cet intervalle.

b. Le signe de sin α suivant la position de α dans cet intervalle.

Retiens

α	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\alpha$		-	0	+		+	0	-	
$\sin\alpha$	0	-		-	0	+		+	0

Application

α étant la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})$ colorie l'arc du cercle trigonométrique correspondant à l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

1. $\sin\alpha > \frac{1}{2}$ 2. $\cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$ 3. $\begin{cases} \cos\alpha \geq \frac{1}{2} \\ \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \sin\alpha < -\frac{1}{2} \end{cases}$

Relations entre cosinus et sinus d'angles associés

Activité

En t'aidant du cercle trigonométrique, complète les égalités suivants par : $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $-\cos\alpha$ ou $-\sin\alpha$

- $\cos(-\alpha)$ = … … ; $\sin(-\alpha)$ = …
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ = …. ; $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ = ….
-
- $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ = … …. ; $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ = … ….
- $\cos(\pi - \alpha)$ = … …. ; $\sin(\pi - \alpha$ = … ….
- $\cos(\pi + \alpha)$ = … ; $\sin(\pi + \alpha)$ = … …

Retiens

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha = \sin\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

Tangente d'un angle orienté

Définition

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ non droit de mesure principale α ; la tangente de cet angle ou tangente de sa mesure principale α est égale à $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

On note $\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Remarque : La tangente de $\frac{\pi}{2}$ n'existe pas puisque Cos Sin$\frac{\pi}{2}$ =0.

Exemple : tanπ = 0 ; tan0 = 0 ; tan $\frac{\pi}{4}$ = 1 ; tan$\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCICES ET PROBLEMES

Unités de mesure d'angle; passage d'une unité a une autre

Exercice 1

$\widehat{xOy}$ est un angle. Dans chacun des cas suivants, donne la valeur de $\widehat{xOy}$ en utilisant les deux autres unités d'angle : **a**) $\widehat{xOy}$ = 30° ; $\widehat{xOy}$ = 45° ; $\widehat{xOy}$ = 180°

b) $\widehat{xOy}$=$\frac{\pi}{4}$ rd ; $\widehat{xOy}$ =$\frac{\pi}{3}$ rd ; $\widehat{xOy}$ =π rd ; **c**) $\widehat{xOy}$ = 50 gr ; $\widehat{xOy}$= 50gr ; $\widehat{xOy}$ = 0gr.

Exercice 2

Les informations suivantes sont-elle vraies ou fausses ?

a) 60°= $\frac{\pi}{3}$ rd ; b) 150gr =π rd ; c) 100 gr = 90° ; d) $\frac{\pi}{6}$ rd = 30°= 50 gr .

Exercice 3

1) Convertis en radians (le nombre cherché sera donné sous la forme $\frac{a}{b}\pi$ ou a et b sont des nombres entiers) : 345° ; 72° ; 21° ; 1575° ; 150°.

2) Convertis en degrés $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}$

Mesures d'angles et constructions géométriques

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, construis l'angle $\widehat{xOy}$ de mesure α sans utiliser le rapporteur (précise ton programme de construction): a) α = 60° ; b) α = 30° ;

c) α = 15° ; d) α = 22,5° ; e) α = $\frac{\pi}{16}$ rd.

Exercice 5

(C) est un cercle de centre O et de rayon 4cm. A est un point de (C).Construis un point B de (C) tel que la longueur de l'arc d'extrémités A et B ait pour mesure l dans chacun des cas suivants :

a) l = π cm ; b) l = $\frac{2}{3}\pi$ cm ; c) l = $\frac{4}{3}\pi$ cm ; d) l = $\frac{\pi}{2}$ cm.

Exercice 6

Représente l'angle $(\widehat{Ox;Oy})$ de mesure principale α en radian dans chacun des cas suivants : a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; c) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; d) $\alpha = -\frac{\pi}{8}$; e) $\alpha = 0$; f) $\alpha = \pi$.

Exercice 7

Dans le plan orienté, on considère un cercle trigonométrique (C) de centre O. A est un point fixé de ce cercle.

Place le point M de (C) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}})$ ait pour mesure principale α dans chacun des cas suivants : a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; c) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; d) $\alpha = -\frac{\pi}{8}$; e) $\alpha = 0$;

f) $\alpha = \pi$; g) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; h) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; i) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; j) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; k) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Soient A et B deux points du cercle (C) tels que mes$(\widehat{AOB})$ = 60°.

a) Construis les points A et B . b) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en radians ?

c) Calcule la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

Exercice 9

Soit [0x) une demi droite d'origine O . Construis dans chaque cas la demi droite [Oy) telle que $(\widehat{Ox\,;Oy}) = \alpha$ avec : **a)** $\alpha = \frac{2}{5}\pi$; **b)** $\alpha = \frac{1}{5}\pi$;

c) $\alpha = -\frac{5}{6}\pi$; **d)** $\alpha = 150°$; **e)** $\alpha = -14$; **f)** $\alpha = 120°$.

Calcul de longueurs d'arcs et de cordes

Exercice 10

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 5 cm. A , B et C sont trois points du cercle tels que : $\widehat{AOB}$ = 60° et $\widehat{BOC}$ = 30°. On appelle A' le point diamétralement opposé à A.

1) Fais une figure pour chacune des dispositions possible des points A, B , C et A'.

2) Pour chacune de ces dispositions, calcule les longueurs des arcs :

$\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AA'}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{CA'}$.

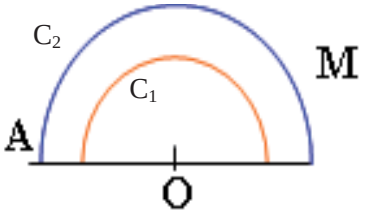
3) Calcule AB et BA'.

Exercice 11
Construis un hexagone ABCDEF régulier inscrit dans un cercle (C) de centre O.
Détermine les angles $\widehat{FAE}$ $\widehat{EAB}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BEC}$.

Exercice 12
ABCD est un carré de centre O ; (C) est le cercle de centre O et de rayon OA.
AEF est un triangle équilatéral inscrit dans (C) tel que F appartient à l'arc $\widehat{BC}$.
1) Montre que (AC) est axe de symétrie de AEF ;
2) Calcule : $\widehat{FAB}$, $\widehat{ABE}$; $\widehat{AEB}$.
3) En supposant que le cercle a pour rayon 6cm, calcule la longueur de chacun des arcs $\widehat{AB}$ $\widehat{AC}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{EB}$.

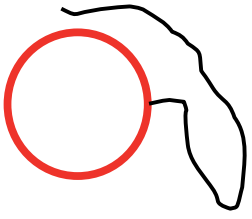
Exercice 13

Dans la figure ci-contre, sont représentés deux demi- cercles (C_1) et (C_2) de même centre O et de rayons respectifs R et $\frac{4}{3}$R.



Donne un programme de construction permettant de déterminer le point M du demi- cerce (C_2) tel que la longueur de l'arc d'extrémités A et M soit égale à la longueur du demi cercle (C_1).

Exercice 14
Un fil est fixé par un ruban adhésif à une de ses extrémités à un cerceau de rayon R (voir figure ci-contre). La longueur du fil est 6 fois le rayon du cerceau.
En enroulant ce fil sur le cerceau, pourra t-on faire un tour complet ? Justifie ta réponse.



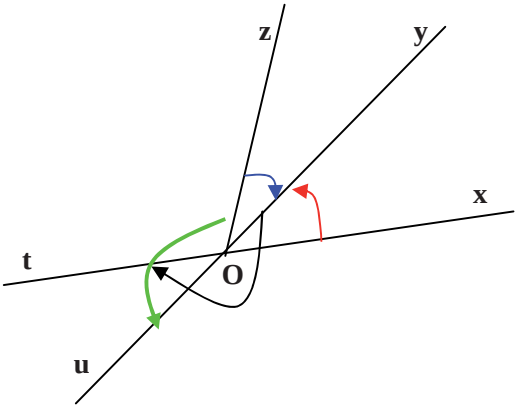
Exercice 15
L'aiguille des minutes d'une horloge mesure 10 cm. Au bout de 3h40mn30s de marche, quelle distance parcourt son extrémité indiquant les minutes ?

Exercice16
1) Trace sur trois cercles concentriques de centre O de rayons 1 cm , 4 cm et 5 cm les arcs nommés respectivement $\widehat{BA}$, $\widehat{CD}$ et $\widehat{EF}$ interceptés par le même angle au centre $\frac{3\pi}{4}$rad.
2) Calcule la longueur de chacun de ces arcs.

Utilisation de figures géométriques

Exercice 17

Nomme et note chacun des quatre angles représentés sur la figure ci-contre.

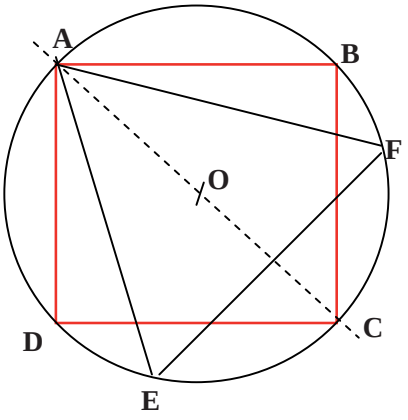


Exercice 18

ABCD est un carré de centre O ; (C) est le cercle de centre O et de rayon OA.

AEF est un triangle équilatéral inscrit dans (C) tel que F appartient au petit arc d'extrémités B et C.

1) Ecris quatre angles orientés de vecteurs en utilisant des points de la figure.



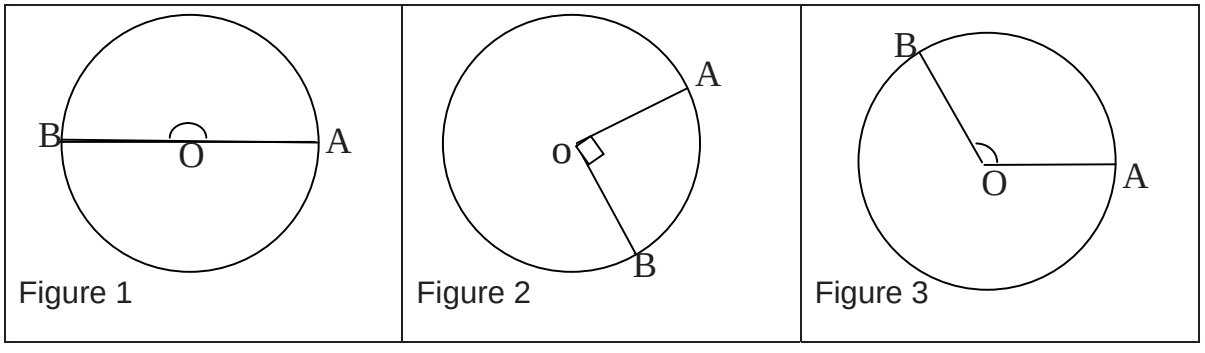
2) Donne la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CO})$; $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AF})$; $(\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{AD})$;

$(\overrightarrow{OF} ; \overrightarrow{OE})$; $(\overrightarrow{FE} ; \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{DA})$; ([OB), [OE)) ; ([CA), [CF)).

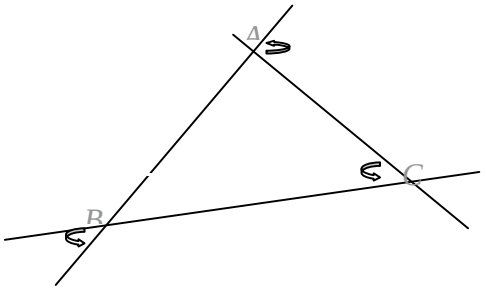
Exercice 19

Donne la mesure en radians de chacun des angles géométriques représentés ci-dessous : (Sur la figure 3 la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est le double du rayon.)



Exercice 20

Nommer les angles orientés codés sur la figure ci-contre.

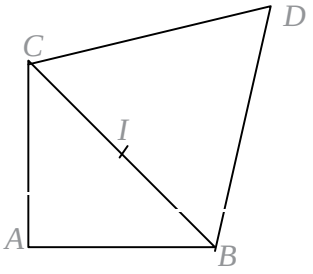


Exercice 21

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A. BCD est un triangle équilatéral. I est le milieu de [BC].

Donne la mesure principale en radians des angles orientés cités ci-dessous.

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$; b) $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$



c) $(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CD}})$ **d)** $(\widehat{\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DB}})$ **e)** $(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}})$ **f)** $(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}})$

Détermination de la mesure principale d'un angle

Exercice 22

Dans le plan orienté, on considère le cercle trigonométrique de centre O. A et A' sont deux points de **(** $\mathscr{C}$ **)** diamétralement opposés. On considère $\overrightarrow{OA}$ comme vecteur origine pour repérer les angles. Soit B le point de **(** $\mathscr{C}$ **)** tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$; B' est le point diamétralement opposé à B.

C est le point de l'arc $\widehat{AB}$ telle que la mesure de la longueur de l'arc $\widehat{AC}$ soit $\frac{\pi}{3}$ selon l'unité choisie ; C' est le point de ($\mathscr{C}$) diamétralement opposé à C. Soit E le point de l'arc $\widehat{A'B}$ tel que la mesure de la longueur de $\widehat{A'E}$ soit $\frac{\pi}{3}$.

1) Donne les différentes mesures principales l'angle $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM})$ quand M décrit l'ensemble { C, C', E, E', A', B'}.

2) α étant la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ colorie l'arc correspondant à l'ensemble des point M dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha \in [0\ ;\ \frac{\pi}{3}]$; b) $\alpha \in [0\ ;\ \frac{2\pi}{3}]$; c) $\alpha \in [\frac{\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3}]$;

d) $\alpha \in]-\pi\ ;-\frac{\pi}{3}]$; e) $\alpha \in [\frac{2\pi}{3};\ \pi] \cup]-\pi\ ;-\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 23

L'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.

Quelles sont les mesures des angles orientés $(-\vec{u}\ ;\ \vec{v})$; $(\vec{u}\ ;\ -\vec{v})$ et $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v})$

(Il est conseillé de faire une figure)

Exercice 24

Un trapèze ABCD est rectangle en A et D .On donne : AB = 30 cm ; CD = 18 cm et BC =20 cm .

1) Calcule les mesures en degrés des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$.

2) Calcule les mesures des angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ADB}$.

3) Calcule les longueurs des diagonales [AC] et [BD] .

Lignes trigonométriques d'un angle ; formules trigonométriques

Exercice 25

1) ABC est un triangle équilatéral. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
Calcule les lignes trigonométriques (sin, cos et tan) de 60°, 30°.

2) Calcule les lignes trigonométriques de 45° en t'appuyant sur un triangle judicieusement choisi.

3) Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) on considère le cercle trigonométrique de centre O.

a) Place sur (C) les points images respectives des angles de mesure principales :

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, π.

b) Détermine les lignes trigonométriques de ces angles.

Exercice 26

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) on considère le cercle trigonométrique (**C**) de centre O. A' et B' sont les points de (**C**) diamétralement opposés respectivement à A et B.

Soit $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$ et M le point image de x sur (**C**).

1) Détermine les signes des lignes trigonométriques de x, sans calcul, dans les cas suivants : M$\in \widehat{AB}$; M$\in \widehat{BA'}$; M$\in \widehat{A'B'}$; M$\in \widehat{B'A}$.

2) Détermine le plus petit sous ensemble (arc ou réunion d'arcs) de (C) où se trouve le point M dans les cas suivants (faire une figure pour chaque cas):

a) cos x $\in$ [0 ; $\frac{1}{2}$] ; b) cos x $\in$ [$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$] ; c) cos x $\leq -\frac{1}{2}$; d) cos x $\geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) sin x $\in$ [0; $\frac{\sqrt{3}}{2}$] ; f) sin x $\in$ [$-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$] g) sin x $\leq -\frac{1}{2}$; h) sin x $\geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 27

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) on considère le cercle trigonométrique de centre O. x est un réel appartenant à]0 ; π [

a) En t'appuyant sur le cercle trigonométrique, retrouve les formules donnant les lignes trigonométriques de – x en fonction de celles de x. (On distinguera les cas : x $\in$]0 ; $\frac{\pi}{2}$ [; x $\in$]$\frac{\pi}{2}$; π [et x = $\frac{\pi}{2}$). Ces formules sont-elles vérifiées pour 0 ?

b) Déduis-en les lignes trigonométriques de : $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

(Tu pourras utiliser les résultats de la question 3) b) de l'exercice 25).

Exercice 28

Dans le plan on considère un cercle de centre O et de rayon 1. A et B sont deux points de ce cercle tels que (OA) et (OB) perpendiculaires. Soit A' le symétrique de A par rapport à O ; I est un point du petit arc d'extrémités A et B, distinct de A et de B. On pose x = $\widehat{AOI}$.

Soit I' le projeté orthogonal de I sur (OA) ; J est le symétrique I par rapport à la bissectrice de l'angle . J' est le projeté orthogonale de J sur (OA) et J'' le projeté orthogonal de J sur (OB).

1) Montre que $\widehat{JOB}$ = x. En déduire $\widehat{AOJ}$ en fonction de x.

2) Montre que OI' = OJ'' et II' = OJ'.

3) Soit E un point du plus petit arc d'extrémités B et A', distinct de B et de A'. On pose $\widehat{AOE}$= t. On appelle F le point du plus petit arc d'extrémités A et B tel que :

$\widehat{AOF}$= t - $\frac{\pi}{2}$.

Soient E' et F' les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (OA),
E'' et F'' les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (OB).
Montre que OE' = FF' et OE'' = OF'.

4) Dans le plan orienté muni d'un repère muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ on considère le cercle trigonométrique de centre O.

x est un réel appartenant à $]0 ; \pi[$.

a) En utilisant les résultats des questions précédentes et en t'appuyant sur le cercle trigonométrique, retrouve les formules donnant les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{2} - x$ en fonction de celles de x.

b) Ces formules sont-elles vérifiées pour 0 et $\frac{\pi}{2}$?

5) Rappelle les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{6}$ et en déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{3}$ et de $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 29

Dans le plan on considère un cercle de centre O et de rayon 1. A et B sont deux points de ce cercle tels que (OA) et (OB) perpendiculaires. Soit A' le symétrique de A par rapport à O ; I est le point de l'arc d'extrémités A et A' contenant B.

On pose $x = \widehat{AOI}$.

Soit J le point de cet arc tel $\widehat{AOJ} = \pi - x$. On appelle I' et J' les projetés orthogonaux respectifs de I et J sur (OA).

On note I'' et J'' les projetés orthogonaux respectifs de I et J sur (OB).

1) Montre OI' = OJ'. (Tu distingueras les cas : $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$ et $x = \frac{\pi}{2}$).

2) Montre que J'' = I''.

3) En utilisant ce résultat et en t'appuyant sur le cercle trigonométrique, retrouve les formules donnant les lignes trigonométriques de $\pi - x$ en fonction de celles de x.

Ces formules sont-elles vérifiées pour 0 et pour π ?

4) Rappelle les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$. Calcule les lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 30

Dans le plan orienté muni d'un repère muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ on considère le cercle trigonométrique de centre O.

1) Soit x un réel tel que : $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Montre que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; (indication : Tu pourras t'appuyer sur un triangle rectangle judicieusement choisi).

2) En utilisant ce résultat et les formules sur les angles associés, montre que cette relation est vraie pour $x \in]-\pi ; \pi]$.

(Tu pourras distinguer plusieurs cas : $x \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[$; $x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[$; $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$;

$x = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$).

3) Soit x un réel. Détermine les autres lignes trigonométriques de x dans chacun des cas suivants sans calculer x:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

b) $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$;

c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$;

d) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$;

e) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

f) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$

i) $\cos x = \frac{1}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

j) $\cos x = \frac{1}{2}$ et $x \in]-\pi ; 0[$

k) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

l) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]-\pi ; 0[$

m) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

n) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in]-\pi ; 0[$

Exercice31

1) En utilisant les identités remarquables et la relation fondamentale, montre que, pour tout $x \in]-\pi ; \pi]$, on a :

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$

c) $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x)$

d) $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x\cos x)$

2) Etablis, pour a et b éléments de $]-\pi ; \pi]$, les relations suivantes en utilisant la relation fondamentale:

a) $2 - \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 a + \cos^2 b$

b) $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

Exercice 32

Montre que:

$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x\sin^2 x = 3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 3\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1$.

Exercice 33

On donne $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. Détermine les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 34

1) Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ et $\sin x = \frac{3}{5}$.

Calcule $\cos x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

2) Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\pi ; \frac{3\pi}{2}\right[$ et $\cos x = -\frac{2}{3}$.

Calcule $\sin x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

Exercice 35

On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

a) Montre que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

b) Utilise les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

$\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{3\pi}{10}$; $\cos\frac{3\pi}{10}$; $\sin\frac{7\pi}{10}$; $\cos\frac{7\pi}{10}$.

Exercice 36 (*La relation d'Al Kashi)*

ABC est un triangle quelconque dont les angles sont aigus et tels que AB = c , AC = b , BC = a. Soit H le projeté orthogonal de C sur [AB].

1) Montre que AH = b.cos $\widehat{BAC}$; HC = b.sin $\widehat{BAC}$.

2) En écrivant que BH = c - b.cos $\widehat{BAC}$ et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle BHC , montre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$.

Cette relation est connue sous le nom de ***relation d'Al Kashi.***

3) Ecris deux autres égalités semblables faisant intervenir les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

4) On donne : AC = 3 cm ; AB = 2 cm ; $\widehat{BAC}$ = 60° ; Calcule BC.

Exercice 37

x est un nombre réel. Utilise les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes en fonction de cosx et sinx.

a) $2\sin(4\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $\cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x) + \sin(7\pi + x)$

c) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(7\pi - x)$.

Exercice 38

1) Démontre que pour tout nombre réel x, $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

2) Sachant que : $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ déduis- en sinx et cosx .

Exercice : 39

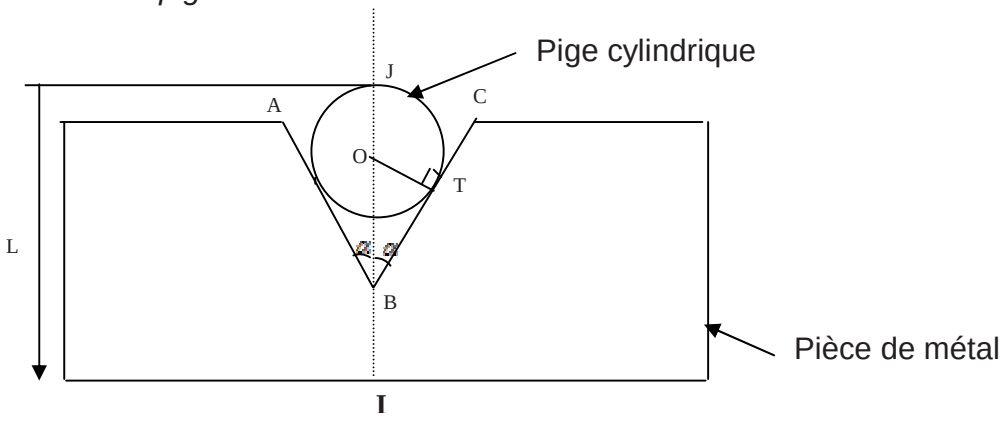
a)Construis un triangle ABC rectangle en A dont l'hypoténuse a pour longueur 8cm tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{8}$.

b)Soit H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu de [BC].

Calcule les mesures des angles du triangle AOH. En déduire la longueur exacte de [OH] , puis celles de [AB] et de [AC].

c) Détermine les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{8}$ et de $\cos\frac{\pi}{8}$.

Exercice 40 *Code sur pige*



Pour calculer la profondeur de l'enraille faite dans une pièce de métal , on dispose d'une pige cylindrique disposée comme l'indique la figure ci contre faite en coupe. Au pied à coulisse , nous pouvons mesurer la longueur IJ notée L . Nous obtenons

- Avec une pige de 20mm de diamètre L= 80mm
- Avec une pige de 30mm de diamètre L= 95mm

a) Démontrer que l'on peut en déduire les deux relations

$$IB + \frac{10}{\sin\alpha} = 70 \quad \text{et} \quad IB + \frac{15}{\sin\alpha} = 80$$

b) En déduire la valeur de $\sin\alpha$. Déterminer alors une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ et la distance IB.

Cocyclicité

Exercice 41

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R et un cercle (C') de centre O' et de rayon R' sécants en A et B. M est un point du cercle (C) tel que $\widehat{AMB}$ = 30° et N un point du cercle (C') tel que $\widehat{ANB}$ = 60°.

1) Donne la mesure de chacun des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$.

2) Déduis-en que O' appartient au cercle circonscrit au triangle AOB ;

Exercice 42

A, B, C et D sont quatre points du plan tels que: (BA)⊥(BC), (DA)⊥(DC), $\widehat{BAC}$ =30° et $\widehat{CBD}$ = 50°.

1) Fais une figure.

2) Donne la mesure de chacun des angles: $\widehat{BAD}$. et $\widehat{BCD}$.

3) On considère les demi- droites [Bx) et [Dy) situées dans le demi- plan de frontière (BD) et contenant A, telles que : $\widehat{DBx}$. = 40° et $\widehat{BDy}$. = 60°.

a) Montre que les supports des demi-droites [Bx) et [Dy) sont des droites sécantes. Soit M leur point d'intersection

b) Montre que les points M, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 43

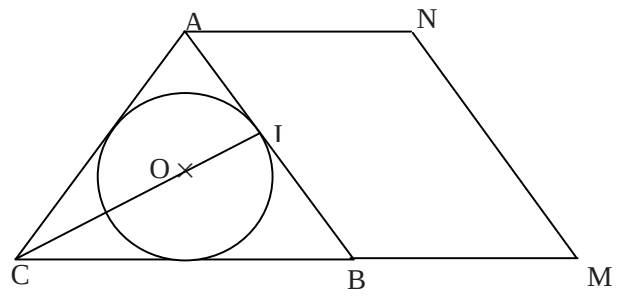
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Montre que les symétriques respectifs de H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent à $\mathscr{C}$, cercle circonscrit au triangle.

Devoir

DUREE 2 HEURES

Exercice 1

Dans la configuration ci-contre , ABC est un triangle équilatéral , (*C*) est le cercle inscrit au triangle ABC , (CI) est une médiatrice du triangle. ABMN est un parallélogramme. Donne la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :



a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; **b)** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI})$; c) $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MN})$; d) $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{AB})$; e) $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{NA})$.

Exercice 2

1) Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ calcule les cosinus de : $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$.

2) a) En utilisant une calculatrice , déterminer une valeur approchée en degrés à 10^{-1} prés de α tels que : $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}$ et $-180° < \alpha < 180°$.

b) Même question pour α (en radians) sachant que: $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ et $-\pi < \alpha < \pi$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle, de sommet principal A tel que : $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$radians.

Soit (BD) la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ (D $\in$(AC)) . On pose : BC = a.

1) Calcule les mesures en radians des angles $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABD}$.

2) Démontre que BD = AD = a.

3) a) Démontre que AB = 2acos$\frac{\pi}{5}$ et CD = 2acos$\frac{2\pi}{5}$.

b) Déduis-en que cos$\frac{\pi}{5}$ + cos$\frac{2\pi}{5}$ = $\frac{1}{2}$. (**1**)

4) a) Démontre que BC = 4acos$\frac{\pi}{5}$ .cos$\frac{2\pi}{5}$.

b) Déduis-en que cos$\frac{\pi}{5}$ .cos$\frac{2\pi}{5}$ = $\frac{1}{4}$. (**2**)

5) On pose x = cos$\frac{\pi}{5}$ et y = cos$\frac{2\pi}{5}$.

a) En utilisant les relations (**1**) et (**2**) et l'égalité : $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$, calcule x + y.

b) Déduis-en cos$\frac{\pi}{5}$ et cos$\frac{2\pi}{5}$.

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Devoir

Exercice 1

a) Le triangle ABC est équilatéral donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Il est orienté dans le sens indirect d'où la mesure principale de $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

b) La médiatrice (CI) est une bissectrice du triangle équilatéral ABC , donc compte tenu de l'orientation, la mesure principale de $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CI})$ est $\frac{\pi}{6}$.

c) ABMN est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$, d'où $(\overrightarrow{CI} ; \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{CI} ; \overrightarrow{BA})$.
Or les droites (AB) et (CI) sont perpendiculaires, on en déduit compte tenu de l'orientation que : la mesure principale de $(\overrightarrow{CI} ; \overrightarrow{MN})$ est $\frac{\pi}{2}$.

d) On a: $(\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{NM})$. De plus $\widehat{ABM} = \pi - \widehat{ABC} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et : $\widehat{ABM} = \widehat{AMB}$;

donc compte tenu de l'orientation la mesure principale de $(\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{AB})$ est $\frac{2\pi}{3}$.

e) On construit l'angle orienté $(\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{CI})$ à partir de C. Soit donc P le point de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CP}$. On a : $(\overrightarrow{NA}; \overrightarrow{CI}) = (\overrightarrow{CP}; \overrightarrow{CI})$.

De plus $\widehat{CPI} = \widehat{CPA} + \widehat{ACI} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; donc compte tenu de l'orientation, la mesure principale de $(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{NA})$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2

1) i) On a $\cos(-\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

ii) On a $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$; donc $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{8}$.

On a aussi $\sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8})$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$; donc $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{8}}$.

D'où $\cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

iii) On a $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}$. Donc $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

2) a) L'égalité $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ donne $\alpha \approx -33,99°$.

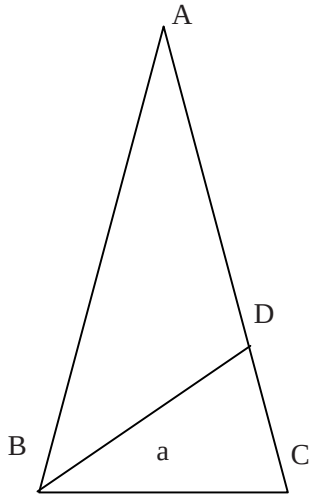
b) L'égalité $\cos\alpha = \frac{2}{7}$ entraine $\alpha \simeq 1,3rad$.

Exercice 3

1) On a $\widehat{BCA} = \widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$ car le triangle ABC est isocèle en A.

On a $\widehat{CAB} = \pi - (\widehat{BCA} + \widehat{ABC}) = \pi - \frac{2\pi}{5}$; donc $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{5}$.

On a $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ car (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Donc $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{5}$ rad .



2) Considérons le triangle ABD.
On a $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{5}$. Donc ABD est isocèle en D, d'où AD = BD.
Considérons le triangle BCD. On a $\widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}$ et

$$\widehat{CDB} = \pi - (\widehat{DBC} + \widehat{BCD}) = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

Donc le triangle BCD est isocèle en B, d'où BD=BC.
Comme BC = a, on obtient : BD = AD = a.

3 a) Soit H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADB, H est milieu de [AB] et ADH est rectangle en H.
D'où $\cos\widehat{DAH} = \frac{AH}{AD} = \frac{AB}{2a}$; donc $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{AB}{2a}$ d'où AB = 2a $\cos\frac{\pi}{5}$.
On raisonne de même avec le triangle BCD pour trouver que CD = 2a$\cos\frac{2\pi}{5}$.
b) On a AB = AC et AC = AD + DC, donc AB = AD + DC.
D'où 2a$\cos\frac{\pi}{5}$ = a + 2a $\cos\frac{2\pi}{5}$. Ou encore $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$. (1)
4)a Soit Q le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, Q est milieu de [BC]

et ABQ est rectangle en Q.

D'où $\cos\widehat{ABQ} = \frac{BQ}{AB}$ ou encore $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{BC}{2AB}$. Ce qui donne BC = $4a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

b) On a BC = *a* , donc d'après l'égalité précédente, $\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$. (2)

5) a) On a $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$.

D'où $\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 4\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} + \left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2$.

On a $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$; donc $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} > 0$. D'où $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) On a $x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $xy = \frac{1}{4}$ donc les réels x et y sont solutions de l'équation $x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. Cette équation admet deux solutions : $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Comme $\frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{5}$, on a $\cos\frac{2\pi}{5} < \cos\frac{\pi}{5}$, on a: $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4 PRODUIT SCALAIRE

APERÇU HISTORIQUE

Outil puissant de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît néanmoins assez tard dans l'histoire des mathématiques. Le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1865) a donné les germes du produit scalaire. Cependant nous devons sa définition au mathématicien américain Gibbs Josiah Willard (1839-1903) et aussi à l'italien Peano Giuseppe (1858-1932) qui le définit en l'associant au calcul d'aire ou de déterminant. Plus tard, Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti proposèrent une définition utilisant le cosinus d'un angle et lui donnèrent le nom de produit intérieur ou produit scalaire.

Le produit scalaire possède de multiples applications : en physique, il est utilisé pour étudier le travail d'une force ; en géométrie analytique il permet de se prononcer sur la perpendicularité de deux droites ou d'une droite et d'un plan,…

OBJECTIFS

- Utiliser le produit scalaire pour traduire mathématiquement des situations de vie.
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes scolaires ou de la vie courante.
- Connaître la définition et les propriétés du produit scalaire.
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes de calcul de distances et de normes, de détermination de mesures d'angles géométriques.

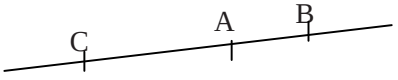
DEFINITION ET PROPRIETES

Rappel : Produit des mesures algébriques de deux bipoints

Soient A et B deux points distincts du plan et C est un point de la droite (AB).

Si C ∈ [AB) alors on a: $\overline{AB}\,\overline{AC}$ = AB x AC

Si C ∉ [AB) alors $\overline{AB}\,\overline{AC}$ = -AB x AC



Définition

Activité

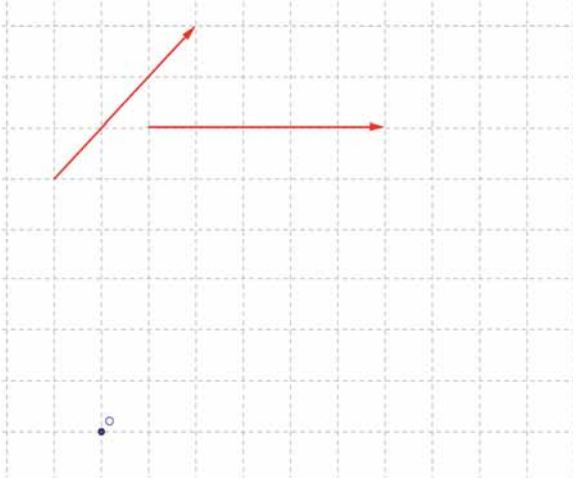
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs représentés ci-contre *Fig1*

1) Reproduis ce quadrillage et construis les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

2) Place le point H, projeté orthogonal de B sur la droite (OA) puis, en utilisant les carreaux, calcule $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$.

3) Marque un autre point O' distinct de O sur la figure et construis les points A' et B' tels que :

$\overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$



4) Montre que : $\overline{O'A}$ x $\overline{O'H}$ = $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$.

Interprète ce résultat que tu viens de démontrer.

Retiens :

Le réel $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$ ne dépend pas du point O choisi.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

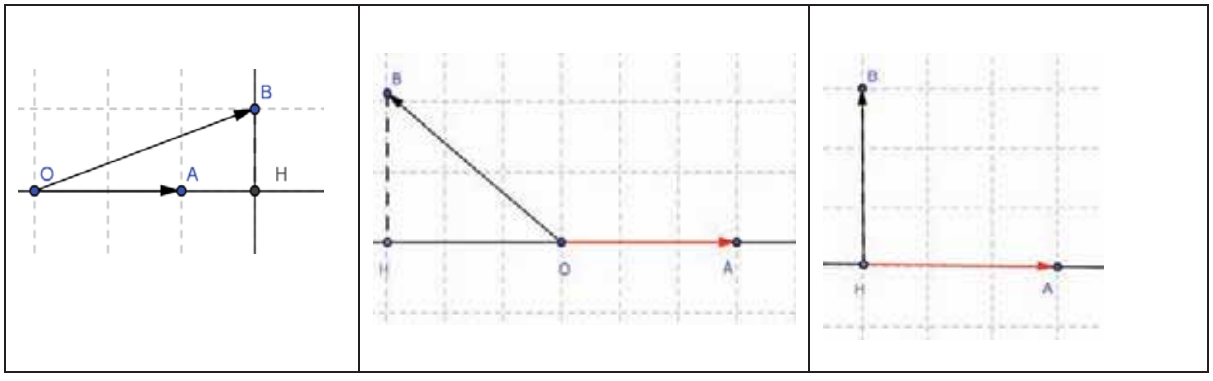
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel r tel que :

- r = $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$ où H désigne le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) si les vecteurs sont non nuls.
- r = 0 si l'un au moins des vecteurs est nul.

Exercice d'application

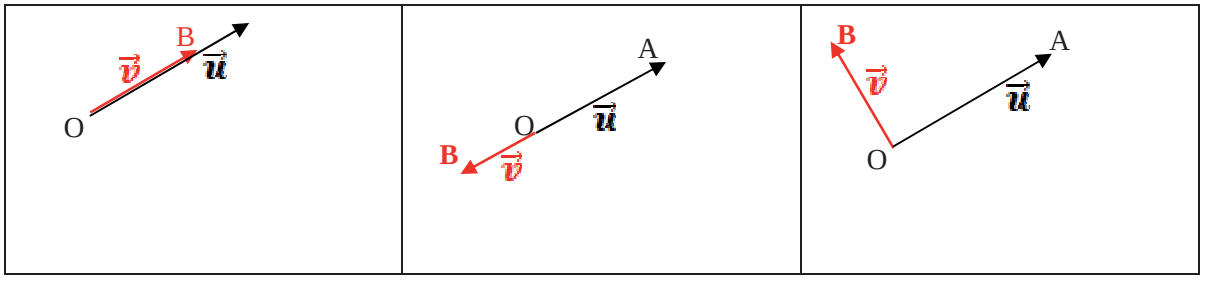
Pour chacune des configurations ci-dessous, calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ en utilisant les quadrillages (les carrés ont pour coté 1).

Fig2 : configurations générales



Remarques

- si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont même direction et même sens : $\vec{u}.\vec{v}$ = OA x OB
- si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont même direction et sont de sens contraires $\vec{u}.\vec{v}$ = - OA x OB
- si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u}.\vec{v}$= 0 puisque le projeté orthogonal de B sur (OA) est A $\vec{u}.\vec{v}$ = $\overline{OA}$ x $\overline{AA}$ = 0.



Exercice

ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 et AC = 4

- Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
- Montre les égalités : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$.

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs du plan et α un nombre réel, on a les propriétés :

- P_1 : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- P_2 : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- P_3 : $(\vec{u}.\alpha\vec{v}) = \alpha\, \vec{u}.\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
- P_4 : $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v}$
- P_5 : $(u+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- P_6 : $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- P_7 : $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration de la propriété 2 .

<u>Indications</u>

- Si $\vec{w} = \vec{0}$ l'égalité est vérifiée
- Suppose que $\vec{w} \neq \vec{0}$

Soit O, A, B, Cet D des points tels que :

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$

Soit A' B' et D' les projetés orthogonaux sur (OC) respectivement de A, B et D

Montre que :

- D'une part $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \overline{OD'} \times \overline{OC}$ (1)
- D'autre part : $\vec{u}.\vec{w} = \overline{OA'} \times \overline{OC}$
  $\vec{v}.\vec{w} = \overline{OB'} \times \overline{OC}$

Déduis-en que : $\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = (\overline{OA'} + \overline{OB'}) \times \overline{OC}$.

Comme $\overline{OB'} = \overline{A'D'}$

Montre que $\overline{OA'} + \overline{OB'} = \overline{OA'} + \overline{A'D'} = \overline{OD'}$

Puis montre que : $\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = \overline{OD'} \times \overline{OC}$ (2)

De (1) et (2) tu en déduis que : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

NB : En t'inspirant de cette démarche, tu démontreras les autres propriétés.

NORME D'UN VECTEUR

Définitions

Activité :

Soit $\vec{u}$ un vecteur, O et A deux points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; montre que $\vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = OA^2$

Définition du carré scalaire d'un vecteur

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, le carré scalaire de $\vec{u}$ est le réel positif noté $\vec{u}^2$ tel que $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$
- On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, le réel positif noté $\|\vec{u}\|$, égal à la racine carrée de son carré scalaire

Tu peux donc noter : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Remarque : **Si** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\|$= AB (Cf chapitre 1 paragraghe1)

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et α un réel. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- P_1 $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- P_2 $\|\alpha.\vec{u}\| = |\alpha|.\|\vec{u}\|$
- P_3 $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Démonstration de P_3:

- Si l'un des vecteurs est nul alors la propriété est vérifiée.
- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux non nuls ; alors on pose :

  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Ainsi $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

D'après l'inégalité triangulaire AC ≤ AB + BC. Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

AUTRES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE.

Expression trigonométrique du produit scalaire

Activité

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ; O, A et B trois points du plan tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Dans chacun des cas de la figure 2, montre que : $\vec{u}.\vec{v}$ = OA.OB $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

Solution du cas de la première configuration de la figure 2

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = \overline{OA}\ \overline{OH}$ avec H le projeté orthogonal de B sur (OA)

= OA.OH (H ∈ [OA))

En considérant le triangle OHB rectangle en H on a :

OH = OB.$\cos(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB})$

= OB.$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ($\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de même sens)

D'où $\vec{u}.\vec{v}$ = OA.OB.cos ($\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$).

Comme OA = $\|\vec{u}\|$ et OB = $\|\vec{v}\|$

Alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

En t'inspirant de cette démarche, étudie les autres cas.

Retiens :

Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ deux vecteurs du plan

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = AB . $AC \cos(\widehat{BAC})$

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Activité

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan, $\vec{u}$(a, b) et $\vec{v}$ (a', b') deux vecteurs du plan.

a) Donne : $\|\vec{i}\|$; $\|\vec{j}\|$ et $\vec{i}.\vec{j}$.

b) Exprime $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de a, a', b et b'.

Retiens :

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb'$

Exercice

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne : $\vec{u}(1,-2)$, $\vec{v}(2,4)$, $\vec{w}(4,2)$,

$\vec{s} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$

Calcule $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{s}.\vec{t}$

ORTHOGONALITE

Condition de nullité du produit scalaire.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

- Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Preuve

1. Montrons que $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

a) Si l'un des vecteurs est nul, le résultat est évident.

b) Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient O, A, B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

Puisque $\vec{u} \perp \vec{v}$, on a : H et O sont confondus. Par suite $\overline{OA}$ x $\overline{OH} = 0$. On a donc $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA}$ x $\overline{OH} = 0$.

2. Montrons que $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

a) Si l'un au moins des vecteurs est nul, le résultat est évident.

b) Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ deux vecteurs non nuls;

Avec les mêmes notations que précédemment, on a par hypothèse :

$\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA}$ x $\overline{OH} = 0$

Comme $\overline{OA} \neq 0$ on a alors : $\overline{OH} = 0$; cela signifie que O et H sont confondus ou encore (BH) = (BO) ; d'où (BO) est perpendiculaire à (OA).

En conséquence les vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des droites (OA) et (OB) sont orthogonaux.

Remarque :

($\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$) et ($\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$) signifie : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

$\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à » ou « si et seulement si » .

Retiens :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Exercice :

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(3;3)$, $\vec{v}(4;-4)$, $\vec{w}(-2;-2)$ et $\vec{s}$ (0 ;5). Parmi ces vecteurs, lesquels sont orthogonaux ?

Expression analytique de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

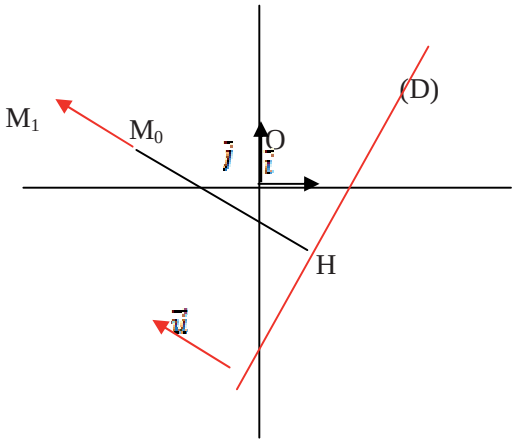
Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée

En remarquant que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$, montre et retiens que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Distance d'un point à une droite

On considère dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) la droite (D) : $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan. Soit $H(x_H, y_H)$ est le projeté orthogonal de M_0 sur (D)



Le vecteur $\vec{n}$ (a, b) est un vecteur normal à la droite (D).

1) Soit $\vec{u}$ (-b, a) un vecteur directeur de (D), montre que le vecteur $\vec{n}$ (a, b) est orthogonal à $\vec{u}$. (On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (D)).

2) Soit M_1 un point tel que $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}$. Montre que $M_0M_1 = \sqrt{a^2+b^2}$.

3) Justifie que $c = -ax_H + by_H$ (α)

4) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0H}$

5) Déduis-en que : $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0)$

6) En tenant compte de (α), montre que $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c)$

7) Donne l'expression trigonométrique du produit scalaire $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H}$

8) Déduis de 4) et 5) que : $M_0M_1 . M_0H.\cos(\widehat{M_1M_0H}) = -(ax_0 + by_0 + c)$

9) Démontre $M_0H = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Retiens :

Soit (D) une droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0,y_0)$un point quelconque du plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est égale à $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

on note $M_0H = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ avec H projeté orthogonale de M_0 sur (D).

Exercice

On considère dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) la droite (D) : $2x-y+3=0$ et le point E(4, 1).

Calcule la distance de E à (D).

RELATIONS METRIQUES

Produit scalaire et triangle

Activité

1) Soit ABC un triangle, en remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, montre que :
   $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$
   Déduis- en que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{AB^2+AB^2-BC^2}{2}$ (1)
2) En utilisant la relation (1), montre que $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2+AB^2-BC^2}{2AB\ AC}$

Retiens :

Si ABC un triangle quelconque alors :

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{AB^2+AB^2-BC^2}{2}$
- $\cos\widehat{A} = \frac{AB^2+AB^2-BC^2}{2AB\ AC}$

Exercices d'application

Exercice 1

1) Soit ABC un triangle tel que : AB = 6 ; BC = 7 ; CA = 9
   Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
2) Détermine une valeur approchée des angles du triangle ABC.

Exercice2

Soit ABC un triangle rectangle A, H le pied de la hauteur issue de A .
Démontre que :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ $AB^2 = \overline{BC}.\overline{BH}$; $AC^2 = \overline{CB}.\overline{CH}$; AB.AC = BC.AH

Produit scalaire et parallélogramme

Activité

Soit ABCD un parallélogramme

1) Exprime $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Déduis-en que : $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $DB^2 = AB^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + AD^2$
   $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + DB^2$

Retiens :

Si ABCD est parallélogramme alors $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + DB^2$

EXERCICES ET PROBLEMES

Produit scalaire de deux vecteurs ; norme d'un vecteur

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté a ; soient A', B' et C' les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB] ; on note G le centre de gravité du triangle ABC.
En utilisant la définition du produit scalaire par les mesures algébriques, calcule en fonction de a :

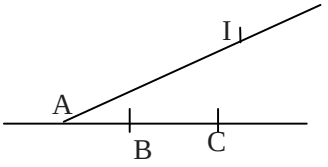
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$;

e) $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{AC}$, f) $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GB'}$; g) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AA'}$; h) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

Sur la figure ci-contre, A, B, C et I sont quatre points du plan tels que : $\widehat{IAB}$ = 30° ; A, B, et C sont alignés ; AI = 10, AB = 3 et AC = 7 selon l'unité choisie. Calcule :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IC}$.



Exercice 3

1) A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan. Les points A, B et C sont-ils alignés dans chacun des cas suivants ? Justifie ta réponse.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = AB.AC; ; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = -AB.AC ; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = 0 ;

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = $\frac{1}{2}$AB.AC ; e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = - $\frac{1}{2}$AB.AC .

2) Est-il possible que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ soit égal à la valeur indiquée dans chacun des cas suivants ? Justifie ta réponse. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = $\frac{1}{3}$AB.AC;

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = $\frac{5}{2}$AB.AC ; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = $\frac{\sqrt{2}}{3}$AB.AC d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = -2 AB.AC ;

Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G, de coté a.
Calcule en fonction de a : ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$).($\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AG}$) ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; ($\overrightarrow{AC}$- $\overrightarrow{BC}$). ($\overrightarrow{CA}$ + $\overrightarrow{CB}$) ;
($\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$).$\overrightarrow{AC}$; ($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$).$\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5

ABCD est un carré de centre O, de coté a.
Calcule en fonction de a: ($\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$).$\overrightarrow{AC}$; ($\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}$) . ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$)

Exercice 6

ABC est un triangle isocèle en A. Montre que: $(AB - \frac{\sqrt{2}}{2}BC).(AB + \frac{\sqrt{2}}{2}BC) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 7

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs orthogonaux et tels que $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 2$. Calcule:

$A = (\vec{i} + 2\vec{j}).(-\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - \vec{j})^2$; $B = (2\vec{i} - 3\vec{j}).(2\vec{i} + 3\vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j}).\vec{j}$.

$C = 2\vec{i}.(-\vec{i} - 4\vec{j}) - 3\vec{j}.(-2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j})$; $D = (\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}).(-\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})$;

$E = (a\vec{i} - \vec{j}).(2a\vec{i} + b\vec{j}) - (\vec{i} - b\vec{j})^2$, a et b réels.

Exercice 8

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux. Simplifie les expressions suivantes :

$A = \vec{u}^2 + (\vec{u} + 2\vec{v}).(-\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{v}^2$; $B = (\vec{u} + 2\vec{v}).\vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}^2$;

$C = (\vec{u} + 2\vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 - \vec{u}.(\vec{v} + 2\vec{u})$; $D = \vec{v}.(\vec{u} - \vec{v}) + (\overrightarrow{2u} + \vec{v}).(\overrightarrow{2u} - 2\vec{v})$.

Exercice 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$. Calcule :

$(\vec{u} - \vec{v})^2$; $\|\vec{u}\|^2$; $\|2\vec{u} - 5\vec{v}\|$; $(-\vec{u} + 2\vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$;

$(\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - 3\vec{v})$; $\|\vec{u} + 3\vec{v}\|$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 10

Montre que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, alors on a :

1) a) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[(\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2] = \frac{1}{2}[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2] = \frac{1}{4}[\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2]$.

b) Soit un parallélogramme ABCD. Donne trois expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ en fonction des longueurs des cotés et des diagonales du parallélogramme.

2) On donne un triangle ABC tel que AB = 9 ; AC = 6 et BC = 5. Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3) ABC est un parallélogramme tel que AB = 7 ; AD = 4 et AC = 9. Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

4) On donne un parallélogramme EFGH tel que EG = 18 et FH = 10.
Calcule $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{AD}$.

Exercice 11

ABC est un triangle dont tous les angles sont aigus et AB + AC = 14 ; H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K est le projeté orthogonal de B sur (AC). On suppose que AH = 3 et AK = 4.

Montre que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH} = 9$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK} = 16$; déduis-en que : $\frac{AB}{AC} = \frac{16}{9}$; calcule AB et AC.

Exercice 12

ABC est un triangle équilatéral de côté a ; soient A', B' et C' les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB] ; on note G le centre de gravité du triangle.

1) Montre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) Montre que : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.

3) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}$ de deux façons différentes et en déduire AA' en fonction de a.

4) Pour tous points M et N de (AA'), montre que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BC}$.

5) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Exercice 13

On considère un triangle ABC rectangle en A. Soient H le projeté orthogonal de A sur (BC), (C) le cercle circonscrit à ABC et O le centre de ce cercle. Une droite passant par B coupe (AH) en I et recoupe (C) en J.

1 a) Montre que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$.b) En déduire que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = AB^2$.

2) Montre que $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IB} = IO^2 - \frac{BC^2}{4}$.

Exercice 14

A, B, C et D sont des points du plan tels que :(AB)⊥(AD), (AD)⊥(DC) et (AC)⊥(BC).

1) Montre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$. 2) Montre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2$.

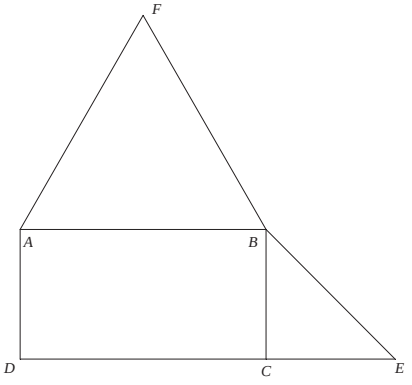
3) Déduis de ce qui précède $AC^2 = AB \times DC$.

Exercice15

La figure ci-contre représente un rectangle *ABCD* tel que : *AB* = 5 et *BC* = 3 ; un triangle *ABF* équilatéral et un triangle *BCE* rectangle et isocèle en *C*. Le point *H* est le milieu du segment [*AB*]. Calcule les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$; 2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$; 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$

4)$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE}$; 5) $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}$; 6). $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE}$



Problème 16 :

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 2$.

Résous dans IR l'équation d'inconnue x : $\|x\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{33}$.

Exercice 17

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

a) Démontre que $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

b) Déduis-en que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

On donne un triangle ABC et le milieu A' de [BC]. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

c) Déduis de a) que si le triangle ABC est isocèle en A alors la médiane (AA') est sa hauteur passant par A.

Etudie la réciproque.

d) Déduis de a) qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 18

Soit A, B, C, et D quatre point du plan.

1) Montre que $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} = 0$.

2) Déduis-en que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.

Exercice 19

ABCD est un losange.

1) a)Montre que $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$.

b) Déduis-en que les diagonales (AC) et (BD) du losange sont perpendiculaires.

2) Montre qu'un parallélogramme est un losange si ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 20

On considère un carré ABCD de côté a. M un point de [AC] distinct de A et de C.

1) Montre qu'il existe un réel k strictement positif tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$.

2) M se projette orthogonalement en H sur (AD) et en K sur (DC).

a) Montre que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{DC}$.

b) Montre que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} = k(1 - k)a^2$ et $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{DK} = k(k - 1)a^2$.

c) Déduis-en que (BM) est perpendiculaire à (HK).

Exercice 21

A et B sont deux points distincts du plan. M, N et I sont des points deux à deux distincts, et distincts de A et B. On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$.

1) Montre que M, N et I sont alignés.

2) Montre que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

Exercice 22

La force d'intensité constante 830 N déplace son point d'application de A vers B avec AB = 5 m. Calcule le travail produit par cette force si $\widehat{BAM} = 30°$. Ce travail est il moteur ou résistant ?

Indication : $W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$.

Exercice 23

On donne un triangle ABC.

1) Démontre que pour tout point M du plan ; on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$.

(Indication : écris $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$.

2) Démontre que les hauteurs issues des sommets A et B se coupent en un point H tel que : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$.

3) Déduis des questions (1) et (2) que: $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Que peut-on conclure pour les trois hauteurs ?

Exercice 24

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque du plan.

1) Soit [AB] un diamètre de (C), démontre que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas du diamètre [AB] choisi .

2) Une droite passant par M coupe (C) en deux points I et J. Soit I' le symétrique de I par rapport à O, démontre que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI'}$

3) En déduis-en que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ reste constant lorsque P décrit (C).

Exercice 25

Un tracteur exerce sur une péniche par l'intermédiaire d'un câble une force de traction constante de 2000 N. Le câble fait un angle de 20° avec l'axe du canal.
Calcule le travail W fourni pour un déplacement de 1 km.

Calcul d'angles et de distances

Exercice 26

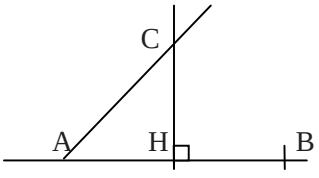
A, B et I sont trois points tels que : AB = 7, AI = 5 et $\widehat{IAB} = 60°$. Calcule BI.

Exercice 27

Sur la figure ci-contre, H est le milieu [AB],
AC = AB.

1) Calcule $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

2) En déduire cos$\hat{A}$ puis la valeur de l'angle $\hat{A}$.



Exercice 28

ABCD est un carré de coté a. I, J et K sont les points du plan tels que :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

1) Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AI}$.

2) a) Calcule IJ et IK.

b) Calcule $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ de deux façons différentes. Déduis-en une valeur approchée par défaut de l'angle $\widehat{KJI}$.

3) Soient M et N les milieux respectifs de [DC] et [BC] ; montre que la droite (DN) est perpendiculaire à (AM).

Exercice 29

Dans un triangle ABC , on pose BC = a, AB = c, AC = b.

1) Développe le carré scalaire ($\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$ + $\overrightarrow{CA}$)^2 .

Déduis-en que : $\frac{\cos\hat{A}}{a} + \frac{\cos\hat{B}}{b} + \frac{\cos\hat{C}}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

3) Que devient cette égalité lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

3) On considère que le triangle ABC est quelconque ; soit H le pied de la hauteur issue de A.

a) Exprime AH en fonction de c et de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) Déduis-en que l'aire du triangle ABC est égale à S = $\frac{1}{2}$ac.**sin**$\widehat{ABC}$.

c) En t'inspirant des questions (a) et (b), calcule S de deux autres manières.

d) Déduis-en que $\frac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{c}{\sin\widehat{ACB}}$.

Cette égalité est connue sous le nom du théorème des sinus.

e) **Application** : Profitant de ses vacances Doudou qui habite dans une ville A voudrait rendre visite à son oncle et à sa tante qui se trouvent respectivement dans les villes B et C distantes 100km.

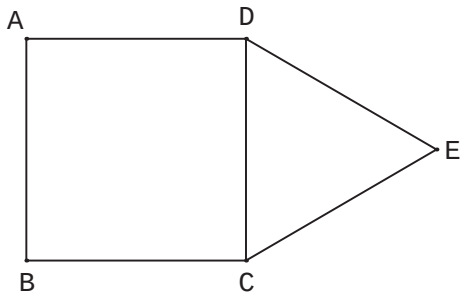
Sachant que les trois villes constituent les trois sommets d'un triangle ABC tels que mes($\widehat{ABC}$)=30° et mes($\widehat{BAC}$) = 45°.

Aide Doudou à calculer la distance :

- qui le sépare de son oncle
- qui le sépare de sa tante

(Tu arrondiras les distances à l'unité prés).

Exercice 30



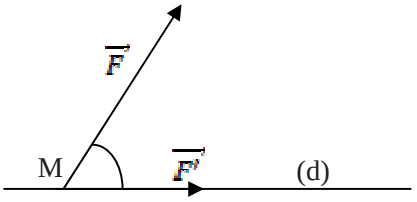
ABCD est un carré de côté a et DCE est un triangle équilatéral.
On s'intéresse au triangle BDE.
Les questions 1) et 2) sont indépendantes**.**
1) a) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de *a*. Tu pourras utiliser une projection orthogonale.
b) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.
c) En déduire l'égalité $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} = \frac{a^2}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.
d) Utilise ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD}$ + $\overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE.
2) Calcule, en fonction de a, l'aire exacte des triangles :
a) ECD.
b) ECB (on pourra appliquer la formule des sinus).
c) Déduis-en que l'aire exacte du triangle EDB est égale à $\frac{a^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Exercice 31

ABC est un triangle rectangle en A, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
1) Etablis la relation $AH^2 = HB.HC$ (1)
2) L'unité de longueur étant choisie, on considère un segment de longueur x. (x>1).
Donne une méthode de construction :
a) D'un segment de longueur x^2 ;
b) D'un segment de longueur $\sqrt{x}$
c) D'un segment de longueur $\frac{1}{x}$
Indication : utiliser la relation (1).

Exercice 32

Soient (d) une droite, [AB] un segment de longueur 8 centimètres tel que son projeté orthogonal sur (d) soit le segment [A'B'] de longueur 4 centimètres.



1) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}$ de deux façons différentes et déduis-en l'angle géométrique des droites (AB) et (d), c'est-à-dire la valeur absolue de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$.

2) Application : une charge M est tirée par une force $\vec{F}$ d'intensité 8 newtons (8N) se déplace sur une droite (d). La composante de $\vec{F}$ suivant la direction de la droite (d) a pour intensité 4N comme indiqué sur la figure ci-dessous.
Détermine l'inclinaison de $\vec{F}$ par rapport à (d).

Géométrie analytique

Exercice 33

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$); on donne deux points du plan A (1 ; 2) et B (-2 ; 1).

1) Détermine le réel a tel que le vecteur $\vec{n}$ (-1 ; a) soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

2) Soit M un point du plan ; montre que M appartient à (AB) si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$= 0.

3) Déduis-en une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 34

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) On considère la droite (d) : 2x + y – 1 = 0 .

a) Montre que le vecteur $\vec{n}$(2 ; 1) est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ (-1 ; 2) de (d).

b) En déduire que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de (d).

2) Soit (d') la droite d'équation : ax + by + c = 0.
Montre que le vecteur $\vec{n}$'(a ; b) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d').

Exercice 35

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) On considère le point A (1 ; 1) ; soit M le point de coordonnées (x ; y).

a) Calcule IM^2.

b) Détermine une équation cartésienne du cercle (C) de centre A et de rayon 2.

2) Soient I(x_0 ; y_0) et r un réel strictement positif. Détermine une équation cartésienne du cercle (C') de centre I et de rayon r.

Exercice 36

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soient A et B deux points distincts du plan.

1) Soit M un point du plan. Montre que M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$.

2) Déduis-en une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB] si :

a) A (-1 ; 2) et B (1 ; 1) ; b) A (0 ; 2) et B (1 ; -1) ; c) A (x_0 ; y_0) et B(x'_0 ; y'_0)

Exercice 37

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soient (d) la droite d'équation : $x + y - 1 = 0$ et I(-1 ; 0).

1) Détermine le point d'intersection A de (d) et la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A.

2) a) Montre que le cercle (C) de centre I et de rayon IA est tangent à (d) en A.

b) Détermine une équation cartésienne de (C).

3) Soit J le point de coordonné J(1 ; 1) ; détermine une équation cartésienne du cercle (C') de centre J et tangent à (d).

Exercice 38

Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soient A (-1 ; 2) et B(1 ; 1) deux points du plan.

1) Montre qu'il existe un cercle et un seul passant par A et B et dont le centre appartient à la droite (d) d'équation $x + y + 1 = 0$.

2) Détermine une équation cartésienne de ce cercle.

Exercice 39

Dans un plan, muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points : A(2 ;1) ; B(5 ;7) ; C(3 ; -1) et D(5 ; 5).

On note Δ l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 27$ et Γ le cercle de diamètre [CD].

1) a) Détermine une équation de Δ et Γ.
b) Vérifie que H(-1 ; 7) est un point de Δ et que E(1 ;1) est un point de Γ .
c) Construis Δ et Γ.
2) a) Résous le système (S) : $\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$
b) Que peut-on en déduire ?
3) Détermine l'équation réduite de la tangente D à Γ au point *E* puis la tracer.
4) Détermine les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes du repère.

Exercice 40
Le plan P est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . On considère les points
A(4 ; 5), B(1 ; 1), C(7 ; 3) .
1) Montre que le triangle ABC n'est pas rectangle.
2) a) Détermine le centre Ω du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
b) Détermine le rayon de (C) puis une équation cartésienne de (C).
3) a) Montre que O n'appartient pas au cercle (C).
b) Détermine les équations cartésiennes des deux tangentes à (C) passant par O et les coordonnées de leurs points de contacts respectifs I et J avec (C).
4) a) Détermine les coordonnées du projeté orthogonale A', B' et C' projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB) respectivement.
b) Détermine les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
c) Montre que H est le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C'.
5) a) que les droites (AB), (BC) et (BC) ont pour équations respectives :
$4x - 3y - 1 = 0$, $2x + 3y - 23 = 0$ et $x - 3y + 2 = 0$.
b) Déduis-en les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6) a) Détermine les symétriques H_1, H_2 et H_3 de l'orthocentre H du triangle ABC par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB) respectivement.
b) Montre que H_1, H_2 et H_3 appartiennent au cercle (C).

Exercice 41
On considère, dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), les points *A*(1 ;–2), *B*(4 ;–1) et *C*(4 ; 4).
1) a) Détermine une équation de la médiatrice D_1 du segment [*AB*].
b) Détermine une équation de la médiatrice D_2 du segment [*BC*].
c) Détermine les coordonnées du point d'intersection *I* des droites D_1 et D_2 .
d) Que représente le point *I* pour le triangle *ABC* ?
2) Soit le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$.
a) Détermine les coordonnées du centre Ω du cercle (C) ainsi que son rayon.
b) Que remarques-tu ?
c) Montre que (C) est le cercle circonscrit au triangle *ABC*.

Exercice 42

Soient les points A(-2 ; 1) et B(3 ; 2) du plan muni d'un repère orthonormé.

1) Montre que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Déduis-en que x – 5y + 7= 0 est une équation de la droite (*AB*).

2) Soit *D* le point de coordonnées (1 ; 1). Vérifie que *D* n'est pas sur (*AB*).

On cherche la distance de *D* à (*AB*), soit la distance *DH* où *H* est le projeté orthogonal de *D* sur (*AB*).

3) a) Montre que le produit scalaire $\overrightarrow{DH}.\vec{n}$ vaut –3 ; tu poseras que *H* a pour coordonnées (*x* ; *y*) et tu utiliseras le fait que *H* est sur (*AB*).

b) En utilisant le fait que $\overrightarrow{DH}$. est colinéaire à $\vec{n}$, montre que $\overrightarrow{DH}.\vec{n} = \pm DH\sqrt{26}$

c) Déduis-en la distance *DH*.

4) Propose une méthode générale permettant de donner la formule donnant la distance d'un point D(x_D ; y_D) à une droite d'équation ax + by + c = 0.

Exercice 43

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Soit θ un réel et (D) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que xcosθ + ysinθ = 4.

1) Montre que (D) est une droite.

2) a) Montre que la distance du point A(1, 1) à la droite (D) est : 4 - cosθ - sinθ.

b) Existe-il des valeurs de θ pour lesquels (D) passe par A ?

3) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 4.

a) Donne une équation cartésienne de (C).

b) Montre que le point I(4cosθ; 4sinθ) appartient à (C).

c) Montre que (D) est tangente à (C) en I.

4) Pour θ = $\frac{\pi}{4}$ montre que la droite (D) est tangente au cercle (C') de centre A(1; 1) et de rayon r = 4 - $\sqrt{2}$.

5) a) Pour θ = $\frac{\pi}{2}$, montre que la droite (D) est tangente au cercle (C'') de centre A(1 ;1) et de rayon 3. Donne le point de contact K de (C'') et de (D).

6) Pour θ = $\frac{\pi}{3}$, la droite la droite (D) est notée (D_1); pour θ = $\frac{\pi}{6}$, (D) est notée (D_2).

a) Montre que $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D_1) et que $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D_2).

b) Calcule $\vec{u}.\vec{v}$ de deux façons différentes et en déduire la mesure principale de l'angle ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

Devoir

Durée 2 heures

Exercice 1 (4 points)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|$ =2, $\|\vec{v}\|$ = 3 et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{19}$.

1)a) Développe $(\vec{u}+\vec{v})^2$ (1 pt)

b) En déduire la valeur de $\vec{u}.\vec{v}$ (1,5 pt)

2) Détermine le cosinus de l'angle$(\vec{u}\,;\,\vec{v})$. (1,5 pt)

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ on considère les points A (-3,2), B (2 ,7) et C (2,2). Soit M (x ;y) un point du plan.

1) a) Calcule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1 pt)

b) Déduis-en une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB]. Détermine le centre I et le rayon R de (C). (1 pt + 0,5pt + 0,5pt)

c) Montre que le point C appartient au cercle (C). Fais une figure. (0,75pt + 0,75pt). 2) Soit J le milieu de [CD] ; en utilisant la projection orthogonale, montre que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\,CB^2$. (1,5pt)

Exercice 3 (10 points)

On considère un triangle OAB, rectangle en O, I le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de O sur [AB]. Les point P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur [OA] et [OB].

Partie A (méthode analytique)

On considère un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ tel que A (4 ; 0) et B (0; 10).

1. Fais une figure. Que peux-tu conjecturer sur les droites (PQ) et (OI)? (**0,5 + 0,5pt**)
2. Détermine les équations des droites (AB) et (OH).(**0,75pt + 1pt**)
3. Déduis-en les coordonnées de H. (1pt)
4. Détermine les coordonnées des points P, Q et I. (**0,5pt + 0,5pt + 0,5pt**)
5. Démontre que les droites (PQ) et (OI) sont orthogonales ; (**0,5pt**)

Partie B (méthode géométrique)

1. Détermine $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}$. En déduire que $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}$. (**0,5pt + 1pt**)
2. Après avoir exprimé $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}$, établis que : $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OB}$. (**0,5pt + 0,5pt+ 0,5pt**)
3. Démontre que les droites (PQ) et (OI) sont orthogonales. (**1,25pt**).

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Exercices

Exercice 29

1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = 0$ car $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

De cette égalité on déduit que $a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos\hat{A} + ac\cos\hat{B} + ab\cos\hat{C})$

En divisant les deux membres par 2abc, on a : $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$.

2) Si le triangle est équilatéral alors l'égalité devient :

$\frac{3a^2}{2a^2} = \frac{3\cos A}{a}$ soit $\cos\hat{A} = \cos\hat{B} = \cos\hat{C} = \frac{1}{2}$.

3) a) Le triangle ABH est rectangle en H donc $\sin\hat{B} = \frac{AH}{c}$ d'où $AH = c\sin\hat{B}$

b) L'aire du triangle ABC notée $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}a.AH = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$.

c) On montre de même que $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

D'où $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$.

d) En divisant par $\frac{1}{2}abc$ on a : $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$. D'où $\frac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{c}{\sin\widehat{ACB}}$.

e)Application :

- La distance qui le sépare de son oncle est: $c \approx 136$km
-Et la distance qui le sépare de sa tante est : $b = \frac{a}{\sin\widehat{BAC}} \approx 71$km.

Corrigé Devoir

Exercice 1

1) a) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(19 - 4 - 9) = 3$

2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$ donc $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1) a) A(-3,2), B(2,7) et M(x,y).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ $=x^2 + y^2 + x - 9y + 8$

b) M(x,y) est un point du cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ =0 donc si et seulement si $x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0$; alors le cercle (C) de diamètre [AB] a pour équation $x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0$. Le centre I du cercle (C) est le milieu de [AB], donc $I(-\frac{1}{2} ; \frac{9}{2})$; le rayon de ce cercle est $R = \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

c) On a C(2, 2), en remplaçant x et y par les coordonnées de C dans l'équation du cercle on trouve 0, donc C appartient à (C).

2) Le triangle BIC est isocèle en I donc le projeté orthogonal du point I sur [BC] est le point J milieu de [BC]. Par conséquent $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}CB^2$

Exercice 3

Partie A

1) La figure laisse penser que les droites (PQ) et (OI) sont perpendiculaires.

2) (AB) : 5x + 2y – 20 = 0

(OH) : 2x – 5y = 0.

3) Coordonnées du point H : Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 20 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

D'où H $\left(\frac{100}{29} ; \frac{40}{29}\right)$.

4) $P(,\frac{100}{29} ; 0)$; $Q(0, \frac{40}{29})$; I(2,5) ; $\overrightarrow{PQ}; \frac{40}{29})$; $\overrightarrow{OI}$ (2 ; 5)

$$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{PQ} = \frac{-200+200}{29} = 0.$$

D'où $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{PQ}$; les droites (PQ) et (OI) sont orthogonales.

Partie B

1) $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}$ = 0 car H est le projeté orthogonal de O sur [AB].

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}$ = 0 si et seulement si $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}).(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ = 0 (OPHQ parallélogramme) ;
d'où $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}$ car $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OB}$ = 0 et $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OA}=0$

2) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OA}$ = $(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OP}).\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}$ car $\overrightarrow{QO}.\overrightarrow{OA}=0$ **(a)**

$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OB}$ = $(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}).\overrightarrow{OB}$ = $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}$ car $\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OB}=0$ **(b)**

De (a) et (b) on déduit que $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OB}$ = $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OA}$.

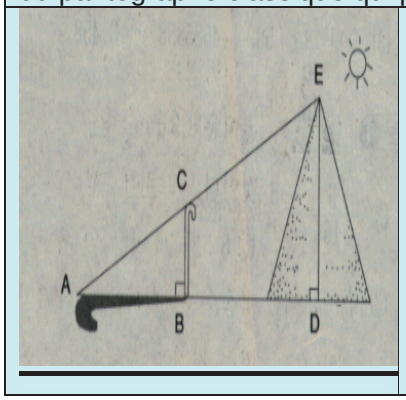
3) $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{OA}$ si et seulement si $\overrightarrow{PQ}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=0$

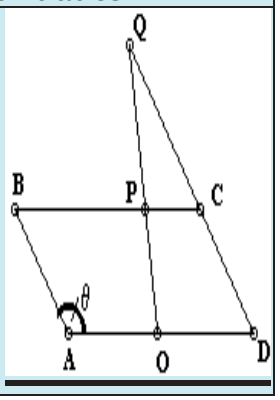
si et seulement si $\overrightarrow{PQ}.2\overrightarrow{OI}=0$ (car I est milieu de [AB]).
On en déduit alors que (PQ) et (OI) sont orthogonales.

5 TRANSFORMATIONS DU PLAN

APERCÇU HISTORIQUE

Depuis l'antiquité, les transformations ont été utilisées de façon consciente ou inconsciente par l'homme dans les domaines suivants : tissage, architecture, décoration etc. .
De plus, la forme de certains éléments de la nature laisse apparaître les transformations.
Les machines mécaniques qui réalisent les transformations planes ont été l'objet de plusieurs études. Au plan historique, la plus ancienne de ces machines est le pantographe qui fût utilisé d'abord par les peintres au XVIe siècle puis perfectionné et décrit par le Père Scheiner vers 1631. Mais sa portée théorique n'apparût qu'au XIXe siècle avec la notion de transformations ponctuelles introduite en géométrie. Sylvester donna ensuite une généralisation intéressante du pantographe classique qui permit la réalisation de figures directement semblables.





OBJECTIFS

- Utiliser la définition, le vocabulaire et les propriétés des transformations dans la résolution de problème portant sur les positions relatives de figures géométriques (alignement ; orthogonalité et parallélisme…) et/ou de comparaison de mesures (angles ou longueurs…)
- Mobiliser les connaissances sur les transformations pour résoudre des problèmes de constructions et/ou de détermination de lieux géométriques.
- Connaître les compositions de transformations ne faisant pas intervenir les rotations.
- Utiliser les transformation pour modéliser des situations de la vie courante.

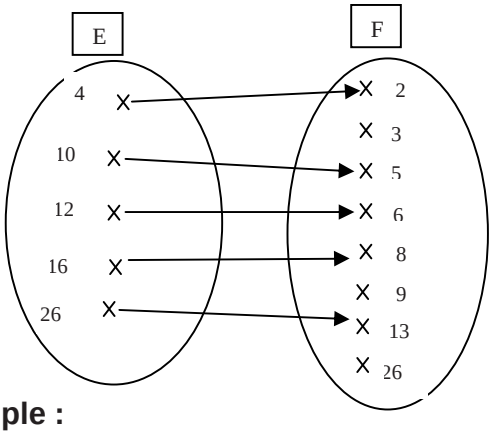
RAPPELS

Vocabulaire et généralités

Notion d'application

Soient E et F deux ensembles donnés, une relation f de E vers F est une application si et seulement si, elle fait correspondre à tout élément x de E un seul élément y de F.
y est appelé image de x par f ; x est un antécédent de y par f.
On note y = f (x).

Exemple :
Soit E = {4 ; 10 ; 12 ; 16 ; 26} et F = {2 ; 3 ; 5, 6 ; 8 ; 9 ;13 ; 26}
Considérons la relation f définie de E vers F tel que à tout élément de E on associe sa moitié.
4 a pour image 2 par f se note f(4) = 2, ainsi on a f(10) = 5 ; f(12) = 6, f(16) = 8, f(26) = 13.
Tu constates que tout élément de E a une image et une seule par f ; donc f est une application de E vers F.



Contre exemple :
Soit la relation g de IR vers IR qui à un nombre réel associe sa racine carré. Prouve que g n'est pas une application.

Application bijective
Soient E et F deux ensembles donnés, une application f de E vers F est une bijection si et seulement si, tout élément de F admet un antécédent et un seul.

Exemple :
Soit A = {2 ; 5 ; 6 ; 8 ; 13} et B = { 4 ;10 ; 12 ; 16 ; 26}
Considérons l'application g définie de A vers B qui à tout élément de A associe son double.
4 a pour antécédent 2 se note aussi g(2) = 4 ; de même g(5) = 10 signifie que 10 a pour antécédent 5 ; g(6) = 12 ; g(8) = 16 ; g(13) = 26.

Constate que tout élément de B a un antécédent et un seul dans A ; cela veut dire que l'application g est bijective.

Bijection réciproque

Soient f une bijection de E vers F. On appelle bijection réciproque de f, notée généralement f^{-1}, la bijection de F vers E telle que pour tout x de E et tout y de F :
$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.
Dans l'exemple ci-dessus, considère l'application h définie de B vers A qui à tout élément de B associe sa moitié. Vérifie que h est une bijection.
Constate que g(2) = 4 équivaut h(4) = 2, ce qui est valable pour tous les autres éléments de A.
h est la bijection réciproque de g et on peut aussi la notée g^{-1}.

Notion de transformation

On appelle transformation du plan, toute bijection du plan dans lui-même.

Exemples :
La translation, la symétrie axiale et la symétrie centrale sont des transformations.

Contre-exemple
La projection orthogonale sur une droite n'est pas une transformation. En effet sur la figure ci-contre, tu constates que le point M est image de K et N par la projection orthogonale sur **(Δ),** donc M a au moins deux antécédents.

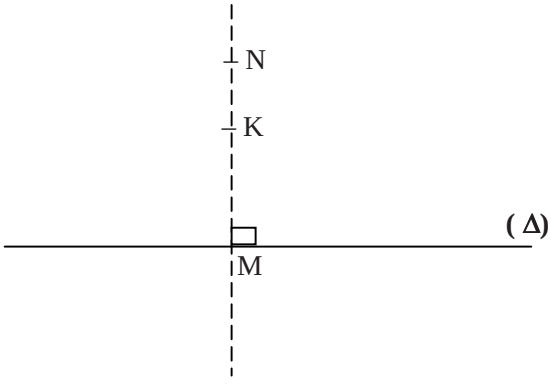


***Tableau** de synthèse des principales transformations*

Transformations	**Définition :**	**Points invariants** *« un point A est invariant par une transformation f si et seulement si f(A) = A »*	**Propriétés de conservation**
Symétrie orthogonale d'axe (D)	M a pour image M' signifie que : -Si M∈(D) alors M'=M ; - Si M∉(D) alors (D) est la médiatrice de [MM'].	Tous les points de la droite (D)	- l'alignement - les distances - les angles géométriques - l'orthogonalité - le parallélisme - le milieu - les aires
Symétrie centrale de centre I	M a pour image M' signifie que : I est le milieu du segment [MM'].	Le centre I	- l'alignement ; - les distances ; - les angles géométriques - l'orthogonalité - le parallélisme - le milieu - les aires
Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	M a pour image M' signifie que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$	Aucun point	- l'alignement ; - les distances ; - les angles géométriques - l'orthogonalité - le parallélisme - le milieu - les aires
Rotation de centre O qui transforme A en A'	M a pour image M' signifie que : - Si M ≠ O , OM = OM' et $\widehat{MOM'} = \widehat{AOA'}$ - Si M = O alors M' = O	Le centre O	- l'alignement ; - les distances ; - les angles géométriques - l'orthogonalité - le parallélisme - le milieu - les aires

Exercices d'application

Exercice1

Soit ABC un triangle ; I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. Soit S_K la symétrie de centre K et $t_{\overrightarrow{AK}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AK}$.

1- Construis le point D =$S_K(C)$ et le point E = $t_{\overrightarrow{AK}}(D)$.
2- Quelle est l'image de E par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3- Quelle est l'image du milieu du segment [AD] par la symétrie de centre K.

Exercice2

Soit ABCD un losange.

Quelles sont les images respectives des points A, B ,C et D par la symétrie d'axe (AC) ?

Déduis-en l'image du losange ABCD par la symétrie d'axe (AC).

Exercice 3

Trace un segment [AB] de 4cm de longueur.

1- Construis le centre O d'une rotation d'angle 90° qui transforme A en B.
2- Quelle est la distance de O à la droite (AB) ?

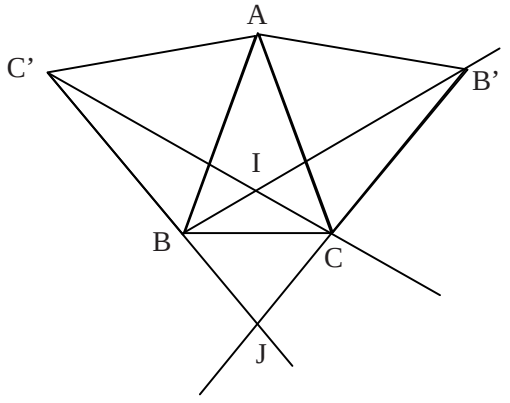
Exercice 4

Sur la figure ci-contre le triangle ABC est isocèle en A et les triangles ABC' et ACB' sont équilatéraux, I est point d'intersection des droites (BB') et (CC'), J celui de (BC') et (CB'). Soit (D) la médiatrice de [BC].

1) Montre que (D) est la bissectrice des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'AC}$.

2) Montre que B' et C' sont symétriques par rapport à (D)

3) Déduis-en que les points A, I et J sont alignés.



EXPRESSIONS ANALYTIQUES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Expression analytique d'une symétrie centrale.

Soit A(x_0, y_0), S_A la symétrie de centre A qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y').

Justifie que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}$.

Déduis-en que $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$

Retiens :

$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ est l'expression analytique de la symétrie centrale de centre A(x_0, y_0)

Exercice

Détermine l'expression analytique de la symétrie centrale de centre A (-1; 3).

Calcule les coordonnées du point E image du point B(2 ; -5) par cette symétrie.

Expression analytique d'une translation.

Soient $\vec{u}$(x_0, y_0) un vecteur du plan et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x',y').

Justifie que $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

Retiens :

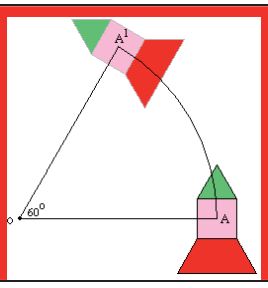
$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$ est l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$(x_0, y_0).

Exercice

Détermine l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$ (2,−3).

Calcule les coordonnées du point A antécédent de A'(3, 4).

ROTATION



Activité préparatoire

Marque 3 points non alignés I, A et B tels que IA = 3 cm et IB = 4,5 cm.

1) Construis le point A' tel que IA'= 3 cm et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\ \overrightarrow{IA'}}\right)=\frac{\pi}{3}$ rad.
2) Construis le point B' tel que IB'= 4,5 cm et $\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\ \overrightarrow{IB'}}\right)=\frac{\pi}{3}$ rad.
3) Marque un point M distinct de I. Construis le point M' tel que IM = IM' et $\left(\widehat{\overrightarrow{IM};\ \overrightarrow{IM'}}\right)=\frac{\pi}{3}$ rad.
4) Marque un point N distinct de I. Par ce même procédé, construis le point N' correspondant du point N.
5) Quel transformation du plan correspond à ce procédé ?

Définition

Soit Ω, un point donné et θ un réel appartenant à]-π, π].
On appelle rotation de centre Ω, et d'angle de mesure θ, la transformation du plan qui,

- à tout point M distinct de Ω associe le point M tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \end{cases}$

- à Ω associe Ω.

On la note généralement r ou $r(\Omega, \theta)$.

Ainsi si M est différent de Ω, $r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \end{cases}$

Et r(Ω) = Ω.

Remarques :

- Si $\theta = 0$ alors pour tout point M, M = M'. on dira que la rotation d'angle nulle est l'identité du plan.
- Le centre Ω et l'angle θ sont appelés les éléments géométriques caractéristiques de la rotation.

Exercice
Soit ABC un triangle de sens direct et Ω un point du plan.
Construis les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Propriétés

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ on a :
- L'image de Ω par r est égale à Ω lui même et Ω est le seul point invariant par r.
- Pour tous points A et B d'images respectives A' et B',
on a AB = A'B' et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \theta$.
- L'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon R par une rotation r(I, θ) est le cercle (C') de centre O' image de O par r et de même rayon R.
- La rotation conserve les angles orientés de vecteurs.

Conséquences :
- Lorsque $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$, l'image d'une droite par une rotation est une droite qui lui est sécante.
- L'image d'un segment est un segment de même longueur.

Exercices d'application

Exercice 1
Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC de sens direct. Trouve les images de A, B, C par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2
On donne deux points distincts A et B. construis à l'aide de la règle et du compas le point C image de B par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$. Quelle est la nature du triangle ABC.

HOMOTHETIE

Activité préparatoire

Soit ABC un triangle, C' le milieu de [AB] et B' le milieu de [AC].
Exprime $\overrightarrow{AB'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
Soit I le milieu de [BC]. Construis le point I' tel que $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$.
M étant un point quelconque du plan, construis le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
Tu viens ainsi d'établir un procédé te permettant d'associer à tout point M du plan un unique point M'.

Ce procédé qui, à tout point M du plan associe le point M tel que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ est une transformation du plan appelée homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Définition

Soit Ω un point donné et k un réel non nul, on appelle homothétie de centre Ω et de rapport k la transformation du plan qui à tout point M associe le point M tel que :
$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.
On la note généralement h ou $h(\Omega, k)$.
Ainsi $h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Remarques :
- Si $k = 1$ alors pour tout point M du plan, M = M' : une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan.
- Le centre Ω et le rapport k sont appelés les éléments caractéristiques de l'homothétie h.

Exercice
Marque quatre points distincts A, B, C et E du plan.
Construis les points A', B', C' images respectives des points A, B, C par l'homothétie de centre E et de rapport -2.

Propriétés

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 1$.

Propriété1
Le centre Ω d'une homothétie h de rapport différent de 1 est le seul point invariant par h.

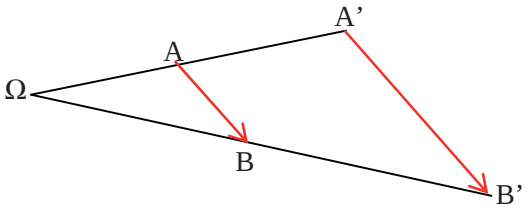
Exercice :
Démontre la propriété 1 .
Indication :
- Montre que $h(\Omega) = \Omega$.
- Montre que pour tout point M du plan si $h(M) = M$ alors $M = \Omega$.

Retiens :
Le centre d'une homothétie de rapport différent de 1 est le seul point invariant par cette homothétie.

Propriété 2
Si M est un point d'image M' par une homothétie de centre Ω, alors M, M' et Ω sont alignés.

Exercice
Déduis la propriété 2 de la définition d'une homothétie.

Propriété 3
Pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par l'homothétie h(Ω, k), on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.



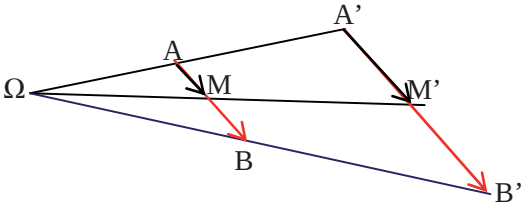
Exercice :
Démontre la propriété 3

Indications :

- Exprime $\overrightarrow{\Omega A'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega A}$ puis $\overrightarrow{\Omega B'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega B}$.
- Déduis-en que $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Retiens :
Pour tous points A et B d'images respectives A' et B' par l'homothétie h(Ω, k), on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Propriété 4
Soient A, B et M trois points d'images respectives A', B' et M' par l'homothétie h et x un réel.
Si $\overrightarrow{AM}$ = x.$\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'M'}$ = x.$\overrightarrow{A'B'}$.



Preuve :
On a : $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$ (i) et $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ (ii).
Si $\overrightarrow{AM}$ = x.$\overrightarrow{AB}$ alors $k\,\overrightarrow{AM}$ = x $k\,\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{A'M'}$ = x.$\overrightarrow{A'B'}$.

Retiens :
L'homothétie h conserve la colinéarité et le coefficient de colinéarité.

Conséquences :

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment [AB] est le segment [$A'B$] tel que $A'B' = |k|AB$ où A' et B' sont les images respectives de A et B (cela signifie aussi que l'homothétie multiplie les longueurs par $|k|$.
- Une homothétie conserve le milieu d'un segment
- L'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon r par une homothétie h(I, k) est le cercle (C') de centre O' image de O par h et de rayon |k|r.
- L'homothétie conserve l'orthogonalité.

Exercice
Démontre les cinq dernières propriétés d'une homothétie.

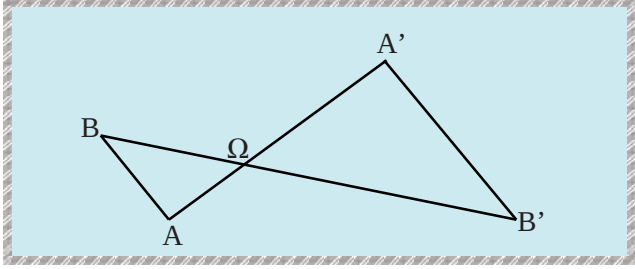
Homothétie et configuration de Thalès

Activité 1 :
Soit Ω un point donné h l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui transforme un point A en A' et un point B en B'.

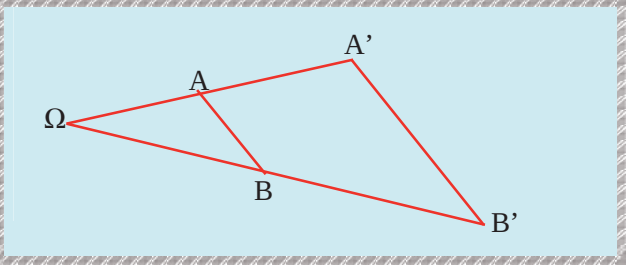
1) Fais une figure pour $k = \frac{2}{3}$. Qu'en déduis-tu pour les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$?
2) Fais une figure pour $k = -\frac{1}{2}$. Qu'en déduis-tu pour les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$?

Retiens :
Dans une homothétie, deux points, leurs images et le centre forment une configuration de Thalès.

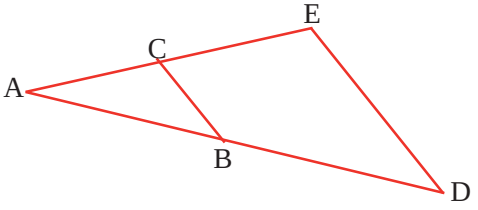
Configuration dans le cas où k est négatif



Configuration dans le cas où k est positif.



Activité 2
Soit ABC et ADE deux triangles en position de Thalès (voir figure).
Soit h l'homothétie de centre A qui transforme C en E.



1) Montre que la droite (ED) est l'image de (CB) par h.
2) Montre que h(B) appartient à la droite (AB).
3) Déduis des questions précédentes que h(B) = D.
Déduis-en que l'image du triangle ACB par h est le triangle AED.

Retiens :
Si deux triangles sont en position de Thalès, il existe une homothétie qui transforme l'un en l'autre.

Exercice :
Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en A' , M un point n'appartenant pas à la droite (ΩA).
Donne un programme de construction de l'image M de M puis place M.

Expression analytique

Activité
Soit Ω (x_0, y_0) un point du plan, h l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$.
Justifie que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$.
Déduis-en que $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

Retiens :
$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$ est l'expression analytique de l'homothétie de centre Ω (x_0, y_0) et de rapport k.

Exercice :
Détermine l'expression analytique de l'homothétie de centre Ω(2 ;-5) et de rapport 3.
Calcule les coordonnées du point E image du point F(-2; −5) par cette homothétie.

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

Homothéties de même centre

Activité 1:
Soit A un point du plan h et h' deux homothéties de centre A et de rapports respectifs -2 et 3. Soient M, M' et M'' trois points du plan tels que :
h(M) = M' et h'(M') = M''

1) Etablis les égalités suivantes : $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM''} = 3\overrightarrow{AM}$.
2) Déduis-en que $\overrightarrow{AM''} = -6\,\overrightarrow{AM}$
3) Montre que M'' est l'image de M par une homothétie h_1 que tu préciseras *(il s'agit de donner ses éléments caractéristiques)*
4) Montre que $h_1(M) = h'[h(M)] = M''$

Sais-tu que h_1 est la composée de h suivi de h'; on note $h_1 = h' \circ h$ et on lit «h' rond h».
$h' \circ h\,(M) = h'[h(M)]$ c'est-à-dire l'image de h(M) par h'.

Activité 2
Soit h et h' deux homothéties de même centre A et de rapport respectif k et k'.

1) Si $kk' \neq 1$, démontre que h'oh est une homothétie de même centre et de rapport kk'.
2) Si $kk' = 1$, démontre que h'oh est l'identité.

Indications pour la démonstration
Soit A un point du plan h et h' deux homothétie de centre A et de rapports respectifs k et k' tels que h(M) = M' et h'(M') = M''
Déduis-en les égalités suivantes : $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM''} = k'\overrightarrow{AM}$; puis montre que $\overrightarrow{AM''} = kk'\overrightarrow{AM}$.

Retiens :
Théorème : Soient h et h' sont deux homothéties de même centre A et de rapport respectif k et k'.
-Si $kk' \neq 1$, alors leur composée est une homothétie de même centre et de rapport kk'.
- Si $kk' = 1$, alors leur composée est l'identité dans le plan.

Homothéties et translations

Activité introductive

Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$, considère le vecteur $\vec{u}(2,3)$ et le point A (-1, 4).

Désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 5 et par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Pour tout point M du plan, on pose : $t_{\vec{u}}(M) = M_1$ et $h(M_1) = M_2$ avec $M(x,y)$, $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$.

Montre que :

a) $t_{\vec{u}}(M) = M_1$ équivaut à $\begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y + 3 \end{cases}$ b)$h(M_1) = M_2$ équivaut à $\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 4 \\ y_2 = 5y_1 - 16 \end{cases}$

2) Déduis-en que $hot_{\vec{u}}(M) = M_2$ équivaut à $\begin{cases} x_2 = 5x + 14 \\ y_2 = 5y - 1 \end{cases}$.

Quelle est la nature de $hot_{\vec{u}}$? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

Retiens :

Théorème : La composée d'une homothétie de centre A, de rapport k et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est une homothétie de même rapport.

Symétries orthogonales

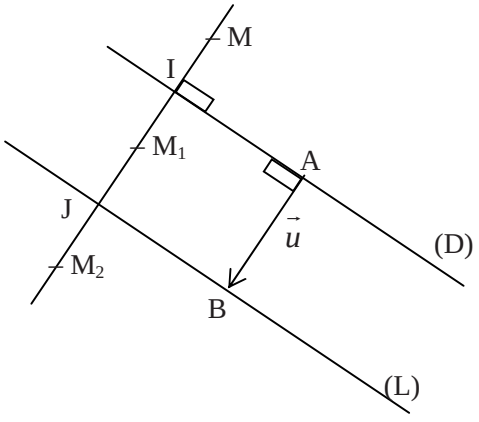
a)Axes parallèles

Activité :

Sur la figure ci-contre M_1 est l'image de M par la symétrie $S_{(D)}$ d'axe (D) et M_2 l'image de M_1 par symétrie $S_{(L)}$ d'axe (L).

Montre que $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM'} = kk'\overrightarrow{AM}$.

Déduis-en que S_D o S_L(M) = $t_{2\vec{u}}(M)$

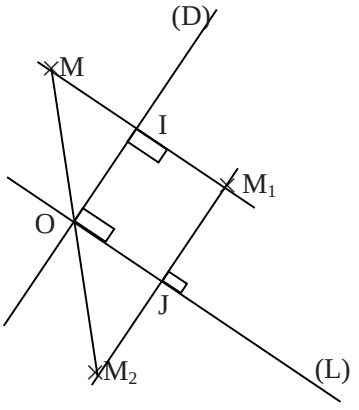


Retiens :
Théorème : La composée de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ suivie de la symétrie orthogonale $S_{(L)}$ d'axes parallèles est une translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur normal aux deux axes, dont la norme est égale à la distance entre ces deux axes et dont le sens est celui de (D) vers (L).

Exercice d'application
Soit ABCD un rectangle. Donne la nature et l'élément caractéristique de chacune des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

b) Axes perpendiculaires

Activité
Sur la figure ci-contre M_1 est l'image de M par la symétrie $S_{(D)}$ d'axe (D) et M_2 l'image de M_1 par symétrie $S_{(L)}$ d'axe (L).
Montre que le point d'intersection O de (D) et (L) est le milieu de $[MM_2]$. Déduis-en que M_2 est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.



Retiens :
Théorème : La composée des symétries orthogonales $S_{(D)}$ et $S_{(L)}$ d'axes perpendiculaires en un point O est la symétrie centrale de centre O.

Exercice d'application
Soit ABCD un rectangle. Donne la nature et l'élément caractéristique de chacune des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(CD)}$.

LIEUX GEOMETRIQUES

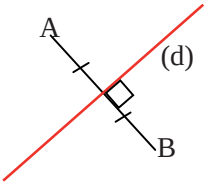
Exemples de lieux géométriques d'un point

Exemples

Exemple 1

Enoncé :
Soient A et B deux points fixes du plan. Détermine l'ensemble des points M du plan tels que MA = MB.

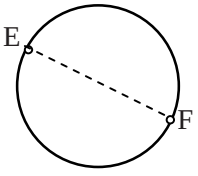
Solution
L'ensemble des points M du plan tel que MA = MB est la médiatrice (d) du segment [AB].
On dit que (d) est le lieu géométrique du point M tel que MA = MB.



Exemple 2

Enoncé :
Soit E et F deux points fixes du plan ; M un point mobile tel que FME soit un triangle rectangle en M
Quel est le lieu géométrique de M ?

Solution
Le lieu géométrique des points M tels que FME soit un triangle rectangle en M est le cercle de diamètre [EF] privé des points E et F.



Exemple 3
Soit O un point fixe du plan et r un réel strictement positif, le lieu géométrique de M tel que OM = r est le cercle de centre O et de rayon r.

Exemple 4

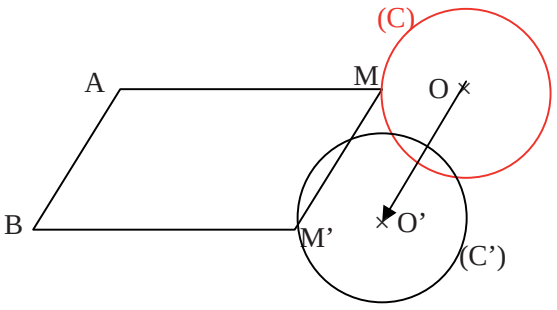
Enoncé
Soit A et B deux points fixes du plan ; M et M' deux points mobiles tels que ABM'M soit un parallélogramme.
Quel est le lieu géométrique de M' lorsque M décrit un cercle fixe (C) de centre O et de rayon r?

Solution

ABM'M est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.

On a donc M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Or l'image de (C) par une translation est le cercle (C') de même rayon et dont le centre est O' l'image de O. Donc le lieu géométrique de M' est (C').



EXERCICES ET PROBLEMES

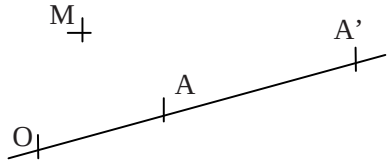
Exercices d'application

Nature et éléments caractéristiques d'une transformation

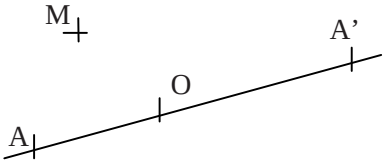
Exercice1

Dans chacune des figures suivantes, construire l'image M' de M par l'homothétie h de centre O qui transforme A en A'

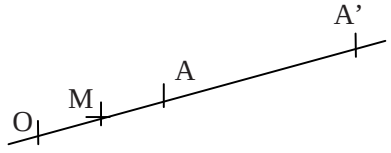
a) Figure 1



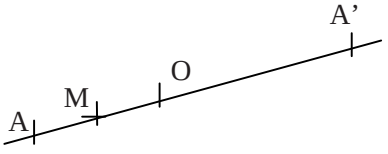
b) Figure 2



c) Figure 3



d) Figure 4



Exercice 2

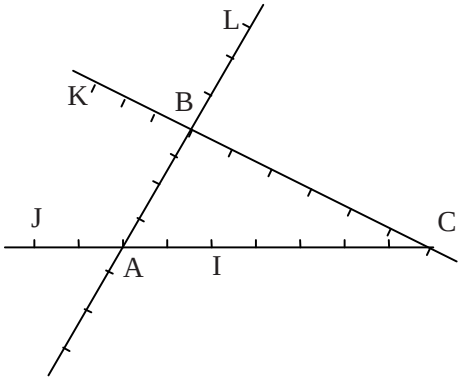
On donne la figure ci-contre ; les graduations sur les droites sont régulières et de même pas.

1) Détermine le rapport de l'homothétie h dans chacun des cas suivants :

a) h a pour centre B et h(C) = K.

b) h a pour centre C et h(K) = B

c) h a pour centre A et h(J) = C .



2) Détermine le centre I de l'homothétie h dans chacun des cas suivants :

a) h(B) = C et le rapport de h est 3.

b) h(C) = K et le rapport de h est $\frac{-1}{2}$;

c) h(B) = L et le rapport de h est $\frac{7}{4}$;

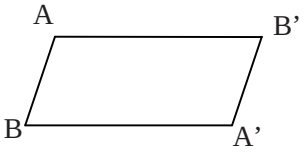
d) h(B) = A et le rapport de h est $\frac{7}{3}$

e) h(I) = J et le rapport de h est -1.

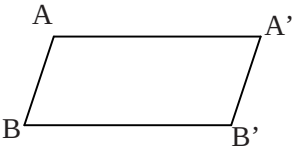
Exercice 3

Dans chacune des figures suivantes, existe-t-il une homothétie telle que h(A) = A' et h(B) = B'. Déterminer, le cas échéant, le centre et le rapport de h.

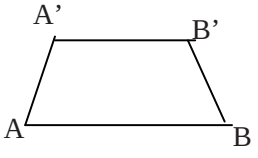
a) AB'A'B est un parallélogramme.



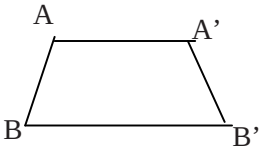
b) ABB'A' est un parallélogramme.



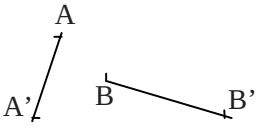
c) AA'B'B est trapèze de base [AB] et [A'B'].



d) ABB'A' est trapèze de base [AA'] et [B'B'].

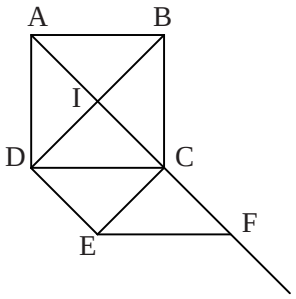


e)



Exercice 4

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre I.
ICED est un parallélogramme de même que CDEF.
f est une application du plan orienté dans lui-même.
Dans chacun des cas suivants, donne la nature si possible de f (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie centrale) ;

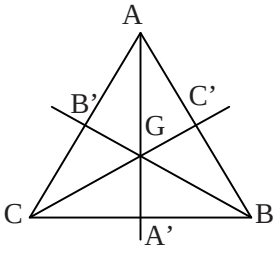


précise le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f.
NB: on ne considérera que les transformations dont les éléments caractéristiques n'utilisent que les points indiqués sur la figure.

a) f(A) = B et f(D) = C ;
b) f(A) = B et f(B) = C ;
c) f(A) = C, f(B) = D et f(D) = D.
d) f(A) = E, f(D) = D et f(B) = B
e) f(I) = I et f(A) = F
f) f(I) = I, f(B) = D et f(A) = F
g) f(A) = C
h) f(A) = A, f(C) = C, f(E) = E.

Exercice 5

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G.
g est une application du plan orienté dans lui-même. Dans chacun des cas suivants, donne la nature possible de g (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie centrale) ; précise le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f.

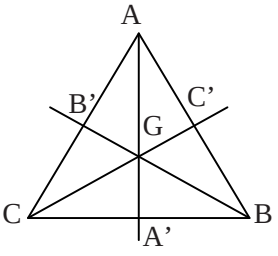


NB: on ne considérera que les transformations dont les éléments caractéristiques n'utilisent que les points indiqués sur la figure.

a) g(A) = B et g(B) = C ;
b) g(C) = B ;
c) g(A') = C;
d) g(B) = B'
e) g(B) = G
f) g(C') = A;
g) g(G) = G, g(B) = A et g(A) = A'.

Exercice 6

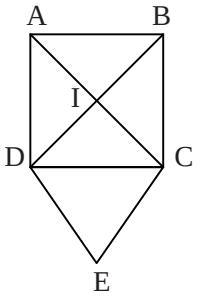
Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G.
1) Trouve les applications f (rotation, translation, symétrie orthogonale, homothétie ou symétrie central) utilisant pour leur définition seulement les points indiqués sur la figure dans chacun des cas suivants. Donne le cas échéant les éléments géométriques caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :



a) f transforme le triangle AGB’ en GC’B ;
b) f transforme le triangle AA’C en ABB’ ;
c) f transforme le triangle B’GC en C’GB.
d) f transforme le triangle AB’C’ en BAC ;
e)) f transforme le triangle ABC en A’C’B ;
f)) f transforme le triangle A’B’C en AB’C’.
2) a) Trouve deux symétries orthogonales dont la composée transforme le triangle AGB’ en GC’B.
b) Trouve une translation t et une rotation r dont la composée dans cet ordre (rot) transforme le triangle équilatéral A’B’C en BC’A’, triangle équilatéral.

Exercice 7

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 4 cm, DCE est un triangle équilatéral.

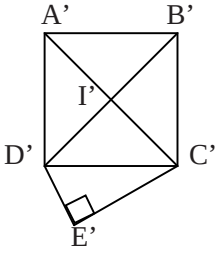


1) a) Reproduis la figure en dimensions réelles.
b) Construis l’image de cette figure par la translation de vecteurs $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et calcule son aire ainsi que son périmètre.

2) a) Reproduis la figure en dimensions réelles puis construis son image par l’homothétie de centre E et de rapport -2 ; calcule l’aire et le périmètre de la figure image.

b) Même question qu’en a) en remplaçant l’homothétie par la rotation de centre C et d’angle $-\frac{\pi}{4}$.

3) Un élève a donné comme réponse à une des questions précédente la figure suivante dans laquelle A’B’C’D’ est un carré de coté 4 cm et D’C’E’ est un triangle rectangle en E’. En tenant compte des propriétés des transformations utilisées précédemment, vérifie si une telle figure est possible.



Exercice 8

On donne un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) On donne les points A (2 ; - 1), B (1 ; 3) et C(-1 ; -2).
Détermine l’expression analytique de chacune des transformations suivantes :

a) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) f est la symétrie orthogonale d’axe (BC)
c) f est l’homothétie de centre A et de rapport -2.
d) f est la symétrie centrale de centre C.

2) Détermine la nature et les éléments géométriques caractéristiques de l'application f du plan dans lui-même définie analytiquement par :

a) f : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$ b) f : $\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y \end{cases}$ c) f : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

d) f : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ e) f : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ f) f : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

3) Pour chacune des applications de la question 2) , détermine les images des points A, B et C.

Exercice 9

A et B sont deux points distincts du plan ; f une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M'. Détermine la nature et les éléments géométriques caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

a) $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$;

b) $3\overrightarrow{MM'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \vec{0}$;

c) $4\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MM'}$;

d) $\overrightarrow{MM'} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$;

e) $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA}$;

f) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}$;

g) $3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$;

h) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

Exercice 10

Soit A et B deux points distincts ; f est l'application qui transforme A en B.
On suppose que pour tout point M, f(M) = M' tel que $\overrightarrow{BM'} = 3\overrightarrow{AM}$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 11

On donne deux segments [AA'] et [BB'] tels que les droites (AA') et (BB') soient sécantes et (AB) parallèle à (A'B').
Montre qu'il existe une homothétie h qui transforme A en A' et B en B'.
Construis son centre O.

Exercice 12

ABC est un triangle équilatéral de coté 6 cm et de centre de gravité I.
1) Construis le cercle (C_1) circonscrit à ABC et le cercle (C_2) inscrit à ABC.
2) Détermine une homothétie transformant (C_1) en (C_2).
3) Combien d'homothéties répondent à cette question ?

Exercice 13

On considère un parallélogramme ABCD de centre O. Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [DC], (DI) et (BJ) se coupe en G.
1)Montre que G est le centre d'une homothétie transformant I en D, J en B et A en C.
2) Exprime l'aire du quadrilatère AIGJ en fonction l'aire du quadrilatère BGDC.

Exercice 14

Dans le plan orienté considère deux cercles (C) et (C') de même rayon r et dont les centres respectifs O et O' sont distincts. (C) et (C') sont séquents en A et B. On suppose que le triangle AOB est direct.

1) Montre qu'il existe une rotation r de centre A qui transforme (C) en (C') et une rotation de centre B qui transforme (C) en (C').

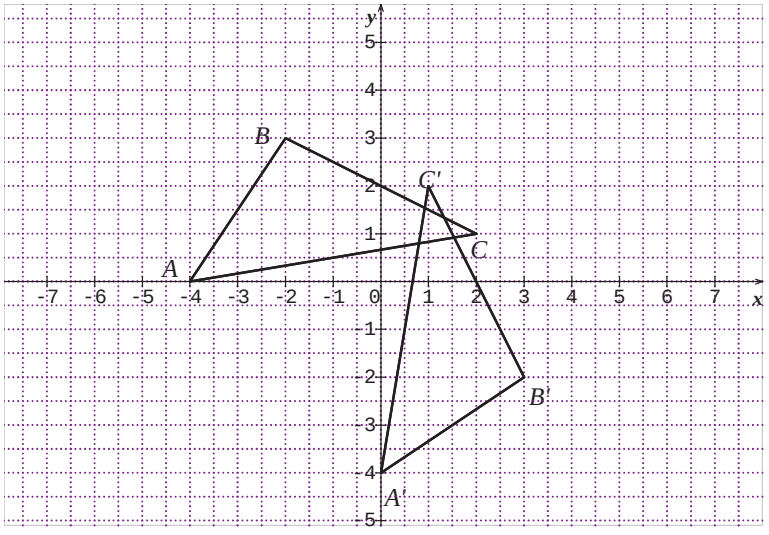
2) a) Une droite passant par B coupe (C) en M et (C') en M'. Montre que AM = AM' et que $\widehat{MAM'} = \widehat{OAO'}$.

b) Déduis-en que M' est l'image de M par la rotation r.

Exercice 15

1) A partir du graphique ci-contre, détermine les coordonnées des points : A ; B ; C ; A' ; B' et C'.

2) Identifie la transformation qui transforme le triangle ABC en A'B'C'.



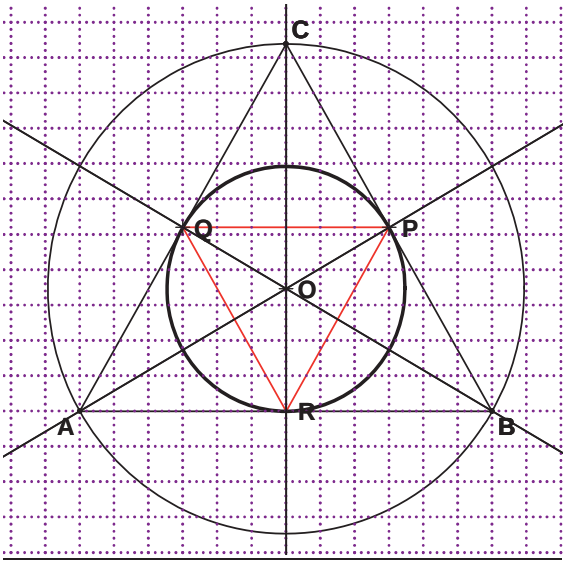
Exercice 16

Sur la figure ci-contre, ABC désigne un triangle équilatéral. P, Q et R désignent respectivement les milieux de [BC] ,[AC] et [AB]

Soit (C) et (C') les cercles circonscrits respectivement aux triangles ABC et PQR et O leur centre.

1) Identifie la transformation qui transforme :

- ABC en ARQ
- ARQ en ABC
- AQR en RPB
- ABC en PQR



2°) Trouve le centre et l'angle de la rotation qui échange PCQ e n PQR

3°) Trouve le centre et le rapport de l'homothétie qui transform e le cercle (C) au cercle (C')

4°) On suppose maintenant que $AB = a$.

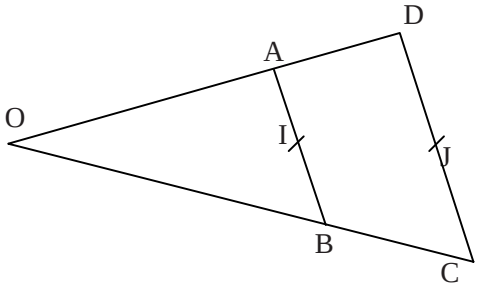
a) Calcule en fonction de a l'aire du triangle ABC et du cercle (C)

b) Déduis-en l'aire du triangle PQR et du cercle (C').

Alignement de points

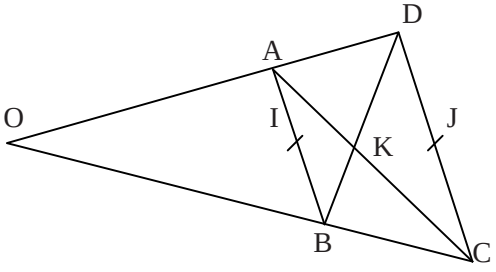
Exercice 17

Soit ABCD un trapèze dont les bases [AB] et [CD] ont pour milieux respectifs I et J.
On note O le point d'intersection des droites (AD) et (BC).



On veut montrer que O, I et J sont alignés. On appelle h l'homothétie de centre O qui transforme A en D.
a) Détermine h(B).
b) Déduis-en h(I).
c) Justifie l'alignement des points O, I et J.

Exercice 18
Soit ABCD un trapèze dont les bases [AB] et [CD] ont pour milieux respectifs I et J. K est le point d'intersection de ses diagonales. On note O le point d'intersection des droites (AD) et (BC). (voir figure ci-contre)



On veut montrer que les points O, I, J et K sont alignés.
a) En choisissant une homothétie adéquate, montre que les points I, K et J sont alignés.
b) En utilisant le résultat de l'exercice 11, justifie que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 19

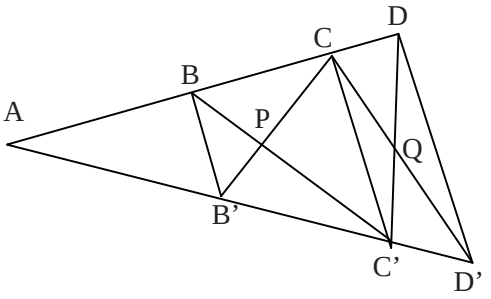
A, E et I sont trois points alignés dans cet ordre et O un point n'appartenant pas à la droite (AE). On considère les carrés OABC, OEFG, OIJK situés du même coté par rapport à (AE).

En utilisant la rotation une centre O, montre que les points C, F et J sont alignés.

Exercice 20

Sur la figure ci-contre, les droites (BB'), (CC') et (DD') sont parallèles. P est le point d'intersection de (BC') et de (B'C), Q est le point d'intersection d' (CD') et (DC') et A est le point d'intersection de (BD) et (B'D').

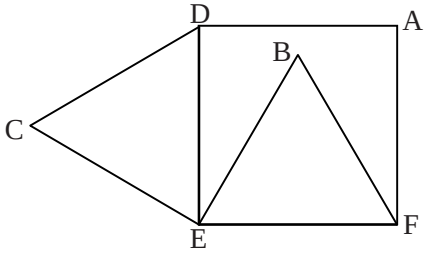
Montre que les points A, P et Q sont alignés.



Exercice 21

On considère un carré direct ADEF et les triangles équilatéraux BEF et CED ;

1) Construis le point M tel que AEM soit un triangle équilatéral direct.
2) Montre M, F et D sont alignés
3) En utilisant la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$, montre que A, B et C sont alignés.



Parallélisme de droite

Exercice 22

On considère trois demi-droites [Ox), [Oy) et [Oz) de même origine. On considère les A et A' distincts sur [Ox), B et B' sur [Oy) , C et C' sur [Oz) tels que :

(AB) // (A'B') et (BC) // (B'C').

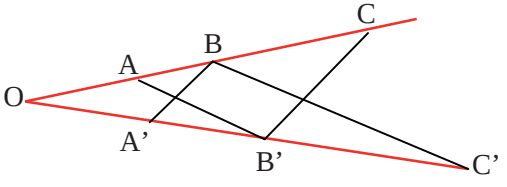
En considérant l'homothétie h de centre O et qui transforme A en A', montre que (AC) // (A'C').

Exercice 23

Sur la figure ci-contre, on a :

AB') // (BC') et (BA') // (CB').

On désigne par h l'homothétie de centre O qui transforme A en B et k l'homothétie de centre O qui transforme B en C.



1) Démontre que : k(h(A)) = C et k(h(A') = C'.
2) Déduis-en que les droites (AA') et (CC') sont parallèle.

Exercice 24
On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et le cercle (C) de centre O et circonscrit au triangle ABC.
Le cercle (C') de diamètre [OC] recoupe (AC) en I, (OI) coupe en E le demi-cercle de diamètre [BC] contenant A. La médiatrice de [AB] coupe en F le demi-cercle de diamètre [BC] ne contenant pas A.
Détermine les images des points A, B et E par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et déduis-en que (AC) // (OF).

Exercice 25
ABCD est un losange. On considère les droites (d_1), (d_2) et (d_3) telles que :

- (d_1) passe par B et est parallèle à (AC)
- (d_2) passe par D et est parallèle à (AC)
- (d_3) est le symétrique de (AC) par rapport au point B.

Détermine les images respectives des droites (d_1) et (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ et déduis-en que (d_2) est parallèle à (d_3).

Droites concourantes

Exercice 26
ABCD est un trapèze de base (AB) et (CD). Soient I le point d'intersection des droites (AD) et (BC), et J le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
Soit M le milieu de [AB], N celui de [CD] ;
En considérant l'homothétie qui transforme A en D, montre que (BC), (MN) et (AD) sont concourantes.

Exercice 27
On considère un triangle ABC. I est l'image de B par l'homothétie h_1 de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ et J l'image de C par l'homothétie h_2 de centre B et de rapport $\frac{3}{5}$ et K l'image de C par l'homothétie h_3 de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.
Montre que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

Exercice 28
On considère un triangle ABC dont les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus et un carré MNEF tel que M$\in$ [AB], E $\in$ [BC],F $\in$ [BC], N $\notin$ [AC] et N intérieur au triangle ABC.
On appelle J le point d'intersection des droites (BN) et (AC).
On veut construire un carré IJKL tel que I $\in$[AB], J $\in$ [AC], K $\in$ [BC], et L $\in$ [BC].
(*Un tel carré sera dit inscrit dans le triangle ABC).*
1) Fais une figure.
2) On appelle J le point d'intersection des droites (AN) et (AC).

Soit h l'homothétie de centre B qui transforme N en J ; montre que h(M) = I, h(E) = K et h(F) = L.
3) Construis les points I, K et L.
4)Justifie que IJKL est solution du problème posé.

Exercice 29
On donne un angle $\widehat{xOy}$ et deux points A et B à l'intérieur du secteur angulaire saillant.
On veut construire un point I sur [Ox) et un point J sur [Oy) tel que AIBJ soit un parallélogramme.
Soit Ω le milieu de [AB].
On suppose qu'un tel parallélogramme est construit.
1) Montre que J = S_Ω (I).
2) Montre que J appartient à la droite (d) où, (d) est l'image de (Ox) par S_Ω.
3) Utilise ce qui précède pour donner un programme de construction des points I et J, les points A et B étant donnés.

Exercice 30
On donne un cercle (C) de centre O et de rayon r et deux points distincts A et B à l'extérieur du cercle. On veut construire les points I et J de (C) tels que AIJB soit un parallélogramme.
On suppose que de tels points sont construits.
1) a) Montre $0 < IJ \leq 2r$.
b) Déduis-en que la construction n'est pas possible si AB > 2r.
2) On suppose que AB ≤ 2r. On appelle (C') le cercle image de (C) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
a) Montre que J ∈ (C').
b) Déduis-en un programme de construction des points I et J.
c) Combien de figures peut-on construire dans chacun des cas suivants :
i) AB = 2r
ii) AB < 2r .

Exercice 31
On donne une droite (d), un point A n'appartenant pas à (d), A' le symétrique de A par rapport à (d) et un point non situé sur (d) et distinct de A et A'.
Construis le symétrique B' de B par rapport (d) uniquement avec une règle non graduée dans les deux cas suivants :
a) (AB) et (d) sécantes ; b) (AB) // (d).

Exercice 32 :
On donne deux droites (x'x) et (y'y) sécantes en O. Soit A un point appartenant au secteur saillant $\widehat{xOy}$.
On veut construire un cercle (C) passant par A et tangent à la fois à (xx') et (yy').
1) On suppose un tel cercle construit. Sur quelle droite particulière est situé son centre ?

2) a) Construis un cercle (C') quelconque dans le secteur saillant $\widehat{xOy}$, tangent à la fois à (xx') et (yy').
b) Soit I l'un des points d'intersection de (C') avec (OA) et soit h l'homothétie de centre O qui transforme I en A. On pose (C) = h(C'). Montre que (C) est un cercle passant par A et tangent à la fois à (x'x) et (y'y).
c) Déduis-en un programme de construction d'un cercle (C) passant par A et tangent à (xx') et (yy').
d) Combien peut-on en construire pour A donné appartenant au secteur saillant $\widehat{xOy}$?

Exercice 33
On donne trois droites strictement parallèles (d_1), (d_2) et (d_3). On veut construire un triangle équilatéral ABC tel que $A \in (d_1)$, $B \in (d_2)$ et $C \in (d_3)$.
On suppose un tel triangle construit.
1) a) Montre que B est l'image de C par une rotation r de centre A dont tu donneras l'angle.
b) Soit Δ l'image de (d_3) par la rotation r. Montre que $B \in \Delta$.
2) a) Déduis de ce qui précède un programme de construction d'un triangle ABC répondant à la question posée.
b) Combien de triangles répondant aux contraintes peut-on construire ?

Exercice 34
On donne trois droites strictement parallèles (d_1), (d_2) et (d_3). Construis un triangle un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que : $A \in (d_1)$, $B \in (d_2)$ et $C \in (d_3)$.

Exercice 35
On donne un triangle ABC ; on veut construire un triangle IJK équilatéral tel que $I \in (AC)$, $J \in (BC)$, $K \in (AB)$ et (IJ) // (AB).
1) a) On suppose qu'un tel triangle est construit. Montre que $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ sont inférieurs strictement à 120°.
b) Déduis-en que si l'angle $\widehat{BAC}$ où $\widehat{ABC}$ est supérieur ou égal à 120°, le problème n'a pas de solution.
2) On considère un triangle ABC tel que $\widehat{BAC} < 120°$ et $\widehat{ABC} < 120°$. Soit le point E tel que ABE soit un triangle équilatéral situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C.
La droite (CE) coupe (AB) en K.
Soit h l'homothétie de centre C qui transforme E en K.
On note I = h(A) et J = h(B).

a) Construis I et J.
b) Montre que le triangle IJK est équilatéral et vérifie :

$I \in (AC)$, $J \in (BC)$ $K \in (AB)$ et (IJ) // (AB).

Exercice 36

On donne un demi-cercle de diamètre [AB], O le milieu de [AB]. On veut construire un carré IJKL tel que : I et J appartiennent à [AB], K et L appartiennent au demi cercle.

1) On suppose un tel carré construit.

Montre que I et J sont symétriques par rapport à O.

2) On considère le carré ABEF tel que E et F soient dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas le demi-cercle. On appelle K le point d'intersection de (OF) avec le demi-cercle. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme F en K.

On pose L = h(E), I = h(B) et J = h(A).

a) Construis les points I, J et L.

b) Montre que IJKL est un carré répondant à la question.

3) Montre que I et J sont symétriques par rapport à O.

Exercice 37

On donne un cercle (C) de diamètre [AB], O le milieu de [AB]. Une droite passant par A recoupe (C) en M. Soit M' le projeté orthogonal de O sur (AM).

Détermine l'ensemble des points M' (lieu géométrique de M') lorsque M décrit (C).

Exercice 38

[AA'] et [BB'] sont deux segments tels que AA' = BB' et (AA') non parallèle à (BB').

Soit (d) la médiatrice de [AB] et (d') la médiatrice de [A'B'].

1) Montre que (d) et (d') sont sécantes. On appelle O leur point d'intersection.

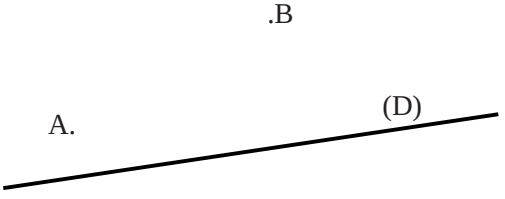
2) a) Montre que $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$.

b) Déduis-en qu'il existe une rotation r de centre O qui transforme A en B et A' en B'.

c) Les points A, A', B et B' étant donnés tels que AA'= BB' et les droites (AA') et (BB') non parallèles, donne un programme de construction du centre O de la rotation r telle que r(A) = B et r(A') = B'.

Exercice 39

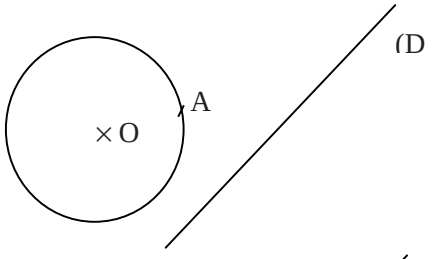
Sur le dessin ci-contre A et B désignent deux villes et (D) une plage. On décide de construire un port P sur cette plage et deux tronçons allant du port aux deux villes L'ingénieur chargé d'effectuer les travaux constate que le coût est minimal si le trajet AP + BP minimal



Où placer alors ce port sur cette plage pour que ce coût soit minimal ?

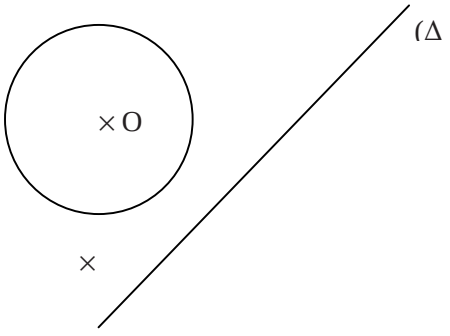
Exercice 40

Sur la figure ci-contre (D) est une droite, (C) est un cercle de centre O et A un point de ce cercle. Comment construire le cercle (Γ) tangent à (C) en A et à la droite (D)



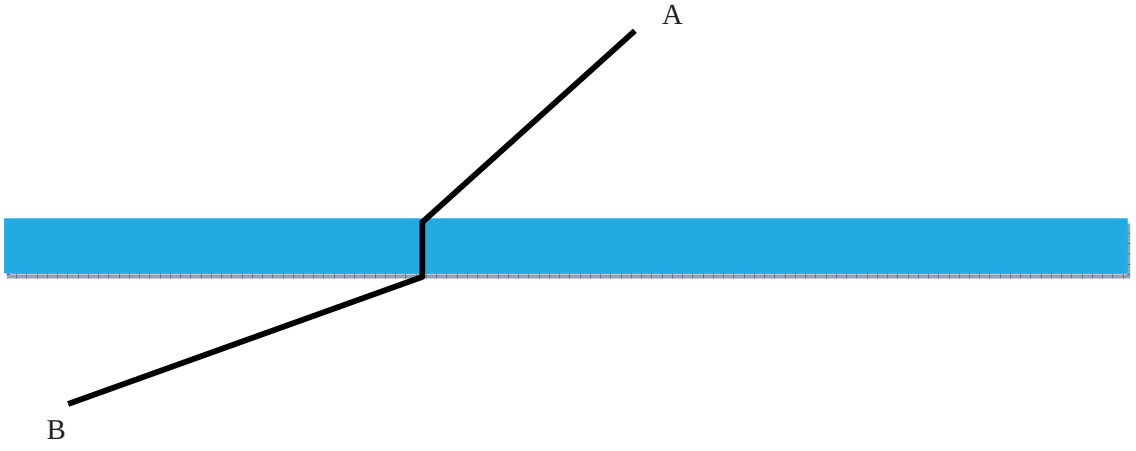
Exercice 41

Sur la figure ci-contre (Δ) est une droite, (C) est un cercle de centre O et A un point du plan. Peut-on construire un carré ABCD direct de sorte que le point B appartienne à la droite (Δ) et que le point D appartienne au cercle (C) ?



Exercice 42

Deux villes A et B sont situées de part et d'autre d'une rivière. L'état décide de construire un pont perpendiculaire au lit de la rivière .Où construire ce pont pour que le trajet pour aller de la ville A à la ville B soit minimale



Exercice 43

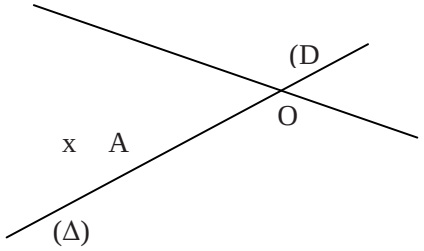
Soit un cercle (C) de centre O et M un point de (C) . Soit A et B deux points fixés situés à l'extérieur de (C)

1)Trouve le lieu géométrique du point N tel que le quadrilatère ABMN soit un parallélogramme lorsque M décrit (C).

2) Trouve le lieu géométrique du point P centre de gravité du triangle ABM lorsque M décrit (C).
3°Trouve le lieu géométrique du point Q tel que AMQ soit é quilatéral direct.

Exercice 44

Sur la figure ci- contre (D) et (Δ) sont deux droites sécantes en O. A un point fixe n'appartenant à aucune de ces deux droites. Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que B soit sur (D) et C sur (Δ)



Exercice 45

Dans le plan (P) on considère un cercle(C) de centre O et de rayon R. A et B étant deux points du plan, peut –on construire deux points M et N sur (C) tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

Exercice 46

a est un réel strictement positif. Soit ABC un triangle équilatéral de côté, I le milieu de [AB]. Soit f_λ l'application qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : $3\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC}$

1. Montre que f_1 est une application constante.
2. Pour quelle valeur λ_0 de λ, f_{λ_0} est une translation ?
3. Pour λ ∈ $IR\backslash\{1, \lambda_0\}$, détermine la nature et les éléments caractéristiques de f_λ
4. On pose $\lambda = -1$ et $f_{-1} = f$.

a) Construis B' l'image de B par f.
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
c) Construis (C') l'image de (C) , circonscrit au triangle ABC.

5. On munit le plan du repère orthonormal $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{IC}.\overrightarrow{IC}$

   a) Détermine les cordonnées des points des points I, A, B, C et G où G désigne le barycentre des points (A,-2) ; (B, 4) ; (C,-1).
   b) Détermine l'expression analytique de f dans le plan muni du repère $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   c) Détermine les coordonnées de E d'image A par f.
   d) Détermine une mesure de l'angle $\widehat{EGB'}$.

Devoir

Durée 3 heures

Exercice 1 **(3,5 pts)**

1. Indique pour chacune des égalités vectorielles suivantes le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme M en N.

a) $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

(0,5 pt)

b) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AM}$

(0,5 pt)

c) $4\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MN}$

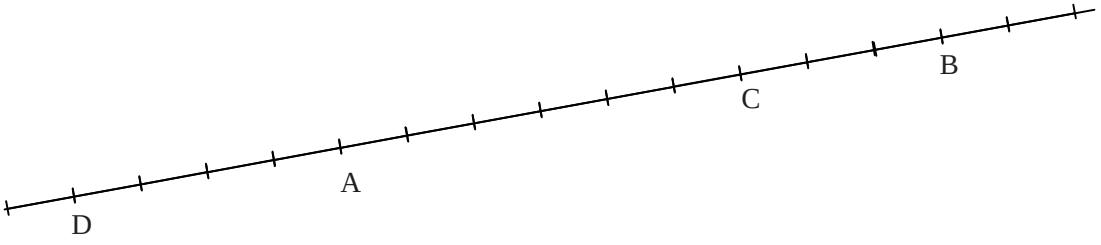
(0,5 pt)

d) $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AN} = \vec{0}$

(0,5 pt)

2. Sur la figure ci-dessous A, B, C et D sont 4 points alignés. Reproduis la figure puis construis le centre I de l'homothétie h qui transforme A en B et C en D **(1 pt)**
3. Précise le rapport de l'homothétie h.

(0,5 pt)



Exercice 2 (3 pts)

Soit ADCB un parallélogramme. On considère l'application f du plan P dans P qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

1. Détermine l'image du point B par f **(1pt)**
2. Détermine la nature de f et ses éléments caractéristiques **(2 pts)**

Exercice 3 (5,5 pts)

On considère la transformation f qui à tout point de M(x ; y) du plan associe le point M'(x' ; y') tel que : $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$

1. Démontre que f admet un point invariant I dont on précisera les coordonnées (**1pt)**
2. Démontre qu'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{IM'}$ = k.$\overrightarrow{IM}$ **(1 pt)**
3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f. **(1 pt)**
4. Soit (D) la droite d'équation : 3x – 4y = 5.
   Détermine une équation de la droite (D') image de (D) par f. (**1,5 pts)**
5. Détermine une équation de la droite (Δ) dont (D) est l'image par f. (1 **pt**)

Exercice 4 (4 pts)

Soit A et B deux points du plan, (C) un cercle de rayon r ne coupant pas (AB), M un point de (C) non situé sur la droite (AB) . Soit G le centre de gravité du triangle ABM. I milieu de [AB] ; N le symétrique de M par rapport à G

1. Fais la figure **(1 pt)**
2. Exprime $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$ (**1 pt)**
3. Précise la nature de la transformation qui transforme M en N **(0,5 pt)**
4. Détermine le lieu géométrique de N lorsque M décrit (C) **(1,5 pts)**

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Devoir

Exercice 1

1. Soit k le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme M en N

a) $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$; on trouve k =$-\frac{1}{3}$

b) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AM}$

c) On a $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AM}$, d'où $k = 3$

d) $4\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MN}$ donc $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AM}$, d'où k = -3.

e) $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AN} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, d'où k = $-\frac{2}{3}$.

2.

<u>NB :</u> ici on est en présence d'une homothétie définie par deux points A et B et leurs images respectives A' et B' situés sur (AB). Ainsi pour déterminer le centre I on se sert d'un point M non situé sur (AB).

Soit M n'appartenant à la droite (AB) et M' l'image de M par h

h(A) = B et h(M) = M' donc M' appartient à la parallèle à (AM) passant par B car l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

De la même manière on a : h(C) = D et h(M) = M' donc M' appartient à la droite parallèle à (CM) passant par D.

Soit I le centre de l'homothétie, on a : {I} = (AB)∩(MM').

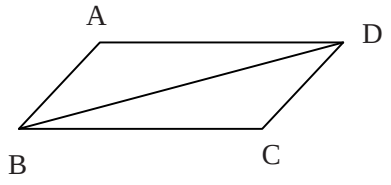
3) Soit k le rapport de cette homothétie.

On a $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{AC}$, d'où $BD = |k|AC$ BD = IkI.AC ce qui donne : IkI = $\frac{BD}{AC} = \frac{13}{6}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant de sens contraire, on en déduit que k =$-\frac{13}{6}$

Exercice 2

1) Soit B' l'image du point B par f. En remplaçant M par B et M' par B',on obtient :



$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Or ADCB un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ d'où $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC}$. Par conséquent $B' = C$.

2) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{MA} - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles

$= - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

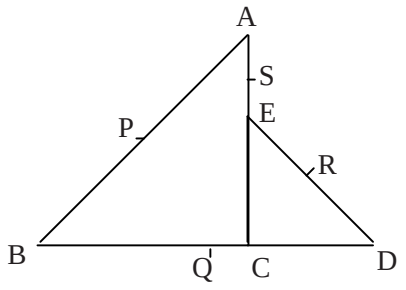
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

On en déduit que M' = $t_{\overrightarrow{BD}}$ (M).

Ainsi f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 3

Considérons la rotation r de centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$ Le triangle CDE est isocèle direct en C donc : r(D) = E Le triangle CAB est isocèle direct en C donc : r(A) = B . Comme l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ on a : (AD)⊥ (BE).	

Exercice 4

On a :M'(x' ; y') tel que : $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$

1. Détermination du point invariant

I(x ; y) invariant équivaut à : f(I) = I soit $\begin{cases} x = -3x + 4 \\ y = -3y + 2 \end{cases}$ d'où $I(1, \frac{1}{2})$.

2) $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Soit M(x ; y) et M'(x' ; y') avec f(M) = M'. On a $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ équivaut à : $\begin{cases} x' - 1 = k(x - 1) \\ y' - \frac{1}{2} = k(y - \frac{1}{2}) \end{cases}$.

Ce qui donne ; $\begin{cases} -3x + 4 - 1 = k(x - 1) \\ -3y + 2 - \frac{1}{2} = k(y - \frac{1}{2}) \end{cases}$; après calcul, on trouve k = -3.

3) D'après 1) et 2), f est l'homothétie de centre $I(1, \frac{1}{2})$.et de rapport -3 ; Soit (D) la droite d'équation : $3x - 4y - 5 = 0$.

4) Soit (D') = f(D).

$\begin{cases} x = \frac{-x'+4}{3} \\ y = \frac{-y'+2}{3} \end{cases}$ (x et y sont exprimés respectivement en fonction de x' et y')

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans l'équation 3x – 4y = 5. on obtient :
3x' – 4y' + 11 = 0. D'où (D') est d'équation : 3x – 4y + 11 = 0.

5) Equation de (Δ) avec $f(\Delta) = (D)$

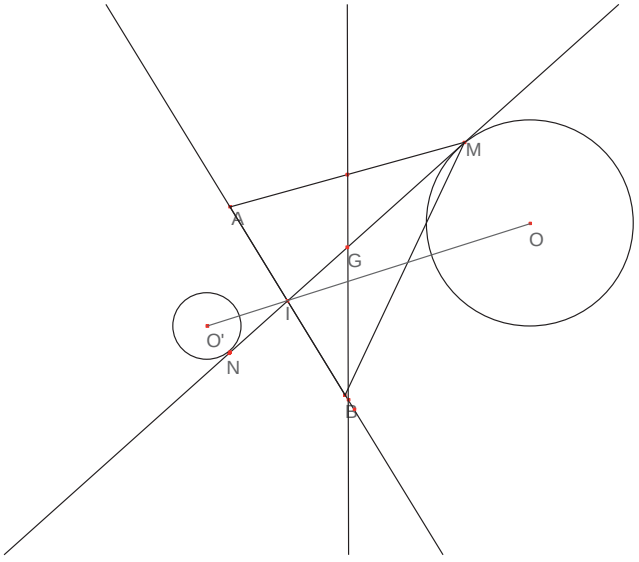
Soit M(x ; y) un point de (Δ) et M'(x' ; y') un point de (D) avec M' = f(M)

$\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$

M’ étant un point de (D), on a : 3x’ – 4y’ = 5. En remplaçant x’ et y’ par leurs valeurs dans cette égalité, on trouve : 9x – 12y + 1 = 0.
D’où (Δ) est d’équation : 9x – 12y + 1 = 0.

Exercice 5

1) figure



2) On a : N symétrique de M par rapport à G donc on a $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$;
$2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$;
Après calculs et utilisation de la propriété du centre de gravité G du triangle ABM on a :
$\overrightarrow{IN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.

3) La transformation qui transforme M en N est l’homothétie h de centre I et de rapport $-\frac{1}{3}$.

4) On a h(M) = N d’où le lieu géométrique de N lorsque M décrit (C) est le cercle (C’) image du cercle (C) par h. Notons que (C’) a pour rayon $\frac{1}{3}$ r et a pour centre O’ = f(O) avec O centre de (C).

6 GEOMETRIE DANS L'ESPACE

APERÇU HISTORIQUE

Les premières recherches connues de la géométrie sont dues aux Egyptiens et aux Babyloniens (2000 ans avant notre ère.)
Les inondations périodiques du Nil obligeaient les arpenteurs égyptiens à refaire chaque année le tracé des propriétés.
Les formules utilisées, qu'on peut retrouver dans le papyrus de Rhind étaient empiriques
On peut dire aussi que les premiers savants ne s'intéressaient pas seulement à la géométrie dans le plan mais aussi aux objets de l'espace. Les pyramides d'Egypte constituent un chef d'œuvre qui sort du cadre de l'ordinaire.
Ainsi cette géométrie dans l'espace se développa petit à petit avec l'invention au XVIe siècle par les ingénieurs militaires, de la perspective cavalière qui permettait d'obtenir une image plane la plus fidèle possible d'un objet dans l'espace. Elle montre l'agencement des parties d'un objet : c'est pourquoi elle est beaucoup utilisée en dessin industriel et en mécanique.
La géométrie dans l'espace joue une rôle important en architecture, en mécanique et astronomie….

.

OBJECTIFS

- Connaitre les règles de la perspective cavalière.
- Avoir une bonne vision de l'espace
- Résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace
- Modéliser des situations concrètes en utilisant les objets de la géométrie dans l'espace.

REPRESENTATION DE L'ESPACE

Règles de la perspective cavalière

Les figures ci-dessous sont des représentations en perspective cavalière d'un tétraèdre ABCD (figure 1) et d'un cube ABCDEFGH (figure 2).

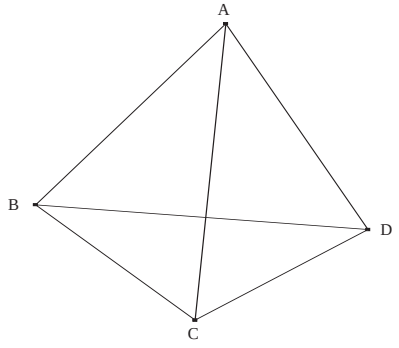


Figure 1

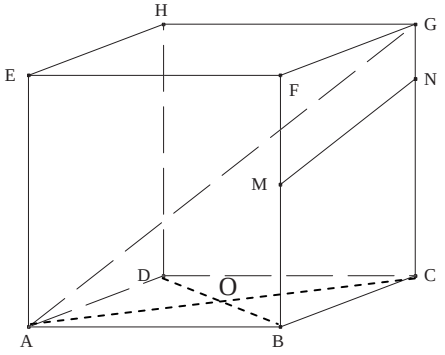


Figure 2

La représentation en perspective cavalière de solides de l'espace obéit à un certain nombre de règles dont les plus importantes sont :

Règle 1

Les lignes visibles dans la réalité sont dessinées en traits pleins ; les autres (intérieures ou cachées) en pointillés.

Exemple

Sur la figure 1 :

- les arêtes [BC] et [AC] visibles sont représentées en traits plein
- l'arête [BD] n'est pas visible (elle est cachée par les faces ABC et ACD) : elle est donc représentée en pointillés.

Sur la figure 2 : la diagonale [AG] est intérieure au cube ; elle est représentée en pointillés.

Règle 2

Deux droites (ou segments) parallèles dans la réalité sont représentées par deux droites (ou segments) parallèles.

Exemples

Les arêtes [AE], [BF], [HD] et [GC] parallèles dans la réalité ; elles sont représentées par des segments parallèles.

Règle 3
Des points alignés en réalité sont représentés sur le dessin par des points alignés.
Exemple

Les points O (centre de la face ABCD), A et C alignés dans la réalité sont représentés par des points alignés.

Règle 4
Des segments dont les supports sont des droites parallèles dans la réalité sont dans les mêmes proportions que leurs représentants.

Exemple

Le point O est dans la réalité le milieu de chacune des diagonales de la face ABCD ; ce point est représenté sur le dessin par le milieu des segments [AC] et [BD].

Règle 5
Dans un plan de face (plan perpendiculaire à la direction du regard), une figure et sa représentation sur le dessin ont la même forme : un carré par un carré, un triangle par un triangle semblable, un cercle par un cercle,….

Exemple :
Les faces carrées ABFE et DCGH dans la réalité sont représentées sur le dessin par des carrés.

Remarques

Certaines erreurs sont courantes dans lecture d'un dessin en perspective cavalière car certaines situations sont trompeuses. En voici quelques exemples.

Situation 1
Deux droites qui semblent se couper sur le dessin ne représentent pas forcément des droites sécantes.

Exemple
Dans la figure 1, l'arête [BD] semble couper l'arête [AC] alors qu'il n'en est pas ainsi dans la réalité.
De même, dans la figure 2, on peut penser que les arêtes [BF] et [CD] se coupent alors qu'en réalité elles ne le sont pas.

Situation 2
Deux droites qui semblent parallèles sur le dessin ne représentent pas forcément des droites parallèles dans la réalité.

Exemple
Les droites (AG) et (MN) ne sont pas parallèles dans la réalité.

Situation 3
Les angles droits ne sont pas toujours représentés par des angles droits (deux droites perpendiculaires n'étant pas généralement représentées par des droites perpendiculaires).

Exemple
Les droites (BF) et (BC) sont perpendiculaires dans la réalité, et pourtant sur le dessin, elles forment un angle qui n'est pas droit.

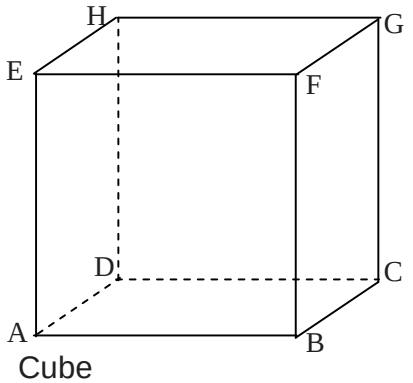
Situation 4
Deux segments de même longueur ne sont pas généralement représentés par des segments de même longueur.

Exemple : les arêtes [EF] et [EH] sont de même longueur dans la réalité, et pourtant sur le dessin, ils sont représentés par des segments de longueurs différentes.

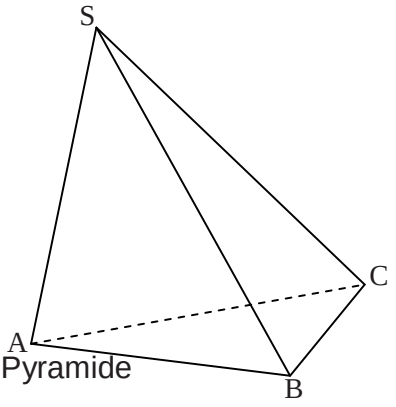
Représentation de solides de l’espace en perspective cavalière

Exemples

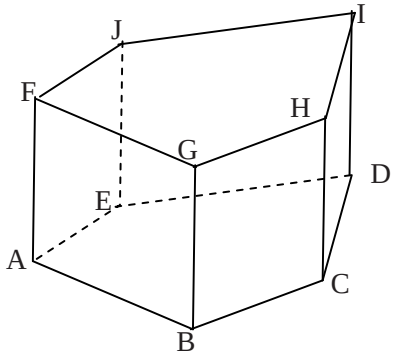
Les figures ci-dessous sont des représentations en perspective cavalière d’objets usuels de l’espace.



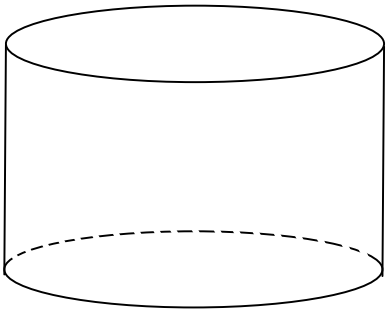
a) Cube



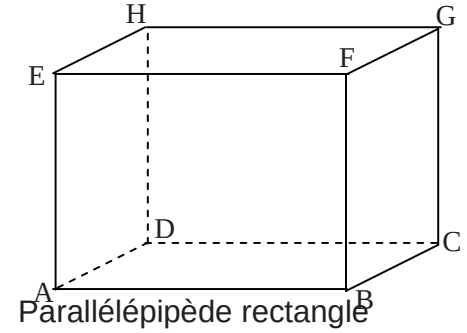
b) Pyramide



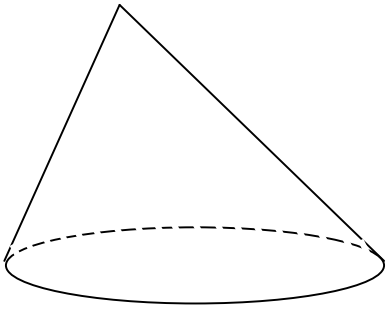
c) Prisme droit



d) Cylindre droit



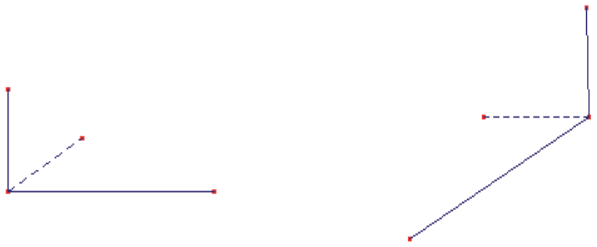
a) Parallélépipède rectangle



b) Cône

Exercice d'application :

Complète la représentation de chacun des dessins ci-dessous pour avoir la représentation en perspective cavalière d'un prise droit (ou pavé droit).



POSITION RELATIVE DE DROITES ET DE PLANS

Rappels et approfondissements

Rappel des propriétés de base

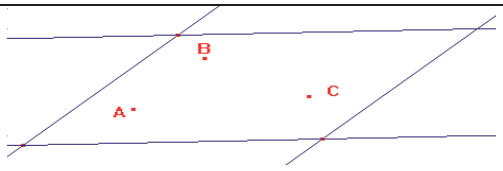
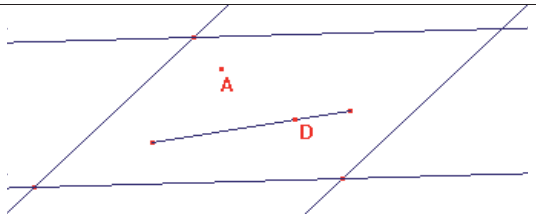
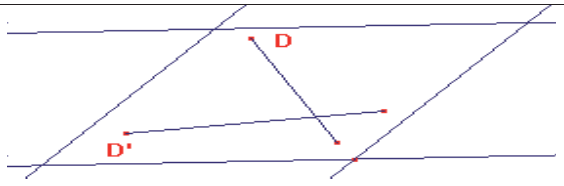
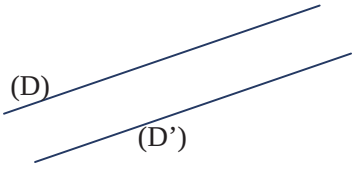
Règle 0 : Tous les résultats de géométrie plane sont applicables dans chaque plan de l'espace.

Règle 1 : Par deux points A et B distincts de l'espace passe une et une seule droite : on la désigne par (AB)

Règle 2 : Par trois points A, B et C non alignés de l'espace passe un seul plan, noté (ABC).

Règle 3 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

En conséquence :

Un plan est déterminé par :	
- trois points non alignés A, B, C. On le désigne par **plan (ABC)**	
- une droite (D) et un point A n'appartenant pas à cette droite. On le désigne alors par **plan (**D **,** A**)**	
Deux droites sécantes (D) et (D') . On le désigne par **plan (**D , D'**)**	
- deux droites parallèles.	

Vocabulaire :

- Lorsque des **points** appartiennent à un même plan on dit qu'ils sont **coplanaires**.
- Lorsque des **droites** sont contenues dans un même plan on dit qu'elles sont **coplanaires**.
- Quatre points ne sont pas coplanaires lorsque l'un n'appartient pas au plan défini par les trois autres.
- Un **tétraèdre** est un solide qui a quatre sommets non coplanaires.

Exercice d'application :

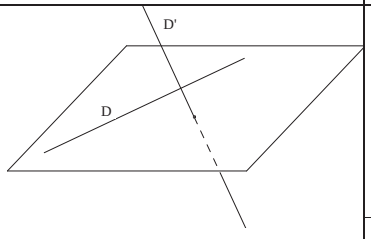
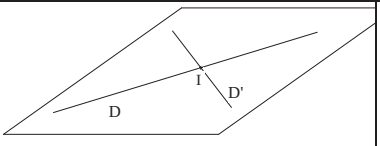
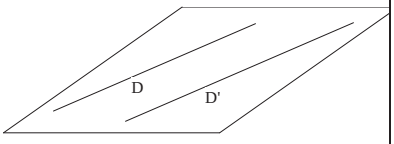
Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que les segments [AC] et [BD] aient le même milieu.

Montre que le point D appartient au plan (ABC).

REPRESENTATION DE L’ESPACE

Position relative de deux droites

Définitions :

(D) et(D') non coplanaires	(D) et (D') coplanaires	
(D) et (D’) ne sont ni sécantes, ni parallèles	(D) et (D') sont sécantes en un point I ; (D) $\cap$ (D') = {I}.	(D) et (D') sont parallèles.
		
	- I est commun à D et à D' ; - D et D' sont contenues dans un même plan **et** ne sont pas parallèles	D et D' sont contenues dans un même plan **et** ne sont pas sécantes.

Remarque :

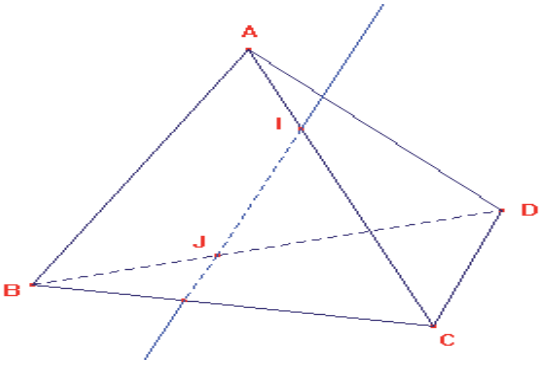
Deux droites de l’espace sont parallèles lorsqu’elles sont coplanaires et non sécantes. Elles sont alors strictement parallèles ou confondues

Exercice d'application :

Soit ABCD un tétraèdre.

1) Les droites (AB) et (CD) sont elles sécantes ?
2) Soit I un point de [AC] distinct de A et C, et J un point de [BD] distinct de B et D.

a) Montrer que I et J sont distincts.
b) Les droites (IJ) et (AB) sont elles coplanaires ?



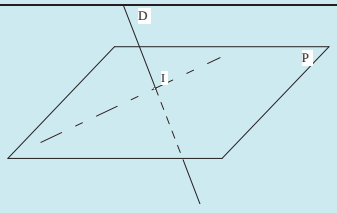
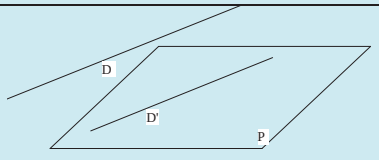
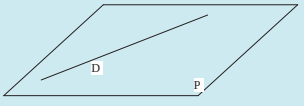
Remarque :
Si deux droites de l'espace sont parallèles, une droite qui coupe l'une ne coupe pas forcément l'autre.

Positon relative d'une droite et d'un plan

Définitions:

- Une droite (D) et un plan P sont dits sécants lorsque leur intersection est réduite un point .
- Une droite (D) et un plan P sont dits parallèles lorsqu'ils sont non sécants. On note (D)//P.
- (D)//P si et seulement si (D) $\subset$ P ou (D) $\cap$ P = $\varnothing$.

Retiens :

(D) sécantes à P	(D) est parallèle à P	
(D) "perce" P en un point I. (D) $\cap$ P = {I}	(D) et P n'ont pas de point commun. (D) $\cap$ P = $\varnothing$	(D) est contenue dans P (D) $\subset$ P
		

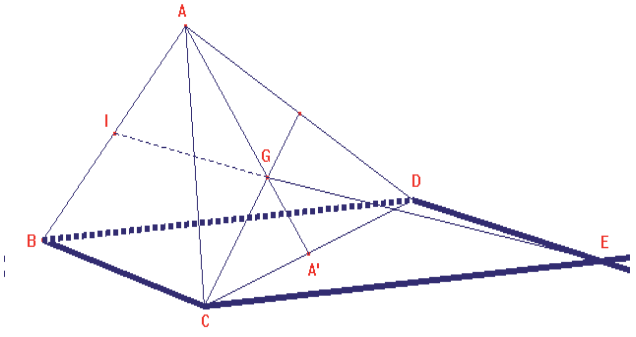
Propriétés

- **P1** : Si une droite (D) est parallèle à une droite (D') contenue dans un plan P, alors la droite (D) est parallèle au plan P.
- **P2** : Si (D) est une droite parallèle à un plan P alors (D) est parallèle à au moins une droite (D') de P
- **P3** : Si (D) est parallèle à un plan P, alors (D) ne coupe aucune droite du plan P.
- **P4** : Si deux points de (D) sont dans P alors (D) est contenue dans P.
- **P5** : Si (D) passe par un point A de (P) et est parallèle à une droite (D') de P alors (D) est contenu dans P.
- **P6** : Si (D) passe par un point A de P et si (D) est parallèle à P, alors (D) est contenue dans P.

Exercice d'application :

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu du segment [A,B], G est le centre de gravité du triangle ACD.

Montrer que la droite (IG) perce le plan (BCD) en un point E.



Position relative de deux plans

Définitions :

- Deux plans P et Q sont sécants lorsque leur intersection est une droite (Δ).
- Deux plans P et Q sont parallèles lorsqu'ils sont non sécants. On note P //Q.
- Deux plans P et Q sont strictement parallèles s'ils n'ont aucun point commun (c'est-à-dire si $P \cap Q = \varnothing$)

Retiens :

P//Q si et seulement si P = Q ou $P \cap Q = \emptyset$.

P est sécant à Q si l'intersection de P et Q est une droite.

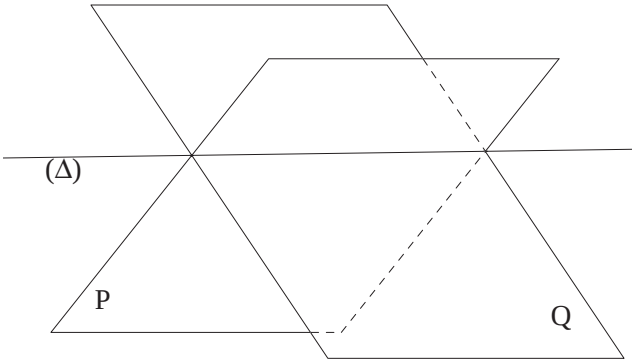
Propriétés

Propriété 1

Si P et Q sont sécants alors leur l'intersection est une droite ;

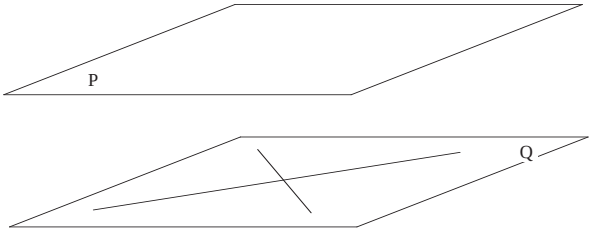
$P \cap Q = \Delta$

Remarque : Pour déterminer la droite d'intersection Δ de P et de Q, il suffit de trouver deux points communs à P et à Q .



Propriété 2

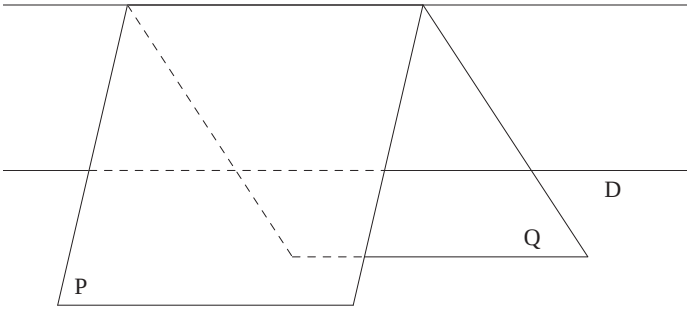
Pour qu'un plan Q soit parallèle à un plan P, il faut et il suffit que deux droites sécantes de l'un soient parallèles à l'autre.



Propriété 3

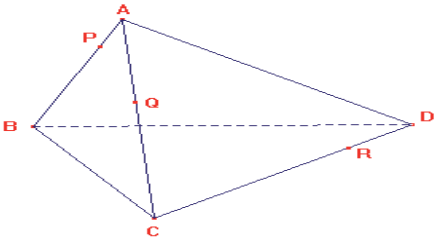
Soit P et Q deux plans sécants. Si (D) est une droite parallèle à P et à Q, alors (D) est parallèle à la droite d'intersection (Δ) de P et Q.

NB : Cette propriété est aussi appelée « théorème du toit »



Exercice d'application

La figure ci-contre représente un tétraèdre ABCD. En supposant que les droites (PQ) et (BC) sont sécantes, trace l'intersection du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.

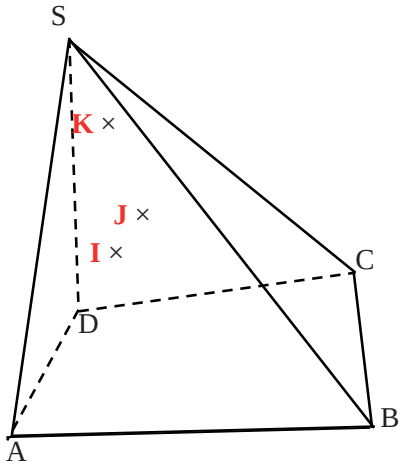


Application aux intersections de prismes et de pyramides avec des plans

Application 1:

On donne la pyramide SABCD de sommet S. Les points I et J sont des éléments de la face (SAB) ; le point K est un élément de la face (SCD).

Trace la section de cette pyramide par le plan (IJK).

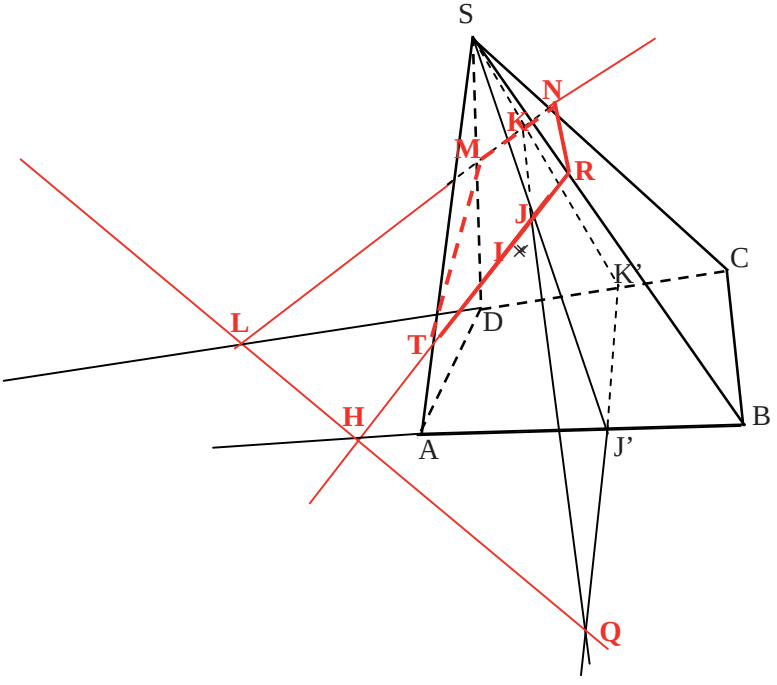


Solution

Considérons le plan (SKJ).

La droite (SK) contenue dans le plan (SDC) coupe la droite (CD) en K'.

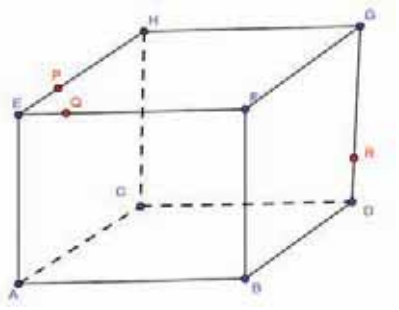
La droite (SJ) contenue dans le plan (SAB) coupe la droite (AB) en J'.
La droite (K'J') est donc contenue à la fois dans les plans (ABC) et (SKJ). Elle coupe (KJ) en Q. Donc Q est un point du plan (ABC) et du plan (IJK).
La droite (IJ) est contenue dans le plan (SAB). Elle coupe (AB) en H, (SA) en T et (SB) en R.



Le point H est à la fois dans le plan (ABC) et dans le plan (IJK). La droite (HQ) est alors la droite d'intersection de ces deux plans.
(HQ) contenue dans le plan (ABC) coupe (CD) en L. Par suite, L est dans le plan (SDC) et dans le plan (IJK). Donc la droite (KL) est contenue dans le plan (SDC). Elle coupe (SD) en M et (SC) en N.
En conclusion, la section de la pyramide SABCD par le plan (IJK) est le quadrilatère MNRT.

Application 2

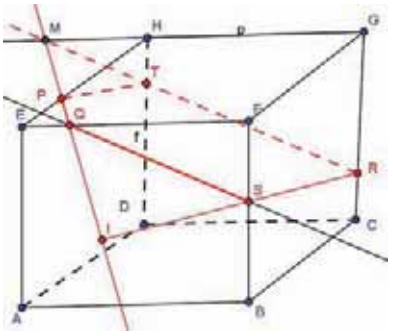
Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (PQR) dans la figure ci-dessous



Solution

On (GH) et (PQ) sont sécantes en M. Soit T le point d'intersection de (RM) et (HD). On a alors [PT] est l'intersection du plan (PQR) avec la face (AEHD).

[RT] est aussi l'intersection du plan (PQR) avec la face (CGHD). Le plan (PQR) coupe les deux plans parallèles (CGHD) et (ABFE) en deux droites parallèles. Traçons donc la droite parallèle à (RT) passant par Q. Elle coupe (EB) en S. Finalement l'intersection de (PQR) avec la face (ABFE) est [QS]



Exercice

La base ABCD d'un prisme droit est composée d'un carré AA'CD et d'un triangle isocèle A'BC. I, J et K sont des points respectifs des respectifs des arêtes[AE], [BF] et [CG].Déterminer la section de ce prisme par le plan (IJK).

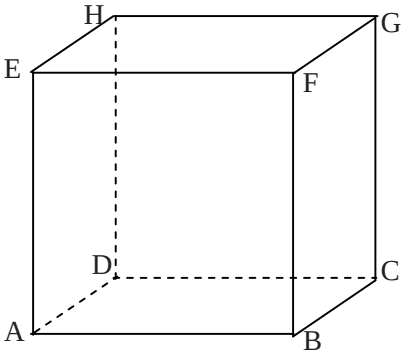
ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Droites orthogonales

Définition

Deux droites de l'espace (D) et (D') sont orthogonales s'il existe deux droites perpendiculaires ( ) et (Δ') respectivement parallèles à (D) et (D').

On note (D)⊥(D') et on lit (D) orthogonale à (D').



Exemple : Les droites (EA) et (HG) sont orthogonales car (EA)// (FB), (HG) // (AB) et (AB) perpendiculaire à (FB).

Remarques importantes

- Deux droites perpendiculaires de l'espace sont orthogonales mais deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas forcément perpendiculaires.
- Dans un même plan, deux droites orthogonales sont aussi perpendiculaires et réciproquement.

Exercice d'application

Retrouve sur le la figure ci-dessous deux droites orthogonales ; justifie ta réponse.

Propriétés :

Propriété 1 :
Lorsque deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2
Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Exemple
Dans le cube ABCDEFGH de la figure précédente, on a :
(EH) ⊥ (FB) et (FB)//(CG) donc (EH) ⊥ (CG).
(EH)//(BC) et (EA) ⊥ (EH) donc (EA) ⊥ (BC).

Remarque
Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires à une même troisième, elles ne sont pas forcément parallèles (exemples : arrêtes d'un cube issues d'un même sommet).

Exercice d'application
ABCDEFGH est un cube d'arête *a*, I est le milieu de [AB], J le milieu de [EF] et K le milieu de [FG].
1°) Montrer que le triangle IJK est rectangle en J
2°) Calculer IK en fonction de *a*.

Droite et plan perpendiculaires

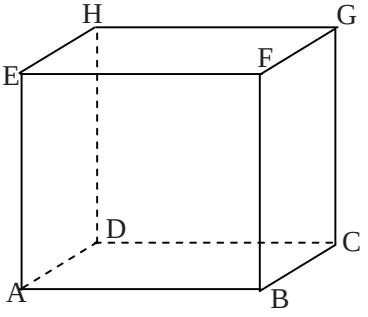
Définition :

Une droite (D) et un plan (P) sont dits perpendiculaires lorsque (D) est orthogonale à toutes les droites du plan (P).

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :

- Le plan (ABC) est perpendiculaire à la droite ((HD).
- Le plan (EGC) est perpendiculaire à la droite(BD)
- Le plan (AEF) est perpendiculaire à la droite (HE)

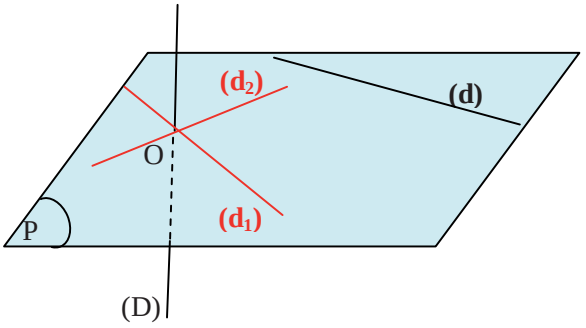


Remarque
La définition précédente de droite et de plan perpendiculaires n'est pas très pratique : il n'est guère facile de montrer qu'une droite est orthogonale à une infinité de droites. Les théorèmes suivants permettent de simplifier le travail.

Propriétés

Propriété 1 : Propriété fondamentale.

Soient P un plan, (d_1) et (d_2) deux droites de P sécantes en O. Si une droite (D) est orthogonale en O à (d_1) et (d_2), alors (D) est orthogonale à toute droite (d) de P.



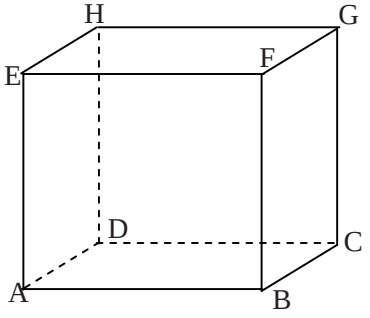
Propriété 2
Une droite (D) est perpendiculaire à plan P si et seulement si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de P.

Remarque :
Cette propriété est plus simple à utiliser pour établir qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.

Exercice

ABCDEFGH est un cube (figure ci-contre).
Montre que :

a) Le plan (ABC) est perpendiculaire à la droite (HD).
b) Le plan (EGC) est perpendiculaire à la droite(BD)
c) Le plan (AEF) est perpendiculaire à la droite (HE)

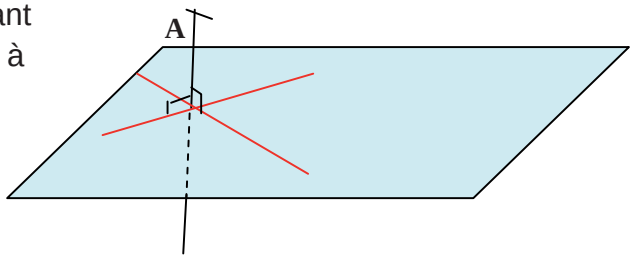


Solution de la question a)
(DA) et (DC) sont deux droites sécantes du plan (ABC). Puisque (HD) est orthogonale à la fois à (DA) et à (DC), on en déduit que (HD) est perpendiculaire au plan (ABC).

Remarque importante :
Dans la propriété 2 la condition « droites sécantes » est très importante.
En effet, considérons le plan (DCG) et la droite (DE).
On a bien (DE) orthogonale à la droite de (DC) : (DC) et (HG) sont parallèles. Et pourtant, (DE) n'est pas perpendiculaire au plan (DCG) ; il manque la condition « droites sécantes ».

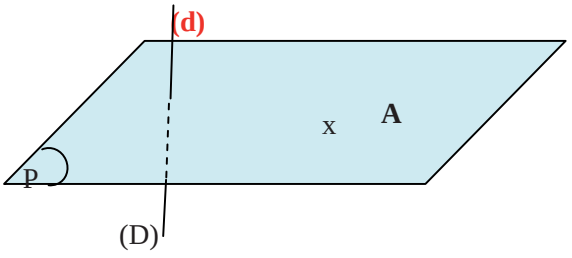
Propriété 3

Il existe une droite et une seule passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.



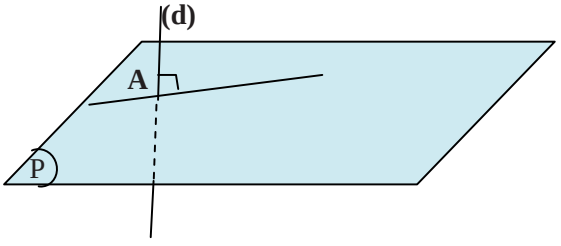
Propriété 4

Il existe un plan et un seul passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.



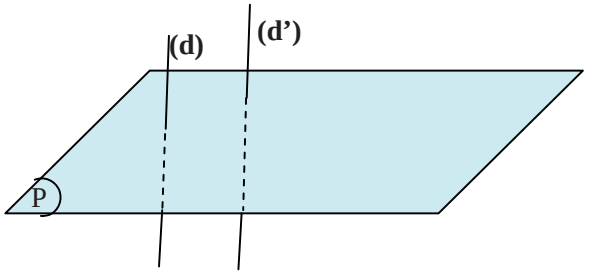
Propriété 5

Si un plan P est perpendiculaire à une droite (d) et coupe cette droite en un point A, alors toute droite perpendiculaire à (d) en A est contenue dans le plan P.



Propriétés 6

Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Propriétés 7

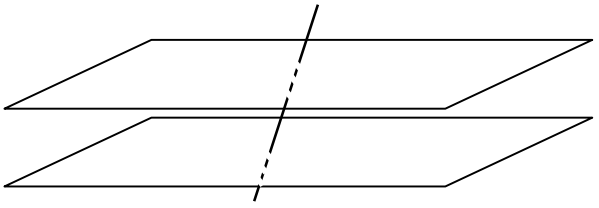
Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Propriétés 8

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Propriétés 9

Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.



Plans perpendiculaires

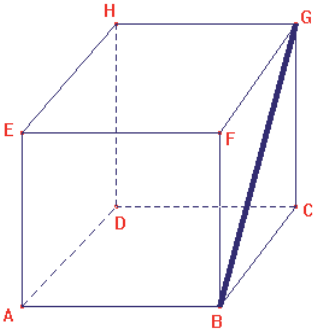
Définition :

Deux plans P et Q sont dits perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

On note alors P ⊥ Q.

Exemple :

Soit ABCDEFGH un cube.



Considérons les plans (BCG) et (EFG).

- la droite (BF) est contenue dans le plan (BCG)
- la droite (BF) est perpendiculaire au plan (EFG)

Par suite les plans (BCG) et (EFG) sont perpendiculaires.

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires étant deux plans sécants, leur intersection est une droite. Exemple : les plans (ABC) et (HDC) sont perpendiculaires et ont pour intersection la droite (DC).
- Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un n'est pas nécessairement orthogonale à toute droite de l'autre.
  Par exemple (BCG) ⊥ (EFG) mais (BG) qui est contenue dans (BCG) n'est pas orthogonale à (EF) qui est contenue dans (EFG).
- Lorsque deux plans sont perpendiculaires une droite de l'un n'est pas forcément perpendiculaire à l'autre : Par exemple la droite (BG) n'est pas orthogonale au plan (EFG) ; (BC) n'est pas orthogonale à (EFG).

Propriétés

On a les propriétés suivantes :

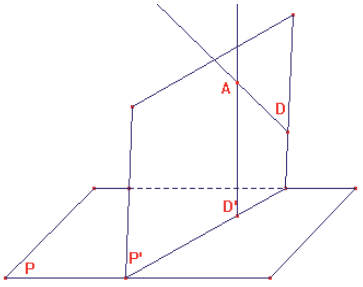
Propriété 1 :
Pour que deux plans soient perpendiculaires, il suffit qu'une droite orthogonale à l'un et une droite orthogonale à l'autre soi orthogonale

Propriété 2 :
Soient deux plans parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Propriété 3 :
Etant donné un plan P et une droite (D) non orthogonale à P, il existe un plan P' et un seul contenant (D) et perpendiculaire à P ;

Méthode de détermination de P'

Si A est un point quelconque de (D), P' est déterminé par (D) et la droite passant par A et perpendiculaire à P.



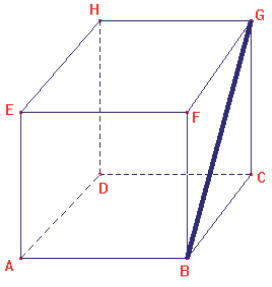
Propriété 4
Soient deux plans perpendiculaires ; toute droite contenue dans l'un de ces plans et perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans, est perpendiculaire à l'autre plan.

Propriété 5
Si deux plans sécants Q_1 et Q_2 sont perpendiculaires à un même plan P alors leur droite d'intersection Δ est perpendiculaire à P.

Propriété 6
Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Remarque :
Deux plans perpendiculaires à une même droite ne sont pas nécessairement parallèles.

Par exemple, les plans (HGD) et (EFG) sont perpendiculaires au plan (BCG). Par contre (HGD) et (EFG) ne sont pas parallèles.



EXERCICES ET PROBLEMES

Utilisation de figures géométriques de l'espace

Exercice 1

Détermine parmi les figures ci-dessous celles qui sont des représentations de pyramides, de prismes ;

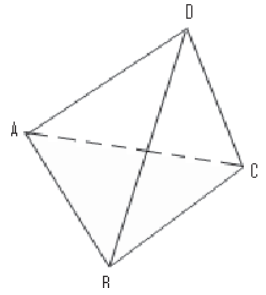


Figure 1

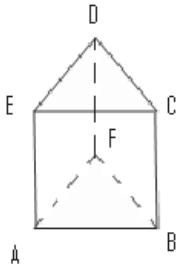


Figure 2

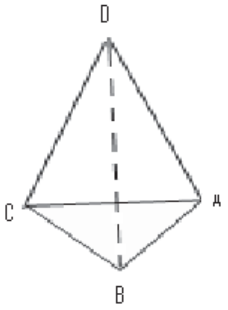


Figure 3

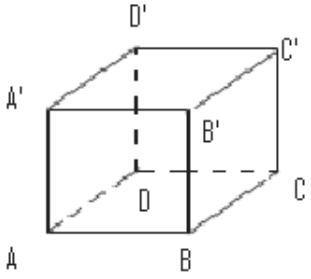


Figure 4

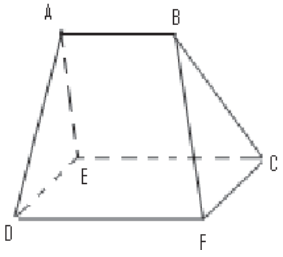


Figure 5

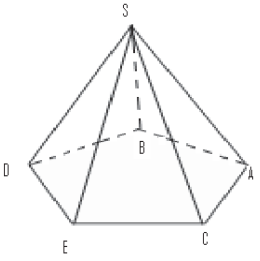


Figure 6

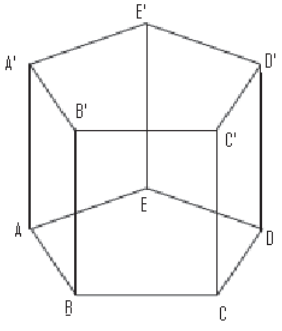


Figure 7

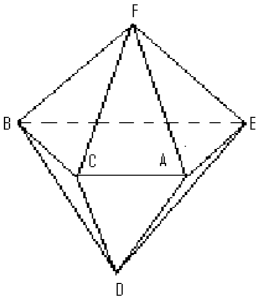


Figure 8

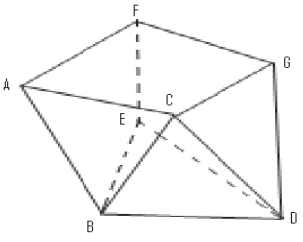
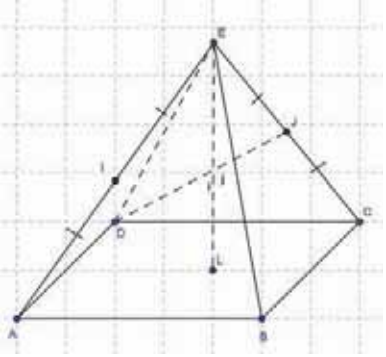


Figure 9

Exercice 2



EABCD est une pyramide régulière de sommet E (figure ci-contre). Soit L le projeté orthogonal de L sur (ABC), I le milieu de [AE], J le milieu de [EC] et K le milieu de [DJ]

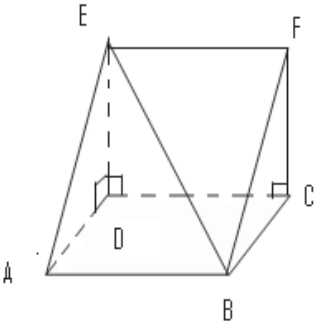
1) a) Parmi les points A, B,C, D, E, , I, J, K et L quels sont ceux qui appartiennent (ABC) ?

b) Donner toutes les autres notations du plan (ABC).

2) a) Les points I, J et L définissent-ils un plan ?
b) Les points E, I et L définissent-ils un plan ?
c) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles coplanaires ?
d) Les points E, I, J et L sont-ils coplanaires ? Déterminent-ils un tétraèdre ?

3) Les points B, C, D et E déterminent-ils un tétraèdre ? si oui, quels sont les faces et les arêtes de ce tétraèdre ?
4) Détermine l'intersection des plans (EIJ) et (BCD), des plans (FIJ) et (BAD), des plans (EIJ) et (ABC)

Exercice 3

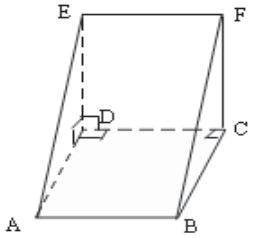


On considère le solide ci-contre où (AD) ⊥(ED), (CD) ⊥(ED), ABCD et ABFE sont des parallélogrammes quelconques. EDCF est un rectangle.

1) Montre que (ED) ⊥ (ABC), (FC) ⊥ (ABD), (FC) ⊥ (AB), (ED) ⊥ (AC)

2) Donne une hauteur du tétraèdre EACD et une hauteur du tétraèdre EABC.
3) On considère deux points I et J du plan (ABF) et deux points K et L du plan (CDE) tels que la droite (IJ) soit parallèle au plan (CDE) et la droite (KL) soit parallèle à (ABF).
Montre que (IJ) // (KL).

Exercice 4



ABCD et EDCF sont des carrés de côté 4 cm.

1)Montre que ABFE est un rectangle

a) Cite deux hauteurs du tétraèdre EABD et calcule son volume

b) Calcule BD, EB, l'aire du triangle EBD et la distance du point A au plan (EBD).

2) Calcule les volumes de ECBD et BCFE. Déduis-en le volume du solide AEDBFC

3) a) Montre que (AC) $\perp$ (BD), (AC) $\perp$ (ED) et (AC) $\perp$ (EB).

b) Montre que les plans (ABC) et (EFC) sont perpendiculaires.

c) Montre que (BD) $\perp$(AF).

4) Soit I le milieu de [BF] et J celui de [FC]. Montre que (IJ) est parallèle à (AD) et que (IJ) est parallèle à (ABC).

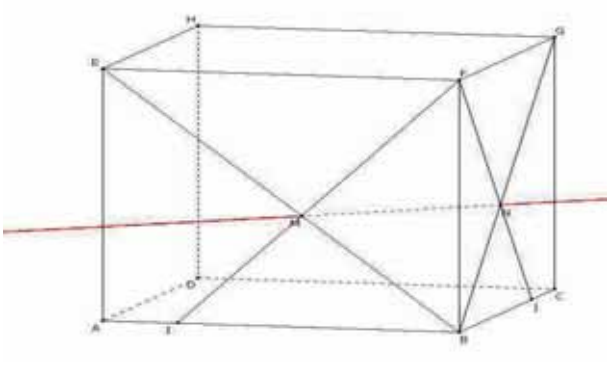
5) Soit K le centre du rectangle ABFE.

a) Montre que les (IJK) et (ABC) sont parallèles.

b) Détermine la section IJLM du solide du solide AEDBFC par le plan (IJK) avec L $\in$ [ED], M $\in$ [EA].

c) Détermine le volume du solide IJLME.

Exercice 5



Dans le pavé droit ci-contre, I est un point de [AB] et J est un point de [BC].

1) Rappelle les différentes positions relatives de deux plans (P) et (P').

2) On cherche l'intersection (Δ) des plans (FIJ) et (BEG).

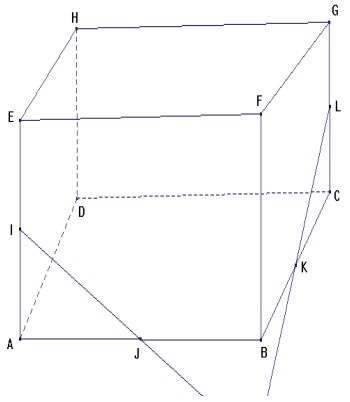
a) Trouve deux points de (Δ).

b) Quelle est la nature de (Δ) ?Justifie.

c)Tracer (Δ) sur la figure ci-dessous.

Exercice 6

ABCDEFGH est un cube.
I, *J*, *K* et *L* sont les milieux respectifs des segments [*AE*], [*AB*], [*BC*] et [*CG*].



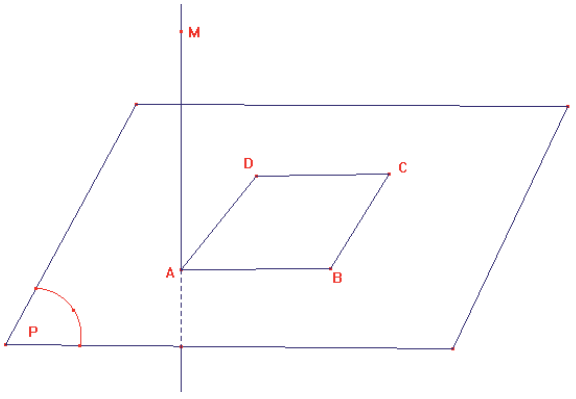
1. Quelle est la nature du quadrilatère *AILC* ?
2. Démontre que (*JK*) et (*AC*) sont parallèles.
3. En déduire que (*JK*) et (*LI*) sont parallèle.
4. Démontre que (*IJ*) et (*KL*) sont coplanaires.
5. En déduire qu'elles sont sécantes en un point *S*. (Justifier)

6. Détermine l'intersection des plans (*ABF*) et (*FBC*).
7. Démontre que le point *S* appartient à la droite (*BF*).

Exercice 7

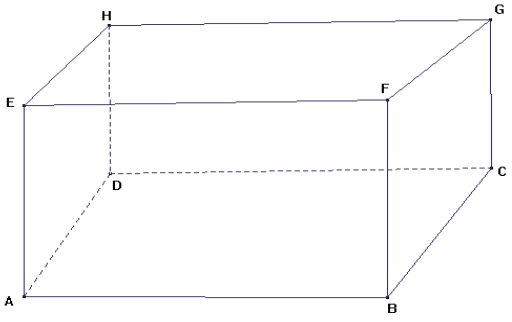
Soit ABCD un carré situé dans un plan (P).

Soit M un point de la perpendiculaire à (P) passant par A (distinct de A).
Montre que :
1) (MA) est orthogonale à (DB) ;
2) (DB) est orthogonale à (MC).



Exercice 8

ABCDEFG est le pavé droit ci-contre.
1) Démontrer que la droite (AE) est parallèle au plan (BFHD).
2) Démontrer que la droite (EH) est parallèle au plan (BFGC).
3) a) Démontrer que la droite (EB) est parallèle au plan (DCGH).
b) Démontrer que la droite (AF) est parallèle au plan (DCGH).



c) La propriété « si deux droites sont parallèles à un même plan alors ces deux droites sont parallèles » est-elle vraie ?

Exercice 9

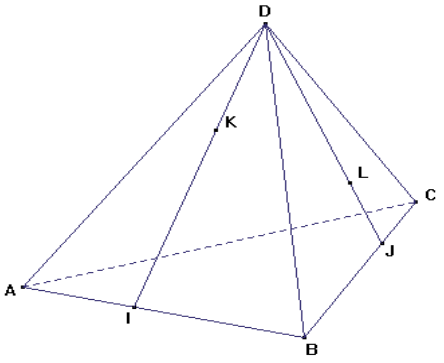
On considère un tétraèdre ABCD ci-contre
Soient les points I, J, K, L appartenant respectivement à [AB], [BC], [ID] et [JD].
On suppose (IJ) et (KL) non parallèles.

1) Démontre que I, J, K et L sont coplanaires.

2) Démontre que (IJ) et (KL) sont sécantes en un point M.

3) Démontre que M appartient au plan (ABC).

4) Quel est le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite (KL) ?



5) Soit O le centre de la face (ABCD) et O' le centre de la face (EFGH).

a)Démontre que la droite (BF) est parallèle au plan (BFHD).

b) Démontre que la droite (BF) est parallèle au plan (AEGC).

c) Démontre que la droite (BF) est parallèle à la droite (OO')

Projection d'un triangle rectangle sur un plan

Exercice 10:

Dans le plan, on donne trois points distincts A, B et C non situés sur un plan (P) et du même côté par rapport à (P).

1) On suppose que le triangle est rectangle en A et (AB) et (AC) sont parallèles à (P)

Soit A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (P)

a) Quelle est la nature de chacun des quadrilatères ABB'A', ACC'A' et BCC'B' ?
b) Montre que le triangle A'B'C' est rectangle en A'
2) On suppose que le triangle est rectangle en A, (AB) est parallèle à (P) et (AC) n'est pas parallèle à (P). Soit A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (P)

Soit (Δ) la droite passant par A et parallèle (A'C')

a) Montre que (AB) ⊥ (ACC'A'), (Δ) est une droite de (ACC'A'), (AB) ⊥ (Δ) et les droites (CC') et (Δ) sont sécantes
b) Soit E le point d'intersection de (Δ) et de (CC'). Quel est le projeté orthogonal de E sur (P) ? Montre que (AE) est parallèle à (P), que le triangle A'B'C' est rectangle en A' en utilisant le résultat du 1) au triangle ABE rectangle en A

3) On suppose que ABC est un triangle rectangle en A et que (AB) et (AC) ne sont pas parallèles au plan (P). Soit A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, b et c sur (P) ; (AB) perce le plan (P) en I et (AC) perce (P en J, avec B∈ [AI] et C∈ [AJ]

a) Montre que les points A', B' et I sont alignés dans cet ordre et que les points A', C' et J sont alignés dans cet ordre

b) Montre que A'I <AI, A'J <AJ, A'I <IJ, A'J <IJ et $A'I^2 + A'J^2 < IJ^2$.

En déduire que le triangle A'IJ n'est pas un triangle rectangle et que le triangle A'B'C' n'est pas un triangle rectangle

4) A'B'C' est un triangle rectangle en A' dans l'espace. M est un point non situé dans le plan (A'B'C') et tel que (MA') soit perpendiculaire au plan (A'B'C'), le triangle MB'C' n'étant pas rectangle.

a) Quel est le projeté orthogonal du triangle MB'C' sur le plan (A'B'C')

b) Un triangle rectangle d'un plan (P) est-il toujours le projeté orthogonal sur (P) d'un triangle rectangle ?

NB : Pour que le projeté d'un triangle rectangle sur un plan soit un triangle rectangle, il faut que l'un au moins des supports des côtés de l'angle droit de ce rectangle soit parallèle à ce plan.

Théorème des trois perpendiculaires

Exercice11

Si A es un point n'appartenant pas à un plan (P), si (D) est une droite du plan (P), H le projeté orthogonal de A sur (P), K le projeté orthogonal de H sur (D), alors K est le projeté orthogonal de A sur (D)

Remarque

On a 3 perpendiculaires :

(AH) perpendiculaire à (P)

(KH) perpendiculaire à (D)

(AK) perpendiculaire à (D)

Projeter A sur (P) en H, puis H en K sur (D) revient à projeter directement A en K sur (D)

Tétraèdre régulier

Exercice 12 :

Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les arêtes ont même longueur(les faces sont des triangles équilatéraux)

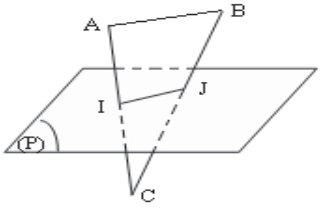
L'objectif de cet exercice est de montrer que les supports des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont des droites orthogonales.

On considère un tétraèdre régulier ABCD

1) Soit B’ le milieu de [CD]
a) Montre que (AB’) ⊥ (CD) et (BB’) ⊥(CD)
b) Déduis-en que (CD) ⊥(ABB’) et que (CD) ⊥(AB)
2) En utilisant C’ milieu de [BD] et D’ milieu de [BC] montre que (BC) est orthogonal à (AD) et (AC) est orthogonal (BD)

Constructions géométriques

Exercice 13 :



On considère trois points non alignés A, B et C de l’espace et un plan (P)
(AC) perce (P) en I et (BC) perce (P) en J avec I milieu de [AC] et J milieu de [BC]
1) Construis en justifiant, le point d’intersection M du plan (P) avec la médiane du triangle ABC, relative au sommet C
2) Montre que M est le milieu de [IJ].

Exercice 14

On donne un plan P et deux points distincts B et C de ce plan, un point A n’appartenant pas au plan P et H l’orthocentre du triangle ABC ;

1) Construis le plan Q passant par A et perpendiculaire à (BC).
2) Montre que P est perpendiculaire à Q.

Exercice 15

On donne deux plans séquents P et Q, A et B deux points de leur droite d’intersection ; Le cercle (C) du plan Q de diamètre [AB]. Soit E un point du plan Q n’appartenant pas au cercle (C).

1) Construis la droite passant par E et perpendiculaire à (AB) uniquement à l’aide d’une règle non graduée.
2) Pour cette question, on suppose en plus que P et Q sont perpendiculaires. Construis uniquement à l’aide d’une règle non graduée la perpendiculaire passant par E au plan P.

Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

Exercice 16

On considère deux droites (D) et (D') non coplanaires, A un point de (D'), (Δ) la droite passant par A et parallèle à (D), (P) le plan formé par (Δ) et (D') ,(D'') la droite projetée orthogonale de (D) sur le plan (P)

1) Montre que (D) est parallèle au plan (P).

2) Montre que (D') et (D'') sont des droites sécantes

Soit J le point d'intersection de (D') et (D''), I le projeté orthogonal de J sur (D).

3)a) Fais une figure

b) Montre que (IJ) est perpendiculaire à la fois à (D) et à (D').

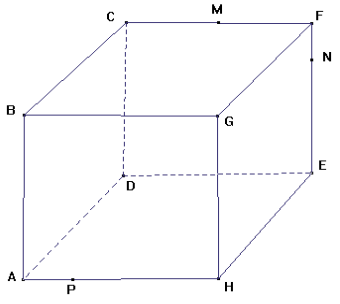
NB : *(IJ) est appelée perpendiculaire commune aux deux droites non coplanaires (D) et (D') et IJ est la distance entre ces deux droites.*

4) Utilise ce qui précède pour donner un programme de construction de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.

Section plane

Exercice 17

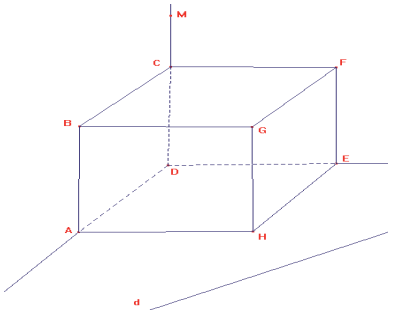
ABCDEFGH est un cube. M est un point du segment [CF]. N est un point du segment [EF]. P est un point du segment [AH].
Dessine la section du cube par le plan (MNP).



Exercice 18

ABCDEFGH est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE). M est un point de la droite (DC).

Dessine la section du cube par le plan passant par la droite (d) et le point M.



Devoir

Durée : 2h

Exercice 1 (7 pts)

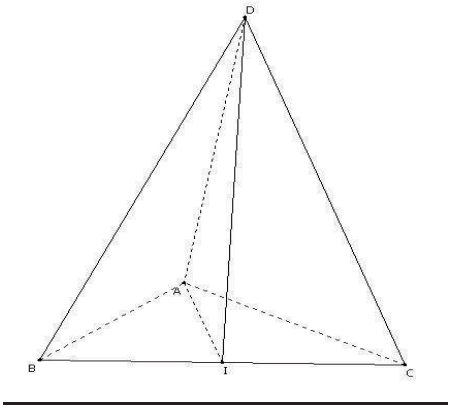
On considère un tétraèdre ABCD tel que AB = AC et DB = DC.

I est le milieu de [BC].

1) Montre que (AI) et (BC) sont perpendiculaires. **(2 pts)**

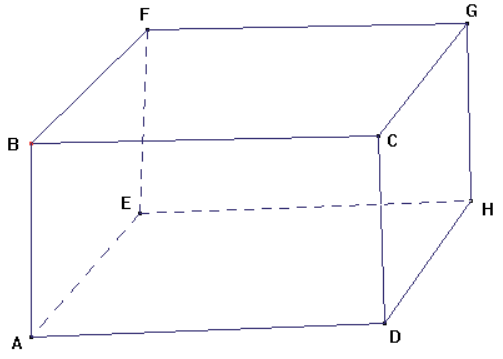
2) Montre que (DI) et (BC) sont perpendiculaires. **(2 pts)**

3) Déduis-en que (BC) est orthogonale à (AD). **(3 pts)**



Exercice 2 **(7 pts)**

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.



1. Démontre que les plans (*AFC*) et (*DEG*) sont parallèles. **(2,5 pts)**

2. Soient *I* le milieu du segment [*AB*],

J le milieu du segment [*BC*] et

K le milieu du segment [*BF*].

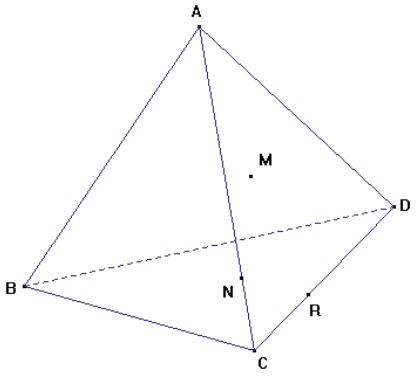
Démontre que les plans (*IJK*) et (*AFC*) sont parallèles. **(2,5 pts)**

3. Déduis des questions 1 et 2 que les plans (*IJK*) et (*DEG*) sont parallèles. **(2 pts)**

Exercice3 **(6 pts)**

ABCD est un tétraèdre. M est un point de la face ABD, N un point du segment [AC] et R un point du segment [CD].

Construis la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNR).



SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

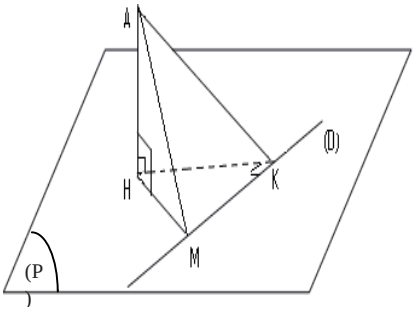
Exercices

Exercice11

Première méthode

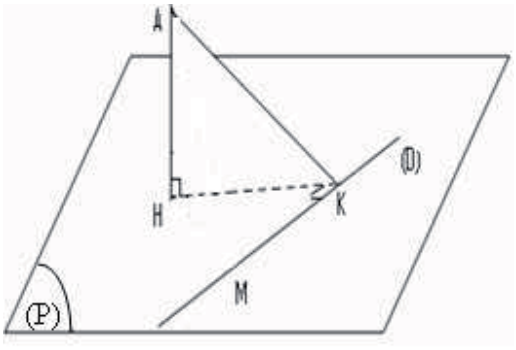
Soit M un point de (D) distinct de K.

1) Montre que $AM^2 = AH^2 + HM^2$, $HM^2 = KH^2 + KM^2$, $AK^2 = AH^2 + HK^2$
2) Déduis-en que $AM^2 = AK^2 + KM^2$ puis $(AK) \perp (D)$



Deuxième méthode

1) Montre que $(AH) \perp (D)$ et que : $(D) \perp (AHK)$
2) Déduis-en que $(AK) \perp (D)$



Correction devoir

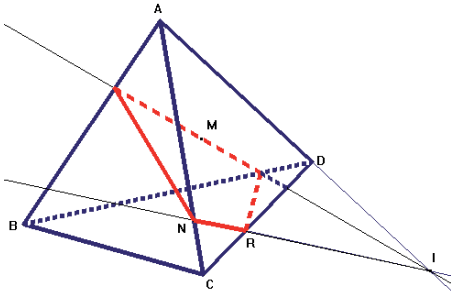
Exercice1

1) ABC est un triangle isocèle en A et I milieu de[BC] donc (AI) est perpendiculaire à (BC).
2) DBC est un triangle isocèle en D et I milieu de [BC] donc (DI) est perpendiculaire à(BC)
3) (BC) perpendiculaires à (AI) et (DI) donc (BC) est perpendiculaire au plan (AID) d'où (BC) est orthogonale à (AD)

Exercice 2

1) (AF) est parallèle à (DG) donc (AF) est parallèle au plan (DEG)
   (FC) est parallèle à (DE) donc (FC) est parallèle au plan (DEG)
   (AF) et(FC) sont sécantes et contenues dans le plan (AFC)
   Alors (AFC) est parallèle à (DEG)
2) (IJ) est parallèle à (AC) donc (IJ) est parallèle au plan (AFC)
   (JK) est parallèle à (FC) donc (JK) est parallèle au plan (AFC)
   (IJ) et(JK) sont sécantes et contenues dans le plan (IJK)
   Alors (IJK) est parallèle à (AFC).
3) (AFC) est parallèle à (DEG) et à (IJK) donc (DEG) est parallèle à (IJK)

Exercice 3



La droite (NR) est l'intersection des plans (MNR) et (ACD). M est un point de la face ABD et les droites (NR) (du plan (ACD)) et (AD) (du plan (ABD)) se coupent en un point I(car sécantes dans le plan (ACD)).

La droite (MI) est donc l'intersection des plans (MNR) et (ABD).

La droite (MI) coupe les arêtes [BD] et [AB] ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNR).

7 CALCUL DANS IR

APERÇU HISTORIQUE

Le terme de *nombre réel* est apparu pour la première fois en 1883 dans les publications de George Cantor . Un nombre réel est un nombre associé à une longueur ou à une grandeur physique. Il peut représenter une grandeur positive ou une grandeur négative comme la température ou l'altitude. Les mesures des grandeurs physiques utilisant les nombres réels dépendent du choix de l'unité de mesure. Les nombres réels sont utilisés dans plusieurs domaines : en économie, en ingénierie, en informatique, en physique, en mathématique, .. L'histoire des mathématiques est marquée par trois notions essentielles : la droite réelle, la valeur absolue et la racine carrée.

La droite réelle

Si l'existence des nombres négatifs apparait très tôt dans l'histoire (mathématiques indiennes) ; il faut attendre 1770 pour qu'ils obtiennent un vrai statut de nombre grâce à Euler . Mais il faut attendre encore un siècle pour associer l'ensemble des réels, à l'ensemble des points d'une droite orientée. Permettant ainsi de parler de droite réelle ou droite numérique.

Valeur absolue

Il y a quatre phases dans l'évolution de la notion de « valeur absolue » : la valeur absolue considérée comme un nombre sans signe, la valeur absolue comme une fonction utilisée dans le calcul d'erreurs, ensuite la valeur absolue en tant que concept abstrait et enfin la valeur absolue comme notion bien définie.

la Racine carrée

La découverte de la Racine carrée a permis de grandes avancées en mathématiques. En effet, l'histoire de la racine carrée commence autour du XXème avant J.C. Sa première représentation connue date du XVIIème siècle avant J.C. Les recherches portant sur le nombre $\sqrt{2}$ ont conduit à la découverte des nombres irrationnels. De nos jours, $\sqrt{2}$ intervient dans beaucoup d'applications de la vie courante.

OBJECTIFS

- Maîtriser les règles de calcul dans IR
- Résoudre des problèmes concrets faisant intervenir le calcul dans IR
- Savoir utiliser la calculatrice pour résoudre des problèmes.

CALCUL DANS IR

Ordre dans IR (rappels et compléments)

Définition

a et b étant deux réels :

- a est inférieur à b (on note $a \leq b$) équivaut à a a - b est un nombre négatif.
- a est supérieur à b (on note $a \geq b$) équivaut à a a - b est un nombre positif.

De même on dit que :

- a est strictement inférieur à b (on note $a < b$) équivaut à a - b est un nombre négatif et est différent de 0.
- a est strictement supérieur à b (on note $a > b$) équivaut à a – b est un nombre positif et est différent de 0.

NB :

- x est un nombre négatif signifie x inférieur à 0 ($x \leq 0$).
- x est un nombre positif signifie x supérieur à 0 ($x \geq 0$).

Retiens :

- $a \leq b$ équivaut à $a - b \leq 0$
- $a < b$ équivaut à $a - b < 0$
- $a \geq b$ équivaut à $a - b \geq 0$
- $a > b$ équivaut à $a - b > 0$

Remarque

Si $a < b$ alors $a \leq b$. C'est-à-dire que, si « a est strictement inférieur à b » est vrai, alors « a est inférieur ou égal à b » est vrai . Ainsi on a : $7 \leq 12$.

Propriétés

a, b et c sont trois nombres réels, on a les propriétés suivantes.

Propriété 1

$a \leq b$ et $b \leq a$ équivaut à : $a = b$.

On note : $(a \leq b \text{ et } b \leq a) \Leftrightarrow a = b$.

Propriété 2

Si a est inférieur à b et b inférieur à c alors a est inférieur à c.

On note : $(a \leq b$ et $b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

Propriété 3

Si a est inférieur à b alors a +c est inférieur à b+c.

Ce qu'on note : $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

Retiens :

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un même nombre aux deux membres de cette inégalité.

Propriété 4

Si a est inférieur à b et c inférieur à d, alors a +c est inférieur à b+d ;

Autrement dit : $(a \leq b$ et $c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$.

Propriété 5

Si c est positif et a inférieur à b alors a c est inférieur à bc.

Autrement dit : Si c est positif on a : $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

Retiens :

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ses deux membres par un nombre positif.

Propriété 6

Si c est négatif et a inférieur à b alors a c est supérieur à bc.

On note : $c \leq 0$ et $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$.

Retiens :

Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, cette inégalité change de sens.

Propriété 7

a , b, c et d sont des réels positifs.

Si a est inférieur à b et c inférieur à d, alors a c est inférieur à bd ;

Ce qui se note : $(a \leq b$ et $c \leq d) \Rightarrow ac \leq bd$.

Retiens :
On peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens lorsque tous les membres des ces inégalités sont positifs.

Remarques : Ces propriétés restent vraies lorsque les inégalités sont strictes.

Application

Exercice 1
Démontre les sept propriétés précédentes.

Exercice 2
x est un réel tel que $x \leq 3$.
Complète pour avoir des inégalités vraies en appliquant les propriétés ci-dessus.

Exemple : $x + 4$……
Comme $x \leq 3$, d'après la propriété3, on a : $x + 4 \leq 3 + 4$ donc $x + 4 \leq 7$
a) $x - 7$ ……
b) $-7x$ ……
c) $\frac{x}{2}$ ……..

Autres propriétés :

Après l'étude de chaque propriété, donne un exemple et vérifie-le avant de passer à la propriété suivante.

Propriété 8
a et b étant deux réels positifs.
Si a est inférieur à b alors a^2 est inférieur à b^2; c'est-à-dire : $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.

Retiens :
Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Propriété 9
a et b sont deux réels négatifs.
Si a est inférieur à b alors a^2 est supérieur à b^2; c'est-à-dire : $a \leq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$.

Retiens :
Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Propriété 9
a et b sont deux réels positifs.
Si a est inférieur à b alors $\sqrt{a}$ est inférieur à $\sqrt{b}$; c'est-à-dire: $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Retiens :
Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrés.

Propriété 10
a et b sont deux nombres réels non nuls de même signe.
Si a est inférieur à b, alors $\frac{1}{a}$ est supérieur à $\frac{1}{b}$; autrement dit : $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Retiens :
Deux nombres non nuls de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses. .

Application

Exercice :
On donne $2,4 \leq x \leq 2,5$ et $3,14 \leq \pi \leq 3,15$.
Encadre : $-2\pi + x$; $\frac{\pi}{x}$ et $\frac{-3}{x}$

Partie entière

Activité

1) Pour chacun des réels x = 2,7 ; x= -1,18 ; x = 6 et x = √3, trouve un entier relatif n tel que : $n \leq x < n + 1$.
2) Soit x un réel. Justifie qu'on peut toujours trouver un entier relatif n tel que : $n \leq x < n + 1$.

Définition
La partie entière d'un réel x , notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x

Autrement dit :
La partie entière d'un nombre réel x est l'entier relatif noté $E(x)$, vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Retiens :
n est la partie entière de x signifie que : n est un entier et n ≤ x < n + 1
On note $E(x)$= n .

Application

Trouve :

a) $E(2{,}4)$; $E(-5{,}7)$; $E(10)$; $E(-15)$; $E(\frac{-1}{7})$; $E(\frac{1}{3})$; $E(\frac{-3}{4})$

b) $E(\pi)$ et $E(-\sqrt{5})$ en utilisant ta calculatrice

Remarque

$x \in Z \Leftrightarrow E(x) = x$

Exercices

Exercice1

Soit x∈IR

a) Démontre que $x - 1 < E(x) \leq x$

b) Démontre que $-\frac{1}{2} \leq x - E(x + \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Résous dans IR les équations suivantes :

a) E(x) = x ; b) E(x) = 3 ; c) E(x) = - 5.

Exercice 3

Résous dans IR les inéquations suivantes :

a) E(x) < x b) E(x) ≤ 3 ; c) E(x - 2) ≥ - 5 ; c) E(2x + 2) ≥ - 7,2.

Exercice3

Détermine les nombres réels x et y de même partie entière -2 et vérifiant le système :

$$\begin{cases} x - E(x) = 2(y - E(y)) \\ x + y = -3{,}1 \end{cases}$$

Activité

1) En utilisant ta calculatrice, effectue les calculs comme suggérés et remplis le tableau ci-dessous.

N	a	$\underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{\text{n fois}}$	a^n	$\frac{1}{a^n}$	a^{-n}
3	5	…			
7	2				
2	3,4				
4	-1,6				
8	$\sqrt{2}$				

2) Compare les résultats de la 3ème et de la 4ème colonne du tableau, puis ceux de la 5ème et de la 6ème colonne.
3) Quelle conjecture peux-tu ainsi faire ?

Définition 1

Soit a un nombre réel et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 on appelle puissance nième du nombre a, le nombre réel noté a^n qu'on lit : « a puissance n ou a exposant n » et qui est défini par : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n facteurs}$.

On convient que :

- pour tout réel a : $a^1 = a$
- pour tout réel a non nul : $a^0 = 1$.

Définition 2

Soit p un entier strictement négatif et a un réel non nul.
On appelle puissance d'exposant p de a le nombre réel noté a^p ,
qui se lit « a puissance p » et qui est défini par : $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$

Application

Calcule 3^3 ; 2^{-4} ; $\sqrt{3}^{\,6}$; $(-\frac{1}{2})^{-6}$

Propriétés

Pour tout réel a non nul et pour tous entiers relatifs m et n , on a :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $(a^m)^n = a^{m\times n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a \times b)^n = a^m \times b^n$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ Avec $b \neq 0$

Remarque : $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si n est pair} \\ -a^n & \text{si n est impair} \end{cases}$

Application :

On donne $A = \dfrac{(-3)^4 \times (-27)^7 \times (2)^{-5}}{(-8)^5 \times (3^4)^{-3}}$ et $B = \dfrac{(-5)^3 \times (-15)^{-7} \times (2)^{-12}}{(5)^5 \times (3^4 \times 16)^{-3}}$

Ecris A et B sous forme de fractions irréductibles.

Rappels et compléments :

Calcule : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Retiens :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Application

a) Mets sous forme de produits de facteurs les expressions suivantes :

A = $x^3 - 2\sqrt{2}$ et B = $x^3 + \frac{1}{8}$

b) Ecris sous la forme a+b$\sqrt{3}$ avec a et b entiers, les nombres :

C= $(1+\sqrt{3})^3$ et D = $(1-\sqrt{3})^6$

Calcul sur les radicaux

Définition

Soit a un nombre réel positif, on appelle racine carrée de a, le réel positif noté $\sqrt{a}$ et dont le carré et égal à a.

Propriétés

- Soit a et b deux réels positifs, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et pour b non nul $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Soit a un nombre réel positif et n un entier naturel, on a : $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.
- Soit a un nombre réel et b un nombre réel positif, on a : $\sqrt{a^2 \times b} = |a|\sqrt{b}$.
- Pour tout nombre réel positif a et tout nombre réel x, on a :
  $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Application

- On donne A= $\sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$; écris A sans le radical
- Même question pour B =$2^3\sqrt{\frac{3^5 \times 10^{-5}}{2 \times 15^3}}$
- Démontre que pour $a \geq b \geq 0$, on a :
  $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = 2(a + b)$.
- Résous dans IR les équations : $x^2 = 7$, $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x^2 = 3 - 2\sqrt{3}$.
  Indication : Pour la deuxième équation on écrira $x^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ sous forme de carré.

Valeur absolue

Définition

Soit a un nombre réel , on appelle valeur absolue de a, la nombre réel noté **:** $|a|$ **;** qu'on lit « valeur absolue de a» et qui est défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Propriétés Pour tous réels a et b ,on a :

Propriété 1 : $|a| \geq 0$

Propriété 2 : $|a|^2 = |a^2| = a^2$

Propriété 3 : $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Propriété 4 : : $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

Propriété 5 : $|ab| = |a| \times |b|$ **et** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ **si** en plus $b \neq 0$

Propriété 6 : $-|a| \leq a \leq |a|$

Propriété 7 : Pour tout réel α positif et pour tout réel x on a **:**

- $|x| \leq \alpha$ équivaut à : $-\alpha \leq x \leq \alpha$
- $|x| \geq \alpha$ équivaut à : $x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha$

Autrement dit :

$\forall \alpha \geq 0$, $\forall x \in IR$ on a :

- $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$
- $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha$ ou $x \geq \alpha$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ (Inégalité triangulaire).

Démonstration des propriétés :

Propriété 1 (voir définition)

Propriété 2 : $\begin{cases} Si\ a > 0,\ |a|^2 = |a| \times |a| = a \times a = a^2 \\ Si\ a < 0,\ |a|^2 = |a| \times |a| = (-a) \times (-a) = a^2 \end{cases}$

Propriété 3 : $|a| = 0 \Leftrightarrow |a|^2 = 0$ or $|a|^2 = a^2\ et\ a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

donc $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Propriété 4 : $|a| = |b| \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b) = 0 \; ou \; (a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \; ou \; a = -b$$

Propriété 5 :

$\left.\begin{array}{r} |ab|^2 = a^2b^2 \\ (|a| \times |b|)^2 = a^2b^2 \end{array}\right\}$ or $|ab| \geq 0$ et $|a| \times |b| \geq 0$ donc $|ab| = |a| \times |b|$

$\left.\left|\frac{a}{b}\right|^2 = \frac{a^2}{b^2}\right\}$ or $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 0 \; et \; \frac{|a|}{|b|} \geq 0$ donc $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

Propriété 6 :

- Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$ comme $-a \geq 0$ car $a \leq 0$ alors $a \leq -a$ d'où $a \leq |a|$ (1) ; et comme $|a| = -a$ et $-a = a$, on a $-|a| = a$ on en déduit que (2) $-|a| \leq a$.
- Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$ d'où $a \leq |a|$ (1), comme $-|a| = -a$ et $-a \leq a$ on a : $-|a| \leq a$ (2)

Dans les deux cas (1) et (2) $\Rightarrow \forall a \in IR \; -|a| \leq a \leq |a|$

Propriété 7

$\left.\begin{array}{r} |a+b|^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (|a|+|b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \end{array}\right\}$ or $|ab| \geq ab$, $|a+b| \geq 0$ et $|a| + |b| \geq 0$

donc $|a+b| \leq |a| + |b|$

Résolution d'équations avec valeurs absolues

Equations du type : $|ax + b| = c$

Exemple :

Résous dans IR les équations : $|-2x+5| = 5$; $|4x-3| = \sqrt{17} - 3\sqrt{2}$

Equations du type : $|ax+b| = cx+d$

Exemple : Résolution dans IR de l'équation $|x-3| = 2x-4$

Première méthode

- $2x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ alors l'équation n'admet pas de solution dans]-∞ ;2[
- $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ on a : $x-3 = 2x-4$ **ou** $x-3 = -2x+4$

  Soit $x = 1$ ou $X = \frac{7}{3}$. 1 ne vérifiant pas la condition $x \geq 2$ mais $\frac{7}{3}$ la vérifie donc $\frac{7}{3}$ est solution de l'équation. Ainsi $\frac{7}{3}$ est la seule solution de l'équation ; par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{\frac{7}{3}\right\}$

Deuxième méthode (on utilise un tableau de signe)

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	-	0	+
$\lvert x - 3 \rvert$	$-x + 3$		$x - 3$
$\lvert x - 3 \rvert = 2x - 4$	$-x + 3 = 2x - 4$ $\Leftrightarrow \quad -3x = -7$ $\Leftrightarrow \; x = \frac{7}{3}$ Valide		$x - 3 = 2x - 4$ $\Leftrightarrow \quad -x = -1$ $\Leftrightarrow \quad x = 1$ invalide

$\lvert x - 3 \rvert = 0$

et $2x - 4 = 2$.

Comme $0 \neq 2$; 3 n'est pas solution de l'équation

Ainsi on a : $S = \{\frac{7}{3}\}$

Résolution d'inéquations avec valeurs absolues

Inéquations du type : $\lvert ax + b \rvert < c$

-Si $c < 0$ alors l'inéquation n' a pas de solution

-Si $c > 0$ alors $\lvert ax + b \rvert < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$

-Si $c = 0$ alors $\lvert ax + b \rvert < 0$ impossible ; S=ϕ

Applications : Résoudre dans IR

$\lvert x \rvert < 3$; $\lvert 2x - 1 \rvert < -3$; $\lvert -3x + 4 \rvert \leq 4$; $\lvert 3x - 7 \rvert \leq -1$

Cas particuliers : Résolution dans IR de $|4x-5| \leq 0$

$$|4x-5| \leq 0 \Leftrightarrow 4x-5=0$$

$x=\frac{5}{4}$; L'ensemble S des solutions est $S=\{\frac{5}{4}\}$

- **Inéquations du type :** $|ax+b| > c$

-si $c < 0$ alors l'inégalité est toujours vérifiée : S= IR

-si $c=0$: $|ax+b| > 0 \Leftrightarrow ax+b \neq 0$

-si $c > 0$ alors $|ax+b| > c \Leftrightarrow ax+b < -c$ ou $ax+b > c$

Applications : Résoudre dans IR

$|2x-5| > 2$; $|5x-1| > -10$; $|1-4x| > 0$; $|7x-5| \geq 0$

- **Inéquation du type** $|ax+b| \leq cx+d$ **ou** $|ax+b| \geq cx+d$

Exemple : Résolution de l'équation $|2x+1| \leq x+3$

$2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	+
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$	$2x+1$
$\lvert 2x+1 \rvert \leq x+3$	$-2x-1 \leq x+3$ $-3x \leq 2$ $x \geq -\frac{2}{3}$ $S_1 = [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}[$	$2x+1 \leq x+3$ $x \leq 2$ $S_2 =]-\frac{1}{2}; 2]$

$|2x+1| = 0$,

$x+3=\frac{5}{2}$

Comme $0 \leq \frac{5}{2}$;

$-\frac{1}{2}$ est solution de l'inéquation

Par suite, l'ensemble S des solutions de cette inéquation est :

$S = S_1 \cup S_2 \cup \{-\frac{1}{2}\}$. Par suite, $S = [-\frac{2}{3}; 2]$.

Distance sur une droite

Définition : Soit x et y deux nombres réels . La distance de x à y est le réel positif noté d (x,y) et égale à $|x-y|$

Remarques :
- pour tout nombre réel x, on a d $(x,0) = |x|$
- Pour tous réels x et y on a $d(x,y) = d(y,x) = |x-y|$

Exemples : Ecris sans le symbole des valeurs absolues d(-3 ;5), d(4 ;2$\sqrt{5}$).

Retiens :

Soient a et x deux nombres réels et r un réel strictement positif, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $|x-a| \leq r$
- d $(x,a) \leq r$
- $-r \leq x-a \leq r$
- $x \in [a-r, a+r]$.

Exercice d'application

Soit (D) une droite munie d'un repère (O,I) , A et B deux points de cette droite d'abscisses respectives 2 et 3.

- Détermine l'ensemble (E)des points M de (D) d'abscisse x tels que : MA et MB soient proportionnels à 2 et 3.
- Détermine l'ensemble (F) des points M de (D) d'abscisse x tels que : $2 \leq MA \leq 5$

INTERVALLES ET CALCUL APPROCHE

Intervalles de IR

Vocabulaire et notation :

Soit a et b deux nombres réels tels que a ≤ b.

- On appelle **intervalle borné** tout intervalle du type : $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$, $]a\,;b[$.
- On appelle **intervalle non borné** tout intervalle du type : $]-\infty\,;a]$, $]-\infty\,;a[$, $]a\,;+\infty[$, $[a\,;+\infty[$.
- IR et ϕ (l'ensemble vide) sont aussi des intervalles, en effet IR = $]-\infty\,;+\infty[$ et ϕ =]a ; a [.

Retiens :

-L'intervalle borné $[a\,;b]$ est **fermé** : c'est l'ensemble $\{x \in IR / a \leq x \leq b\}$.

- L'intervalle borné $[a\,;b[$ est **fermé** à gauche et ouvert à droite : c'est l'ensemble $\{x \in IR / a \leq x < b\}$.

- L'intervalle borné $]a\,;b[$ est **ouvert** : c'est l'ensemble$\{x \in IR / a < x < b\}$.

-L'intervalle non borné $]-\infty\,;a]$, est **fermé** à droite: c'est l'ensemble$\{x \in IR / x \leq a\}$.

-L'intervalle non borné $]a\,;+\infty[$ est **ouvert** : c'est l'ensemble $\{x \in IR / x > a\}$.

-L'intervalle borné $]-\infty\,;+\infty[$ est **ouvert** : c'est l'ensemble IR.

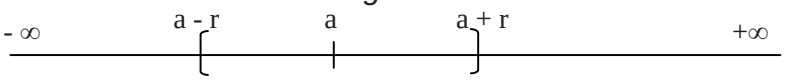
Exercice

1) Ecris en compréhension les ensembles suivants : $]a\,;b]$; $]-\infty\,;a[$.
2) Ecris l'intervalle correspondant à l'ensemble $\{x \in IR / x \geq a\}$ écrit en compréhension.

Centre et rayon d'un intervalle

- Soit $a \in IR$ et $r \in IR_+^*$, $[a - r\,; a + r]$ est un intervalle de centre a et de rayon r

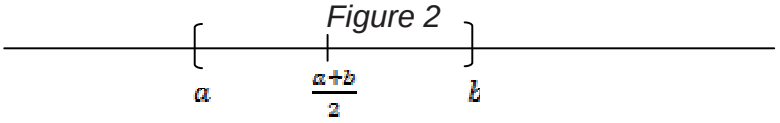
Figure 1



- Soit $a \in IR$ et $b \in IR$ tels que $a < b$.

$\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle $[a\,; b]$ et $\frac{b-a}{2}$ est son **rayon.**

Figure 2



$\frac{a+b}{2}$ est aussi le **centre** de l'intervalle $]a\,; b[$ et $\frac{b-a}{2}$ est son **rayon.**

Remarque :

- Soit $a \in IR$ et $r \in IR_+^*$, $]a - r\,; a + r[$ est aussi un intervalle de centre a et de rayon r.

Applications :

Exercice

1) Détermine le centre de l'intervalle [- 3 ; 1] .
2) Traduis en termes de valeur absolue, puis de distance chacune des relations suivantes : x ∈ [7 ; 11] et x ∈] -3 ; 1[.

Encadrement

Définitions

Le nombre x est encadré par deux réel a et b lorsque $a \leq x \leq b$;

Cette double inégalité est appelée encadrement de x d'amplitude b – a.

On dit aussi que x est encadré à b – a près.

Les réels a et b sont appelés bornes de cet encadrement (a en est la borne inférieure et b la borne supérieure).

Exemple

Le nombre $\sqrt{3}$ est encadré par 1,732 et 1,733 car $1{,}732 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}733$.

L'amplitude de l'encadrement est égale à 1,733 - 1,732 = 0,001 ou 10^{-3}

Intersection et réunion d'intervalles

Intersection

Rappel

Soit A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B. On le note $A \cap B$.

Exercice d'application :

On donne I=$[-3\,;5]$ et J= $]-\infty\,;-7]$. Détermine l'ensemble $I \cap J$.

Réunion

Rappel :

Soit A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (l'un au moins des ensembles A et B). On le note $A \cup B$.

Exercice d'application :

On donne I=$[-3\,;5]$ et J= $]-\infty\,;-7]$ Détermine l'ensemble $I \cup J$.

Approximation décimale d'un réel.

Activité :

a) Trouve l'encadrement de 5 par les carrés de deux entiers naturels consécutifs.
Déduis en l'encadrement de $\sqrt{5}$ par deux entiers naturels consécutifs.

b) Trouve l'encadrement de 5 par les carrés de deux décimaux positifs consécutifs d'ordre 1 ;
Déduis en l'encadrement de $\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

c) Trouve l'encadrement de 5 par les carrés de deux décimaux positifs consécutifs d'ordre 2 ;
Déduis en l'encadrement de $\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

d) Utilise ce dernier résultat pour montrer que $|\sqrt{5} - 2{,}235| \leq 0{,}005$.

Solution

a) $\left.\begin{array}{l} 2^2=4 \\ 3^2=9 \end{array}\right\}$ comme 4 < 5 < 9 donc 2 < $\sqrt{5}$<3

b)

$\left.\begin{array}{l} 2{,}5^2=6{,}25 \\ 2{,}4^2=5{,}76 \\ 2{,}3^2=5{,}29 \\ 2{,}2^2=4{,}84 \end{array}\right\}$ or 4,84< 5 < 5,29 donc 2,2 < $\sqrt{5}$ < 2,3

c) $\left.\begin{array}{l} 2{,}25^2=5{,}0625 \\ 2{,}24^2=5{,}0176 \\ 2{,}23^2=4{,}9729 \end{array}\right\}$ Comme $4{,}9729 < 5 < 5{,}0176$, nous avons donc

2,23< $\sqrt{5}$< 2,24

d) 2,23< $\sqrt{5}$< 2,24 équivaut à 2,235 - 0,005 ≤ $\sqrt{5}$ ≤ 2,235 + 0,005
ou bien $|\sqrt{5} - 2{,}235| \leq 0{,}005$.

On dira que : 2,235 est une approximation de $\sqrt{5}$ à 0,005 près.

Définitions

Soit α un nombre réel strictement positif

- On dit que le réel A est une approximation de X à α près lorsque $|X - A| \leq \alpha$ c'est-à-dire : $A - \alpha \leq X \leq A + \alpha$.
- On dit que B est une valeur approchée de X à α près par défaut, lorsque $B < X \leq B+\alpha$

On dit que C est une valeur approchée de X à α près par excès lorsque $C- \alpha \leq X < C$

Exemple :

On a : 2,2360 $\leq \sqrt{5} \leq$2,2360 + 0, 0001. Donc 2,2360 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-4} près par défaut.

Exercices d'application

Exercice 1

Utilise la méthode de l'activité précédente pour trouver une approximation de $\sqrt{3}$ à 0,005 près.

Exercice 2

Détermine une approximation à 10^{-6} près par excès de $\sqrt{5}$.

Détermine une valeur approchée de $\sqrt{6}$ par défaut à 10^{-3} prés.

Détermine une valeur approchée de $\sqrt{6}$ par excès à 10^{-3} prés.

Exercice 3

Soit x un réel tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$.

1. Démontre que : $\frac{1}{2} \leq 1 - x$.
2. Démontre que $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$.
3. Déduis de 1. et 2. Que 1 + x est une valeur approchée de $\frac{1}{1-x}$ à $2x^2$ prés.

Encadrement et opérations

Encadrement d'une somme

Soit les encadrements suivants de x et de y :

$a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.

on a : $a + c \leq x + y \leq b + d$.

Exercice d'application :

On donne $-2 \leq x \leq 5$ et $-7 \leq y \leq -3$. Encadre $x + y$.

Encadrement d'une différence

Règle : Pour encadrer $x - y$, on encadre d'abord $-y$ et ensuite $x + (-y)$.

Exercice d'application :

On donne $-3 \leq x \leq -1$ et $5 \leq y \leq 7{,}2$. Encadre $x - y$.

Encadrement d'un produit

a) Cas où toutes les bornes sont positives.

Soit les encadrements suivants de x et de y où a, b, c et d sont des réels positifs :

$a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.

on fait le produit membre à membre de ces deux encadrements pour obtenir l'encadrement de xy: $ac \leq xy \leq bd$.

b) Cas où toutes les bornes sont négatives.

Soit les encadrements suivants de x et de y où a, b, c et d sont des réels négatifs :

$a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.

On encadre $-x$ et $-y$ puis on se ramène au cas précédent.

c) Cas où les bornes n'ont pas toutes les mêmes signes.

Dans ce cas il n'y a pas de règle précise ; mais en scindant les intervalles où les bornes sont de mêmes signes, on pourra alors utiliser les règles précédentes.

Applications

Exercice 1 : On donne $1 < x \leq 5$ et $\sqrt{2} < y < 3$. Encadre xy

Exercice 2: On donne $-3 \leq x \leq -1$ et $2 < y \leq 7$. Encadre xy.

$-3 \leq x \leq -1$ équivaut à : $1 \leq -x \leq 3$.

En multipliant membre à membre les encadrements de –x et de y, on obtient :

$2 \leq -xy \leq 21$; on en déduit : $-21 \leq xy \leq -2$.

Exercice 3:

On donne $-2 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 7$ Encadre xy.

$-2 \leq x \leq 5$ équivaut à : $-2 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 5$;

<u>Premier cas</u> : $-2 \leq x \leq 0$ et $2 \leq y \leq 7$.

$[-2 \leq x \leq 0$ et $2 \leq y \leq 7]$ équivaut à $[0 \leq -x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 7]$.

Ce qui donne : $0 \leq -xy \leq 14$; d'où : $-14 \leq xy \leq 0$ (1)

<u>Second cas</u> : $0 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 7$.

En multipliant membre à membre, on obtient :

$0 \leq xy \leq 35$ (2).

D'après (1) et (2), on a : $-14 \leq xy \leq 35$.

Remarque : x^2 est un cas particulier de produit.

Exercices d'application

Exercice 1:

Encadre xy dans les cas suivants :

a) $-2 \leq x \leq 5$ et $-6 \leq y \leq 7$
b) $-2 \leq x \leq -1$ et $-6 \leq y \leq -2$.

Exercice 2:
Encadre x^2 dans les cas suivants :

a) $1 \leq x \leq 2$;
b) $-7 \leq x \leq -3$
c) $-2 \leq x \leq 3$.

Encadrement de l'inverse d'un nombre x

Lorsque les bornes de l'encadrement de x sont non nuls et de même signe, on applique la règle : a < b équivaut à $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Exemples :

a) $2 \leq x \leq 5$ équivaut à : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq$
b) $\frac{1}{2}$-7 ≤ x ≤ -3 équivaut à : $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{7}$.

Remarque : Il est hors de question d'espérer encadrer $\frac{1}{x}$ lorsque les bornes de l'encadrement de x sont de signes contraires (x peut prendre la valeur 0 et dans ce cas on ne peut calculer son inverse).

Encadrement d'un quotient

Pour encadrer $\frac{x}{y}$, lorsque cela est possible, on écrit : $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$; on encadre alors $\frac{1}{y}$ et ensuite $\frac{x}{y}$.

Exercices d'application

Exercice 1
Encadre $\frac{x}{y}$ dans chacun des cas suivants :

a) $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 7$
b) $-5 < x \leq -3$ et $-3 \leq y \leq -1$

Exercice 2
On donne 1< x < 2.

Encadrer $A = \frac{x^2+1}{x+3}$ et B = $\frac{-2x+3}{x^2+5}$.

Arrondi, notation scientifique, ordre de grandeur

Arrondi

Exemple :
La calculatrice donne :

$\frac{22}{7}$ = 3,1428571429…

- L'arrondi d'ordre 0 de $\frac{22}{7}$ est 3
- L'arrondi d'ordre 1 est 3,1
- L'arrondi d'ordre 2 est 3,14
- L'arrondi d'ordre 5 est 3,14286
- L'arrondi d'ordre 6 est 3,142857

On arrondit par défaut à l'ordre n lorsque la décimale de rang n+1 est : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4 et par excès lorsqu'elle est : 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9.

Donne l'arrondi d'ordre n de $\sqrt{7}$ et $-\frac{4}{7}$ pour chacune des valeurs suivantes de n : 2 ; 5 et 8.

Notation scientifique

Soit x un réel non nul ; x est exprimé en notation scientifique lorsqu'il est sous forme : $a.10^p$ avec $0 < |a| < 10$ et $p \in Z$.

Exemple :
L'écriture scientifique de $x = 5450$ est $x = 5{,}45.10^2$

L'écriture scientifique de $y = -2007{,}704$ est $y = -2{,}007704.10^3$

L'écriture scientifique de $z = 0{,}00012$ est $z = 1{,}2.10^{-4}$

Ordre de grandeur

Soit x un nombre réel d'écriture scientifique $a.10^p$, α l'arrondi d'ordre 0 de a : $\alpha.10^p$ est un ordre de grandeur de x .

Dans les exemples précédents, 5.10^2 est l'ordre de grandeur de x ; -2.10^3 est celui de y et $z = 10^{-4}$ celui de z.

EXERCICES ET PROBLEMES

Intervalles de IR et encadrement

Exercice 1

Détermine I∩ J et I∪J dans les cas suivants :

1) I =]-2 ; 6] et J = [-3 ; +∞[

2) I =]- ∞ ; 7] et J = $[-\frac{4}{5}$; +∞[

3) I =]-1 ; 4[et J = [5 ; 10]

4) I =]1 ; 4] et J =]-2 ; 4[

5)) I =]1 ; 4] et J = [4 ; +∞[

6) I =]-∞ ; 3] et J = [5 ; +∞[

Exercice 2

On donne les intervalles [2 ; 6], [-2 ; 4],]-3 ; 2[et [-4 ; 2].

1) Donne pour chacun de ces intervalles le centre, l'amplitude et le rayon.

2) Traduis à l'aide de la notion de valeur absolue l'appartenance de x à chacun des intervalles précédents par une inégalité.(bien choisir les intervalles)

3) Traduis à l'aide de la notion de distance l'appartenance de x à chacun de ces intervalles. (bien choisir les intervalles)

Exercice 3

Traduis chacune des inégalités suivantes en une appartenance de x à un intervalle.

1) $-3 < x < 2$

2) $x \geq 3$

3) $x \leq -4$

4) $-2 \leq x \leq 3$

5) $-3 \leq x < 4$ ou $-1 \leq x \leq 2$

6) $x > 4$ et $x < 8$

7) $1 \leq x \leq 3$ et $2<x<6$

8) $x > 4$ ou $x < 8$

9) $x \geq 6$ et $2 \leq x < 10$

10) $|2x - 5| \leq 4$

11) $|-2x + 1| \leq 3$

12) $|3 - 4x| \leq 1$.

Exercice 4

Traduis chacun des systèmes suivants en terme d'intervalles :

$\begin{cases} x < 6 \\ x \geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ -6 < x < 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -10 \leq x < 10 \\ 5 < x < 3 \end{cases}$

Exercice 5

1) On donne les encadrements suivants : $2 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 6$.

Donne un encadrement de x^2, y^2, $x + y$, xy, $x - y$, $\frac{x}{y}$.

2) On sait que 3 est une valeur approchée de x à 10^{-2} près par défaut et 2 est une valeur approchée à 10^{-1} près par excès de y.

Donne un encadrement de x , y , $x - y$, $x + y$, $2x - 3y$ et x^2y.

3) On considère les encadrements suivants : $-2 < x < -1$ et $-3 < y < -2$.

Donne un encadrement de x^2, y^2, $x + y$, xy, $x - y$, $\frac{x}{y}$, $2x - 3y$

Calcul dans IR

Exercice 6

Ecris sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers les réels suivants :

1) $8 \times 32(2^{-4})^3$

2) $(3^7)^{-2} \times 9^5 \times 27^4$

3) $125 \times 5^9 \times 10^{-4}$

4) $(\frac{1}{5})^2 \times (\frac{3}{5})^3 \times 25 \times 27^{75)}$

5) $(2^3)^5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 25 \times 27^2$

6) $2 \times 3^{-5} \times 4 \times 3^6$

7) $(-2^3 \times 3^{-2})^{-1} \times (3^{-1} \times 2)^{-3}$.

8) $\frac{(2^3)^2 \times (5^{-1})^3}{(6^2)^3 \times (2^{-4})^{-2}}$

Exercice 7

Donne la valeur exacte des réels suivants :

A = 6 - 3$\frac{32}{(2-1)^3}$ + 7$\sqrt{13+36}$

B = 1 + $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ + $\frac{6}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}}$

C = $\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{-3^2+2} - \frac{5 \times \frac{1}{3}}{3\sqrt{36-1}}$

D = $\frac{3}{2}\sqrt{4+32}$ - $\frac{\frac{4}{3}}{2\times 4}$ + $\frac{-3^2+6}{2-3^2}$

E = 2 - 3$\times \frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(4-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}-4}$: 3

F = $-\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$: $(\frac{1}{2} - 2)$(2 + $\frac{1}{4}$)

Exercice 8

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers et b le plus petit possible, les réels suivants : $a\sqrt{125}$; $\sqrt{27 \times 6}$;$\sqrt{242} \times \sqrt{63}$; $\sqrt{45 \times 98}$; $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{27}}$; $\frac{\sqrt{200} \times \sqrt{18}}{\sqrt{8}}$.

Exercice 9

Ecris le plus simplement possible les réels suivants :

a) $\sqrt{45} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125} - 4\sqrt{20}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{18}}{4}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{81}}$

d) $\frac{9\sqrt{75}}{3\sqrt{27}}$

e) $\left(6\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2$

f) $\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + \sqrt{27}$

Exercice 10

On considère les réels X = $\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ et Y = $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}$

1) a) Détermine le signe de X.

b) Calcule X^2 et déduis-en que X = - 2.

2) Montre que Y = $\sqrt{2}$.

Exercice 11

Donne l'écriture décimale, puis scientifique des réels suivants :

A = 16.000 × 4.900× 0,0005

B = 5,2 ×10^2 × 10^{-4} + 40.000 0,0002 – $(0,0003)^2$ ×2×10^{-8}.

Exercice 12

Rends rationnel le dénominateur de chacune des fractions suivantes.

J = $\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; K = $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Exercice 13

Exprime les réels suivants sans radical ou sans valeur absolue.

A = $|\pi - \sqrt{2}|$; B = $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$; C = $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

D = $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 4|5 - \sqrt{3}|$

Exercice 14

Développe à l'aide des identités remarquables :

$(3 - \sqrt{2})^2$; $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$; $(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$;

$(1 - \sqrt{2})^2$; $1 - (\sqrt{2} - 1)^2$; $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2$; $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$.

Exercice 15

Ecrire sous la forme $a^p \times b^q \times c^r$, avec p, q et r entiers relatifs, les réels suivants :

A = $\dfrac{(a^{-3})^2 \times b^4 \times (-a^2 b)^{-2} \times c}{(-ab^{-2})^{-1} a^3 \times b^2 \times (c^2 b)^{-2}}$; B = $\dfrac{(-a^{-1}b^2)^3 \times (ab^{-1})^3 \times (-a^3 b)^{-2}}{-a^2 \times c^{-3} \times (-a^{-1} b \times c^3)^2}$

Exercice 16

Soit a un nombre réel

1) a) Développer l'expression (1-a)(1 $+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$) .

   b) En déduire que pour a $\neq 1$, $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6 = \dfrac{1-a^7}{1-a}$

2) Application : Trouver la valeur exacte de S= $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{32}{243}+\dfrac{64}{729}$

Exercice 17

1) Montre que si a et b sont des réels quelconques :
$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ et $|a - b| \leq |a| + |b|$.

2) Si a et b sont deux réels de même signe, compare $\sqrt{a^2+b^2}$ et $|a - b|$.

3) Si a et b sont de signe contraire, compare $\sqrt{a^2+b^2}$ et $|a - b|$.

4) x étant un réel positif, compare $\sqrt{x^2+16}$ et x + 4.

5) x étant un réel quelconque, compare

i) $\sqrt{x^2+8x+16}$ et $|x| + 4$

ii) $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}$ et $2|x|$.

Exercice 18
On se propose de trouver un entier naturel n vérifiant la relation :
$n^2(n+1)^2+2n(n+1)=1848$.
On note $P = n^2(n+1)^2+2n(n+1)$

1) Après avoir factorisé $n^2(n+1)^2+2n(n+1)$, montre que P = a(a+2) avec a = n(n+1).
Déduis-en que P+1 est un carré parfait s'exprimant en fonction de a.
2) Trouve alors la valeur de a+1 puis celle de a.
3) Déduis de la question précédente la valeur de n.

Exercice19
Soient a, b et c trois nombres vérifiant a+b+c = 1.

1) Montre que $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)$.
2) Montre que $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$=(a+b)(a+c)(b+c).
3) Déduis des questions précédentes que $a^3+b^3+c^3 = 1+3(a-1)(b-1)(c-1)$.
4) Calcule les nombres entiers relatifs a, b et c sachant que $a^3+b^3+c^3 = -11$.
5) Résous dans IR, $(4x+3)^3+(2x-5)^3+(3-6x)^3 = 1$.

Exercice 20 :

Soient x, y et z trois réels distincts et non nuls tels que x+y+z=0.

1) Montrer que $\frac{x}{y-z}(\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z})=\frac{2x^2}{yz}$.
2) On pose A= $(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y})(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z})$. Déduis de la question 1) que A=3+2($\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$).
3) En utilisant le développement de $(x+y+z)^3$, montre que $x^3+y^3+z^3=3xyz$.
4) Déduis-en que A = 9

Exercice 21

On donne les expressions : X= $\sqrt{x+\sqrt{y}}$, Y= $\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$,

Z= $\sqrt{x-\sqrt{y}}$ et T= $\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$.

On suppose que x et y sont des nombres rationnels positifs tels que $x^2 - y \geq 0$.

1) Vérifie que X=Y et Z=T.
2) Montre que X et Z peuvent s'écrire sous la forme X= $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et Z= $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
3) Application : Simplifier $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Exercice 22

On appelle nombre d'or, le nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1) Vérifie les égalités : a) $\phi^2 = \phi + 1$ b) $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ c) $\phi^3 = 2\phi + 1$	2) Montre que si le rectangle ABCD est un rectangle d'or ($\frac{longueur}{largeur} = \phi$), alors si on enlève à ce rectangle le carré AEFD, le rectangle restant est aussi un rectangle d'or. (On pourra prendre AD=1 et AB= ϕ).

Exercice 23

1) Montre que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2) Déduis-en la valeur de la somme

S = $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Utilisation de figures géométriques

Exercice 24

On donne un triangle ABC. E est un point de [AB] et D un point de [AC] tels que : AE = $4\sqrt{3}$ - 2 , AD = $4 + 2\sqrt{3}$, EB = 2, CD = $\frac{16+10\sqrt{3}}{11}$.

La droite (DE) est-elle parallèle à (BC) ?

Exercice 25

ABC est un triangle tel que AB = $3 - \sqrt{2}$, AC = $5 - 2\sqrt{2}$ et BC =$44 - 26\sqrt{2}$.

1) Montre que ABC est un triangle rectangle.
2) Calcule cos$\widehat{ABC}$ et sin $\widehat{ACB}$ sous forme de fraction de dénominateur rationnel.
3) Soit I le milieu de [AB], J celui de [AC] et K celui de [BC]. Calcule le périmètre p du triangle IJK sous la forme a + b$\sqrt{c}$.
4) Calcule l'aire du triangle ABC sous la forme a + b$\sqrt{c}$.

Exercice 26

On considère un triangle équilatéral ABC de coté $4 + 2\sqrt{3}$. Soit A' le milieu de [BC], G le centre de gravité du triangle ABC.

Donne la valeur exacte de AA', de BG, et celle de l'aire du triangle ABC.

Problèmes de synthèse

Exercice 27

Le jeune Modou immigré en Italie a réussi à sauver l'enfant de son patron d'une noyade. Ce dernier très touché par l'acte de bravoure du jeune sénégalais lui demanda ce qu'il voulait comme récompense. Et Modou de lui demander un euro le premier jour, deux le second jour, quatre le troisième jour et ainsi de suite en doublant à chaque fois la somme reçue la veille jusqu' au septième jour.

1) Exprime sous forme de puissance de 2 la somme reçue par Modou durant chacun des sept jours.

2) En utilisant l'exercice 16 détermine le montant total de la récompense de Modou.

Exercice 28

Trois villes A, B et C sont situés le long d'une ligne rectiligne : A et B sont distants de 900m ; B est entre A et C ; B et C sont distants de 1200m.

Une personne compte faire quotidiennement deux allers et retours entre sa maison et la ville A ; un aller et retour entre sa maison et la ville B ; trois entre sa maison et la ville C. Où doit-il placer sa maison pour que son trajet journalier soit minimal.

Exercice 29

La vitesse de la lumière est estimée à 3.10^8m /s et la distance moyenne entre la terre et le soleil est estimée à 149 millions km. Calculer le temps nécessaire à un signal lumineux issu du soleil pour parvenir à la terre.

Devoir

Exercice1: **(10 points)**

1) Soient a, b et c trois nombres réels non nuls et E= $\frac{(a^{-3}.c^2)^4(-b^3.a^2.c^{-5})^{-2}}{(a^{-1}.b^{-4}.c^{-6})^3}$.

Ecris E sous la forme E= $a^m.b^n.c^p$ où m, n et p sont des entiers relatifs. **(1,5 pts)**

2) Soit A= $\frac{8^5(-25)^3(12)^{-2}}{6^2(10)^{-2}(-45)^3}$. Exprime A sous la forme A= $2^m3^n5^p$, m, n et p étant des entiers relatifs. **(1,5 pt)**

3) Résous dans R :

a) $|2x-5| = 4$ **(0,75 pt)**

b) $|5x-3| = x+1$ **(1 pt)**

4) Soit (D) une droite graduée, A et B deux points de (D) d'abscisses respectives 2 et -3.

Détermine l'ensemble des points M de (D) tels que :

a) d(A,M)= d(B,M) **(1 pt)**

b) d(A,M) ≤ 3 **(1pt)**

c) d(B,M)>4 **(1,5 pts)**

5) Soient x, y et z trois réels tels que xy+yz+xz=0.

Calcule : B= $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$ **(1,75 pts)**

Exercice 2 : 6 points

Soit X= $\sqrt{4+\sqrt{15}}$ $et\, Y=\sqrt{4-\sqrt{15}}$

1) Calcule XY **(0,75 pt)**
2) On pose A=X+Y et B=X-Y

a) Vérifie que A>0 et B>0 **(1,25 pts)**

b) Calcule A^2et B^2. En déduire A et B. **(3pts)**

c) Donne alors une expression plus simple de X et Y. **(1 pt)**

Exercice 3: 4points

1) Développe $(a+b+c)^2$ **(1 pt)**
2) Montre que si a+b+c =0 alors $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ **(1,25 pts)**
3) On suppose que a, b et c sont non nuls. Montre que

si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ alors $(a+b+c)^2= a^2+b^2+c^2$. **(1,75 pts)**

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Devoir

Exercice1

1) E= $a^{-13}.b^{6}.c^{36}$
2)

$$A=\frac{2^{15}(-5^{6})(2^{-4})(3^{-2})}{2^{2}(3^{2})(2^{-2})(5^{-2})(-3^{6}.5^{3})}=2^{11}.3^{-10}.5^{5}$$

.

3) a) $|2x-5|=4$ si et seulement si 2x-5=4 ou 2x-5=-4 soit x= $\frac{9}{2}$ $ou\ x=\frac{1}{2}$,

d'où S={ $\frac{9}{2},\frac{1}{2}$ }

b) $|5x-3|=x+1$

- Si x+1<0, alors pas de solution : S= ϕ
- Si x+1 $\geq$ 0, alors $|5x-3|=x+1$ équivaut à : 5x-3=x+1 ou 5x-3=-x-1 soit x=1 ou x= $\frac{1}{3}$, d'où S={1, $\frac{1}{3}$}

4) a) d(A,M)=d(B,M) si et seulement si $|x-2|=|x+3|$ c'est-à-dire x-2=x+3 ou x-2=-x-3 soit 0x=5 (impossible) ou x= $-\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est le point M d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

b) d(A,M) $\leq$ 3 si et seulement $|x-2| \leq 3$ c'est-à-dire -3 $\leq$ x-2 $\leq$ 3 soit -1 $\leq$ x $\leq$ 5. Alors l'ensemble des points M est le segment [EF] de (D) où E et F sont les points d'abscisses respectives -1 et 5.

c) d(B, M)>4 si et seulement si $|x+3|>4$ c'est-à-dire x+3>4 ou x+3<-4 soit x>1 ou x<-7

Alors l'ensemble des points M est la droite (D) privée du segment [HG] où H et G sont les points d'abscisses respectives -7 et 1.

5) B= $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$

= $\frac{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y}{xyz}$.

Or xy+yz+xz=0 donc x(xy+yz+xz)=0 d'où $x^2y+x^2z=-xyz$. De même en multipliant par y puis par z, on a : $y^2x+y^2z=-xyz$ et $z^2x+z^2y=-xyz$. En remplaçant dans l'expression de B, on a B= $\frac{-3xyz}{xyz}=-3$

<u>Exercice 2 :</u>

$X=\sqrt{4+\sqrt{15}}$ et $Y=\sqrt{4-\sqrt{15}}$

1) XY= $\sqrt{4+\sqrt{15}}\ \sqrt{4-\sqrt{15}}$

= 1

2) A=X+Y

$=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$

B=X-Y

= $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$

a)

On a : $\sqrt{4+\sqrt{15}}>0$ et $\sqrt{4-\sqrt{15}}>0$, donc $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}>0$

Soit A>0

On a : $\sqrt{4+\sqrt{15}}>\sqrt{4-\sqrt{15}}$, donc $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}>0$

Soit B>0

b) $A^2=X^2+2XY+Y^2$

$A^2=4+\sqrt{15}+2+4-\sqrt{15}$

= 10

Donc A= $\sqrt{10}$

$B^2=X^2-2XY+Y^2$

$=4+\sqrt{15}-2+4-\sqrt{15}$

=6

Donc B= $\sqrt{6}$

c) On a : $\begin{cases} X+Y=\sqrt{10} \\ X-Y=\sqrt{6} \end{cases}$ D'où X = $\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})$ et Y = $\frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})$

Exercice 3 :

1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ (i)

2) Si $a+b+c=0$ alors en remplaçant $a+b+c$ par 0 dans (i), on a :

$0^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, ce qui entraîne que $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

3) Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, alors $\frac{ab+ac+bc}{abc}=0$ c'est-à-dire $ab+bc+ca = 0$.

Et en remplaçant dans (i), on a $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$.

8 FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

APERÇU HISTORIQUE

Lorsque nous affirmons qu'une quantité A dépend d'une autre quantité B, nous supposons qu'il existe une règle qui permet d'obtenir A connaissant B. C'est ainsi que nous associons le chiffre d'affaire d'une entreprise au nombre de produits vendus, ou encore le montant de la facture d'électricité à la consommation.
Déjà dans l'antiquité, les babyloniens ont établi des tables de carrés, de cubes et de racines carrées à l'usage des astronomes.
Au 14e siècle, Oresme a exprimé la vitesse en fonction du temps.
Le terme de fonction est utilisé pour la première fois en 1637 par Descartes pour désigner une puissance x^n d'une variable x.
Puis en 1694, Leibniz applique ce terme à différentes caractéristiques d'une courbe. Mais c'est Dirichlet qui a le premier énoncé le concept de fonction dans son sens moderne de correspondance.
Enfin au 19e siècle, l'apparition de la théorie des ensembles a permis d'affiner la notion de fonction et de déboucher sur la notion d'application.

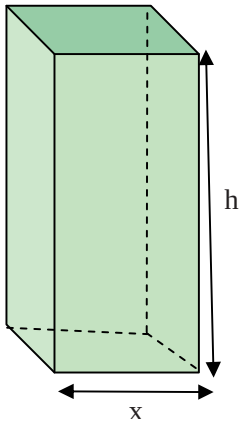
OBJECTIFS

- Avoir une bonne connaissance de la notion de fonction
- Etre en mesure de modéliser des situations concrètes en utilisant les fonctions.
- Résoudre des problèmes faisant appel aux fonctions.

GENERALITES

Activité préparatoire

L'unité de longueur est le décimètre. Une boite a la forme d'un pavé droit sans couvercle. La hauteur de ce pavé a pour mesure h, sa base est un carrée de coté de mesure x. Elle a une contenance de $\frac{1}{2}$ dm^3 (voir figure ci-contre).
Exprime la hauteur h puis l'aire extérieure A (fond plus parois) de cette boite en fonction de **x.**



Retiens :
La relation A $= x^2 + \frac{2}{x}$ décrit une relation de dépendance entre les deux grandeurs A et x.

Pour chaque valeur de x correspond au plus une valeur de A . On dit de ce fait que A est fonction de x. on peut écrire A (x) au lieu de A, pour marquer la dépendance de l'aire, de la valeur x du côté de la base. Ce qui donne : A (x) = $x^2 + \frac{2}{x}$.
Cette notation a l'avantage d'être plus économique, on écrira par exemple :

- A (1) pour désigner l'aire latérale de la boîte si le côté de sa base est 1.
- A (2,5) pour désigner l'aire latérale de la boîte si le côté de sa base est 2,5.

De façon générale, une fonction f de IR vers IR est une correspondance de IR vers IR par laquelle à tout nombre réel x on fait correspondre, au plus, un nombre réel. On écrit :

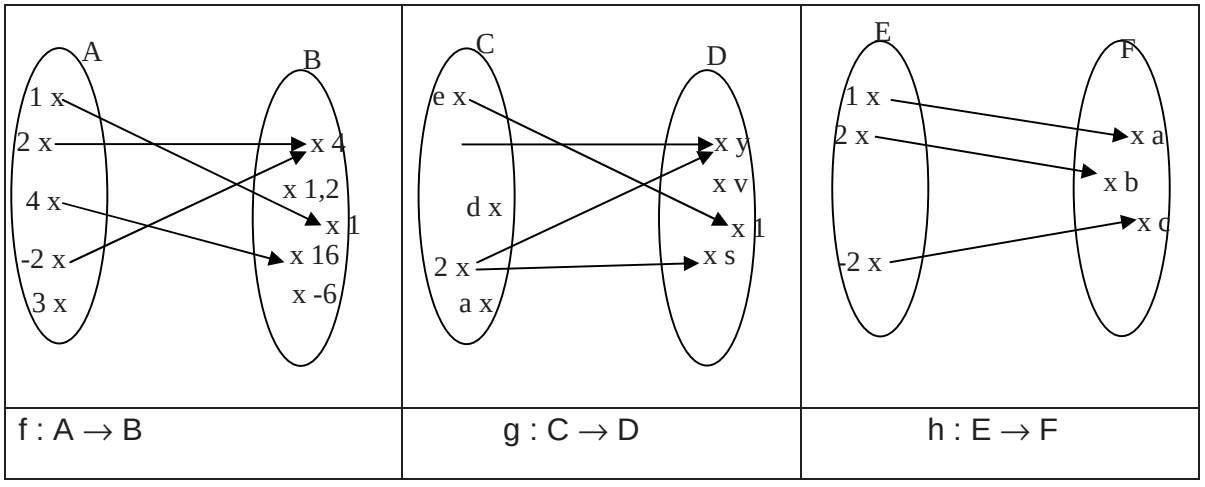
$$f : IR \longrightarrow IR$$
$$x \longmapsto f(x)$$

On lit « f de IR vers IR qui à x associe f(x) ». Le premier ensemble IR est appelé ensemble de départ et le deuxième, ensemble d'arrivée.

Définition d'une fonction

Activité

Les représentations ci-dessous sont les diagrammes sagittaux de trois correspondances f, g et h.



f : A → B	g : C → D	h : E → F

- Quelles sont celles qui sont des fonctions ?
- Donne la définition d'une fonction f d'un ensemble E vers un ensemble F

Définition

E et F étant deux ensembles non vides, on appelle fonction f de E vers F, toute correspondance f qui à tout élément de E associe au plus un élément de F.

On note :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Retiens :

- au plus un élément signifie : zéro ou un élément.
- E est l'ensemble de départ de la fonction f.
- F est l'ensemble d'arrivée de la fonction f.
- f (x) est l'image de x par f , x est un antécédent de f(x) par f.
- Si E est une partie de IR on dit que la fonction f est à variable réelle ;
- Si F est une partie de IR on dit que f est une fonction numérique ;
- Si les deux conditions sont réunies on dit que f est une fonction numérique à variable réelle.

Dans la suite du manuel, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions numériques à variable réelle.

Ensemble de définition d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments x de E pour lesquels f(x) existe.
- On le note généralement D_f.
- Si D_f est égal à E on dit que f est une application de E dans F. Autrement dit, une fonction $f : E \longrightarrow F$ est une application si et seulement si chaque élément de E a une image et une seule dans F par f.

- Dans l'activité précédente l'ensemble des réels x pour lesquels l'aire A existe est D = IR*+ ; c'est l'ensemble de définition de la fonction A définie par :

$$\begin{aligned} A: IR^+ &\longrightarrow IR \\ x &\longmapsto A(x) = x^2 + \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Application

1)Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) v: IR $\longrightarrow$ IR
$x \longmapsto \frac{3x-1}{x-3}$

b) w: IR $\longrightarrow$ IR
$x \longmapsto 2x^2 - x + 3$

c) k: IR $\longrightarrow$ IR
$x \longmapsto \frac{\sqrt{2x+3}}{x-3}$

d) u : IR $\longrightarrow$ IR
$x \longmapsto \sqrt{x^2-9}$

e) La fontion f de l'activité précédente (définition d'une fonction)

f) La fontion h de l'activité précédente (définition d'une fonction)

2) Quelles sont celles qui sont des applications de IR dans IR

Point méthode

Dans la pratique pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction à variable réelle dont l'ensemble d'arrivée est IR, il suffit de :

- repérer les « *suspects* » (les dénominateurs et les radicandes).
- écrire chaque dénominateur et poser la condition qu'il doit être différent de 0 (…≠0)
- écrire chaque radicande et poser la condition qu'il doit être positif (…≥0).
- résoudre le système ainsi formé.

L'ensemble de définition de cette fonction est alors l'intersection de l'ensemble de départ de cette fonction et de l'ensemble des solutions du système.

Remarque

- Dans le cas où un seul suspect est repéré, on cherche l'ensemble des réels qui vérifient la condition imposée à ce « suspect » L'intersection de cet ensemble et l'ensemble de départ est l'ensemble de définition de la fonction.
- Si aucun suspect n'est repéré, l'ensemble de définition est l'ensemble de départ de la fonction
- En classe de terminale tu verras un autre « suspect ».

Restriction d'une fonction

Définition

A et B sont deux ensembles non vides.Soit une fonction f définie de A vers B et I une partie non vide de A, contenue dans l'ensemble de définition de f.

La fonction $g : I \to B$ définie par $g(x) = f(x)$, est la restrictionde la fonction f à l'ensemble I. On la note souvent $f_{|I}$.

C et D sont deux ensembles non vides. J est un ensemble contenant C et différent de C. h est une fonction définie de C dans D. Si ℓ est une fonction de J dans D telle que pour tout x appartenant à C, $\ell(x) = h(x)$, on dit que ℓ est un prolongement à J de h.

Application :

On donne $\begin{array}{l} f : IR \longrightarrow IR \\ x \longmapsto \dfrac{4x^2-1}{2x+1} \end{array}$

- Détermine l'ensemble de définition de f.
- Montre que la restriction de f sur l'intervalle $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ est une application affine dont on précisera l'expression.

Sens de variation d'une fonction

Activités

Activité 1

Soit un jardin rectangulaire dont la longueur x dépasse la largeur de 10 mètres.

1. Exprime l'aire S du jardin en fonction de sa longueur ;
2. Complète le tableau suivant

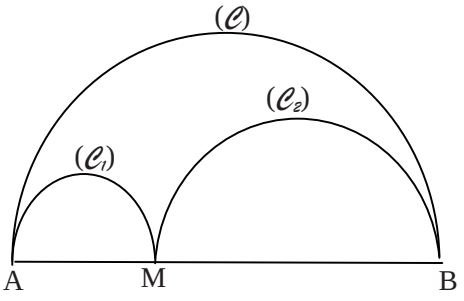
x	24	25	30	35	36
S					

3. Comment varie S lorsque x augmente ?

Activité 2

On donne un segment [AB] tel que AB = 8. Soit ($\mathscr{C}$) un demi-cercle de diamètre [AB] et M un point du segment [AB] tel que : AM = 2x.

Soit ($\mathscr{C}_1$) le demi-cercle de diamètre [AM] et ($\mathscr{C}_2$) le demi-cercle de diamètre [BM] situés dans le même demi-plan de frontière (AB) que ($\mathscr{C}$) .



1) Complète les tableaux ci-dessous où f(x), g(x) et h(x) désignent les longueurs respectives de ($\mathscr{C}_1$), ($\mathscr{C}_2$) et ($\mathscr{C}$) en fonction de x.

x	0,5	5/4	3/2	2	5/2	3,5
f(x)	…	…	…	…	…	…

X	0,5	5/4	3/2	2	5/2	3,5
g(x)	…	…	…	…	…	…

X	0,5	5/4	3/2	2	5/2	3,5
h(x)	…	…	…	…	…	…

2) Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels compris entre 0,5 et 3,5 tels que $x_1 < x_2$ quelle conjecture peux-tu faire sur $f(x_1)$ et $f(x_2)$?

3) Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels compris entre 0,5 et 3,5 tels que $x_1 < x_2$ quelle conjecture peux-tu faire sur $g(x_1)$ et $g(x_2)$?

4) Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels compris entre 0,5 et 3,5 tels que $x_1 < x_2$ quelle conjecture peux-tu faire sur $h(x_1)$ et $h(x_2)$?

Définitions

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle I de IR.

- La fonction f est dite croissante sur I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle I :
  $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) \leq f(x_2)$; autrement dit , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- La fonction f est dite décroissante sur I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle I :
  $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) \geq f(x_2)$;autrement dit , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- La fonction f est dite strictement croissante sur I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle I :
  $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$; autrement dit , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- La fonction f est dite strictement décroissante sur I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle I :
  $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) > f(x_2)$; autrement dit , $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- La fonction f est dite constante sur I si pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle I , $f(x_1) = f(x_2)$.
- La fonction f est **monotone** sur un intervalle I si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.
- La fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle I si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.
- Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle, c'est dire si la fonction est croissante, décroissante.

Application :

On donne les fonctions f, g et h de IR vers IR, définies respectivement par :

a) $f(x) = 2x – 5$ b) $g(x) = -3x – 25$ c) $k(x) = 5(x – 2) – 5x + 7$.

Montre que : f est croissante sur IR, g est décroissante sur IR et k est constante sur IR.

Exercice
Donner un exemple de fonction croissante, de fonction décroissante, de fonction constante.

Taux de variation

Activité

Une voiture va d'une ville A vers une ville B.
Le tableau ci-dessous donne à chaque heure x la position de cette voiture notée f(x), repérée à l'aide de bornes kilométriques.

Heure	8h00	9h00	10h00	12h00
Borne kilométrique	36	130	280	310

a) Calcule la vitesse moyenne de cette voiture entre 8h00 et 10h00.
a) Calcule la vitesse moyenne de cette voiture entre 9h00 et 12h00.
b) Donne l'expression de la vitesse moyenne entre deux moments distincts x_1 et x_2 en heures (avec $x_1 < x_2$).

Solution :

a) Entre 8h00 et 10h00 :

- la distance parcourue est f(10) – f(8) = 280 – 36 = 244 km
- le temps mis est de 10h00 – 8h00 = 2h
- la vitesse moyenne est alors de : $\frac{f(10)-f(8)}{10-8} = \frac{244}{2}$ = 122km/h.

b) De la même manière, calcule la vitesse moyenne entre 9h00 et 12h00.
c) En supposant x_1 et x_2 en heures.
- La distance parcourue est $f(x_2) - f(x_1)$
- La durée du parcours est de parcours est de $f(x_2) - f(x_1)$.
- La vitesse moyenne $T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

La vitesse moyenne indique, entre deux instants, de la distance parcourue par rapport temps au temps de parcours.

La définition suivante portant sur les fonctions illustre ce rapport dans un cadre plus général.

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle I de IR . Pour tous réels x_1 et x_2 distincts de I, on appelle taux de variation ou taux d'accroissement de la fonction f sur I entre x_1 et x_2 le réel noté $T_f(x_2,x_1)$, défini par

$$T_f(x_2,x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Remarque : $T_f(x_2,x_1)$= $T_f(x_1,x_2)$.

Exercice

On donne les fonctions numériques à variable réelle f et h telles que : f(x) = 2x -5 et h(x) = -3x - 25.

a) Détermine le taux d'accroissement, entre x_1 et x_2 , de chacune de ces deux fonctions ; x_1 et x_2 étant deux éléments distincts de l'intervalle [2 ; 4]. Donne dans chaque cas, si possible, le signe du taux d'accroissement.

b) Etudie le sens de variation chacune de ces fonctions sur l'intervalle [2 ; 4].

c) Y'a-t-il un lien entre sens de variation d'une fonction et signe du taux d'accroissement de la fonction sur un intervalle I. ?

Retiens :

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie sur un intervalle I. Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de I et $T_f(x_2,x_1)$le taux de variation de f entre x_1 et x_2.

- $T_f(x_2,x_1)\geq 0$ sur l'intervalle I si et seulement si f est croissante sur I.
- $T_f(x_2,x_1)\leq 0$ sur l'intervalle I si et seulement si f est décroissante sur I.
- $T_f(x_2,x_1) = 0$ sur l'intervalle I si et seulement si f est constante sur I.

Exemples

Exemple1

f est la fonction numérique à variable réelle définie par f(x) = x^3 . D_f = IR.
Soient x_1 et x_2 deux distincts , on a : $T_f(x_2,x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1^2+x_1x_2)}{x_2-x_1}$$

$$= x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2$$

On sait que pour tous réels a et b, $a^2 + b^2 \geq -ab$ donc : $x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2 \geq 0$

our tous réels x_1 et x_2. On en déduit que T_f est positif ou nul sur IR.

Donc f est croissante sur IR.

Exemple2

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par g(x) =x^2

D_g = IR

Soient x_1 et x_2 deux distincts, on a : $T_g(x_2,x_1) = \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

$$= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= x_1 + x_2$$

Donc T_g est supérieure à 0 sur IR^+ et inférieure à 0 sur IR^-.

g est alors croissante sur IR^+ et décroissante sur IR^- .

Applications :

Exercice1

Etudie le sens de variation de f sur I dans chacun des cas suivants :
a) f définie sur I =]1 ; ∞[par : f(x) = x^2 – 2x + 3
b) f définie sur I =] -∞; 3[par : f(x) = $\frac{2x-1}{x-3}$

Exercice2

Soit f une fonction numérique à variable réelle. Soient a et k deux nombres réels fixés. g et h sont les fonction définies par g(x) = f(x) + k et h(x) = af(x).

1) Montre que si f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I de son ensemble de définition, alors g est croissante (respectivement décroissante sur I)
2) a) Montre que si f est croissante (respectivement décroissante) sur I et a supé rieur à 0 alors h est croissante (respectivement décroissante) sur I ;
c) Montre que si f est croissante (respectivement décroissante sur I) et a inférieur à 0, alors h est décroissante (respectivement croissante) sur I.

Retiens

Soient a et k deux nombre réels fixés. Soit f une fonction numérique à variable réelle monotone sur un intervalle I. g et h sont deux fonctions numériques définies par g(x) = f(x) + k et h(x) = af(x).

- g est monotone sur I et varie dans le même sens que f ;
- Si a est positif, h est monotone sur I et varie dans le même sens que f ;
- Si a est négatif, h est monotone sur I et h et f varient en sens inverses.

Représentation graphique

Activité

Soit f l'application de IR vers IR définie par f(x) = -2x+3.
Construis dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, l'ensemble des points M (x, f(x)) tels que : $x \in$ IR.
Tu as vu en troisième que f est une application affine de IR.
L'ensemble de ces points est la droite d'équation y= -2x+ 3 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Cette droite est la représentation graphique, on dit aussi courbe représentative, de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle. $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan. l'ensemble des points M (x, f(x)) , $x \in D_f$ est appelé courbe représentative (ou représentation graphique) de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$; on la note souvent $\mathscr{C}_f$

Ainsi $\mathscr{C}_f$ ={ M (x, f(x)), $x \in D_f$ }.

La relation y= f(x) est appelée équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Application :

Exercice1

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. g et f sont des fonctions numériques à variable réelle définies respectivement par : $g(x) = -x + 4$ *et* $f(x) = -x^3 + \sqrt{x+1}$. C_g est la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et C_f celle de f.

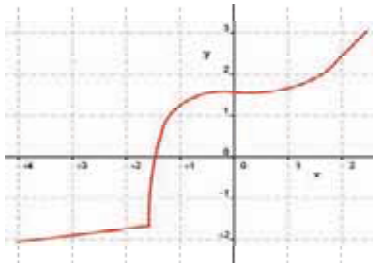
1) Dire parmi les points suivants ceux qui appartiennent à C_g, : A(-1,3) , K(-1,61) B(0,1), C(4,0), D(-2,1), I(2,4), J(2,2), E(3,-25). Justifie tes réponses.

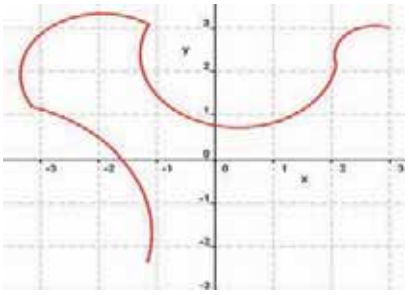
2) Même question pour C_f

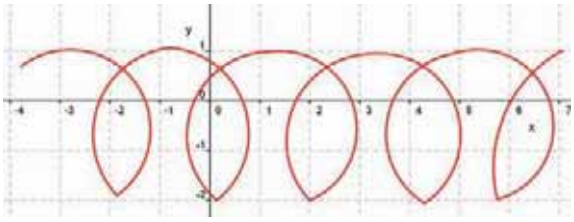
3) Trace dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction g.
Quelle est la nature de C_g ?

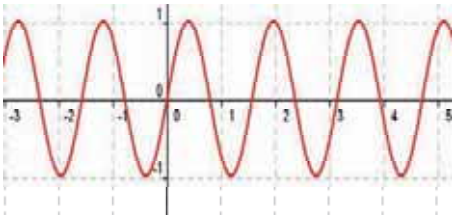
Exercice2

Parmi les courbes ci-dessous quelles sont celles qui représentent une fonction dans le repère considéré ?









Retiens :

Une courbe tracée dans un repère est la courbe représentative d'une fonction dans ce repère si et seulement si toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un point au plus.

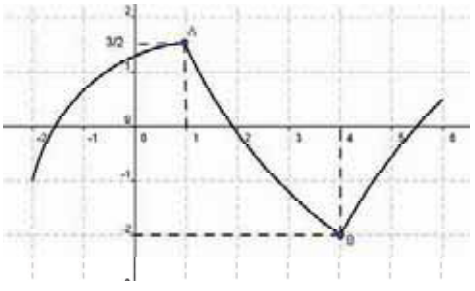
Extrémum d'une fonction

Activité

La courbe ci-contre est la courbe représentative d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle I = [-2 ; 6].

1) Détermine la plus grande valeur prise par f sur I

2) Détermine la plus petite valeur prise par f sur I.



Tu as vu que :

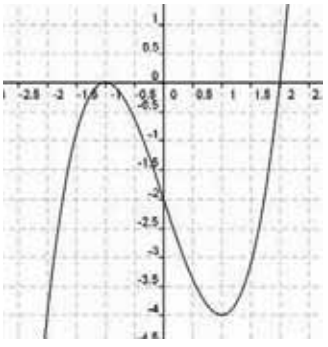
- $\frac{3}{2}$ = f(1) est la plus grande valeur prise par f sur I. 0n dit de ce fait que $\frac{3}{2}$ est le maximum de la fonction f sur I ; il est pris en 1.
- -2 = f(4) est la plus petite valeur prise par f sur I. On dit de ce fait que –2 est le minimum de la fonction f sur I ; il est pris en 4.
- $\frac{3}{2}$ et -2 sont les extrémums de f sur I.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et I un intervalle contenu dans D_f .

On dit que f admet un **maximum** en un point x_0 de I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leq f(x_0)$; $f(x_0)$ est alors le maximum de f sur I atteint en x_0. .
On dit que f admet un **minimum** en un point x_0 de I lorsque pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(x_0)$; $f(x_0)$ est alors le minimum de f sur I atteint en x_0 .

Application

La figure ci-contre représente la représentation graphique d'une fonction f. 1) Indique les extrémums de f sur l'intervalle [-2 ; 1,5] 2) Indique les extrémums de f sur l'intervalle [-2 ; 0] 3) Indique les extrémums de f sur l'intervalle [0 ; 1,5]	

Exercices

Exercice 1

Soit la fonction numérique à variable réelle définie sur IR par $f(x) = x^2 – 4x + 3$.

1) Montre que : $f(x) = (x – 2)^2 – 1$ pour tout réel x.

2) Déduis-en que – 1 est le minimum de f sur IR.

Exercice 2
g est la fonction numérique à variable réelle définie sur IR par :

$g(x) = -x^3 + 3x - 1$.

1) Etudier le signe de g(x)-1 sur l'intervalle IR

2) En déduire que +1 est le maximum de g sur l'intervalle [0 ; 2].

Parité

Fonction paire

Activité
Soit h la fonction définie de IR vers IR par $h(x) = |x| + 2$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_h de h ;
2) Vérifie que pour tout x appartenant à D_h , -x appartient à D_h.
3) Ecris h(x) sans symbole valeur absolue.
4) Construis la courbe représentative de h.
5) Complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
h(x)							

6) Compare h(x) et h(-x) pour tout $x \in D_h$
Remarque : Tu as pu constater que pour tout $x \in D_h$:

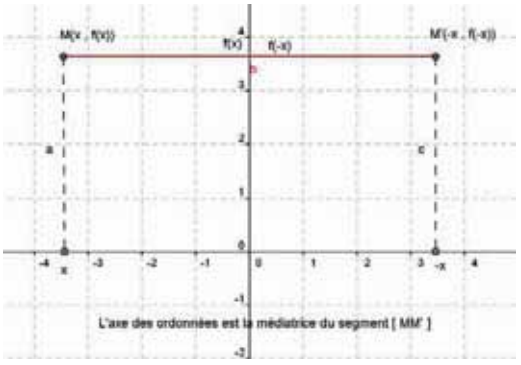
- $-x \in D_h$
- et que h(x) = h(-x).

On dit alors que h est une fonction paire.
Définition :

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que f est **paire** si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ (on dit aussi que D_f est symétrique par rapport à 0)
- $\forall x \in D_f$; f(-x) = f(x).

Interprétation graphique

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonale est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car pour tout x appartenant à D_h les points M(x , f(x)) et M'(-x, -f(x)) de la courbe (Cf) sont symétriques par rapport à (y'y). *Remarque : il est nécessaire, dans le cas où la fonction f est paire , d'avoir un repère d'axes perpendiculaires pour que la courbe admette l'axe des ordonnées comme axe de symétrie*.	

Exemple

La fonction numérique à variable réelle g définie par $g(x) = x^2$ est paire.

En effet :

- $D_g = IR$. Donc si $x \in D_g$ alors $-x \in D_g$
- Soit x un réel , on a :

$$h(-x) = (-x)^2$$
$$= x^2$$
$$= h(x).$$

Fonction impaire

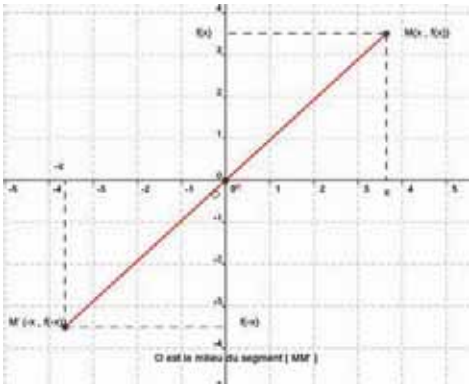
Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que f est **impaire** si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ (on dit aussi que D_f est symétrique par rapport à 0)
- $\forall x \in D_f$; $f(-x) = - f(x)$.

Interprétation graphique

La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère quelconque est symétrique par rapport à l'origine car pour tout x appartenant à D_f les points M(x , f(x)) et M'(-x, -f(-x)) de la courbe (C_f) sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.



Exemple

La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est impaire sur IR.

En effet, tu vérifies facilement que :

- $\forall x \in$ IR , l'ensemble de définition de f est IR ; $-x \in$ IR
- $\forall x \in$ IR $f(-x) = - f(x)$

Retiens :

Etudier la parité d'une fonction c'est dire si cette fonction est paire ou impaire ou n'est ni paire ni impaire.

Application :

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

f : IR $\longrightarrow$ IR $x \longmapsto \frac{x^2-1}{x}$	g : IR $\longrightarrow$ IR $x \longmapsto \frac{2x+1}{x^2+x}$	h : IR $\longrightarrow$ IR $x \longmapsto \frac{\lvert x\rvert}{x^2-4}$	k : IR $\longrightarrow$ IR $x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x}$

Composée de fonctions

Activité

Soient f et g les fonctions définies par : $f : [-1 ; 1] \longrightarrow [0 ; 2]$ $\quad g : [0 ; 2] \longrightarrow IR$

$x \longmapsto x^2$ $\quad x \longmapsto \sqrt{x - \frac{1}{4}}$

1) Complète le tableau suivant en remplissant les cases dans les cas où c'est possible.

x	$-\frac{1}{2}$	-1	- 0,2	0	-1,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,8	1	2
$f(x)$											
$g(f(x))$											

2) Pour chacune des cases que tu n'as pas pu remplir, donne les raisons.
3) Donne une expression qui permet de calculer directement les nombres de la troisième ligne, connaissant la valeur de x .
4) Quelle fonction le travail que tu viens de faire t-inspire-t-il ?

Définition

A, B, C étant trois parties non vides de IR. Soient les fonctions numériques f et g définies par :

$f : A \longrightarrow B$ $\quad g : A \longrightarrow B$

$x \longmapsto f(x)$ $\quad x \longmapsto g(x)$

On suppose qu'il existe au moins un élément x de A tel que $f(x) \in D_f$.

On appelle composée de f suivie de g la fonction notée gof (on lit « g rond f ») la fonction de A (ensemble de départ de f) vers C (ensemble d'arrivée de g), définie par $gof(x) = g[f(x)]$

$$gof : A \longrightarrow C$$

$$x \longmapsto gof(x) = g[f(x)]$$

Application :

Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle définies respectivement par :
$f(x) = 2x^2 + 5$ et $g(x) = 3x - 7$

1) Détermine gof(x)
2) Détermine fog(x)
3) Compare les résultats

Retiens :

« o » n'est pas commutative. La fonction gof n'est pas nécessairement égale à fog.

Ensemble de définition de gof

Activité

Soient f et g deux fonctions numériques à variable réelle définies respectivement par :

f(x) = $f(x) = \frac{1}{x}$ $et\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Détermine $D_f\ et\ D_g$
2) Détermine l'ensemble des réels x tels que $f(x) \in D_g$.
3) En déduire D_{gof} .
4) Montre que si $x \in D_{gof}$ alors $gof(x) = \sqrt{x}$.
5) En utilisant les résultats des questions 3) et 4), quelle remarque peux-tu faire sur l'ensemble de définition de gof ?

Retiens :

$x \in D_{gof}$ si et seulement si : $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Application
Exercice

f et g , ci-contre, sont les deux fonctions de l'activité introductive de la composition.

$f : [-1 ; 1] \longrightarrow [0 ; 2]$ $\quad x \longmapsto x^2$

$g : [0 ; 2] \longrightarrow IR$ $\quad x \longmapsto \sqrt{x - \frac{1}{4}}$

1) Détermine l'ensemble de définition de gof

2) Détermine l'ensemble de définition de fog

Sens de variation d'une composée de fonctions :

Activité

A, B et C sont trois ensembles non vides de IR. f est une application de A vers B et g une application de B vers C
Montrer que :

a)-Si f est croissante sur A et g croissante sur B, alors gof est croissante sur A

b)-Si f est décroissante sur A et g décroissante sur B, alors gof est croissante sur A

c)-Si f est croissante sur A et g décroissante sur B, alors gof est décroissante sur A.

d) -Si f est décroissante sur A et g croissante sur B, alors gof est décroissante sur A

Retiens :
Si A, B et C sont trois ensembles non vides de IR, f une application de A vers B et g une application de B vers C, on a :

- Si f est croissante sur A et g croissante sur B, alors gof est croissante sur A
- Si f est décroissante sur A et g décroissante sur B, alors gof est croissante sur A
- Si f est croissante sur A et g décroissante sur B, alors gof est décroissante sur A.
- Si f est décroissante sur A et g croissante sur B, alors gof est décroissante sur A.

ETUDE DES FONCTIONS USUELLES

Introduction

Nous venons de voir dans ce qui précède, la notion de fonction numérique et certaine de ses propriétés éventuelles. Nous avons aussi vu la notion de courbe représentative d'une fonction numérique à variable réelle. La construction de ces courbes n'est pas en général chose aisée. Dans ce qui suit nous nous intéresserons à certaines fonctions et à leurs courbes représentatives dans un repère. Ce qui nous amènera à étudier chacune de ces fonctions en :

- déterminant l'ensemble de définition ;
- étudiant la parité ;
- étudiant le sens de variations.

Pour tracer la courbe représentative, on dressera en plus un tableau de valeurs qui permet de placer des points appartenant à la courbe.

Fonction partie entière

Fonctions affines par intervalles

Tu as vu dans les classes antérieures qu'une fonction affine f de IR est une application de IR dans IR pour laquelle il existe deux réel a et b tels que pour tout x de IR , f(x) = ax+b. Une telle fonction est croissante sur IR si a est strictement positif, elle est décroissante sur IR si a est strictement négatif et elle est constante si est a égal à 0. La courbe représentative d'une application affine, dans un repère, est une droite. Certaines applications de IR dans IR ne sont pas des applications affines, mais il y a un découpage de IR en intervalles tel que, sur chacun d'eux, elles sont affines. On dit de ce fait qu'elles sont des applications affines par intervalles. Leurs courbes représentatives sont constituées de demi-droites et de segments.

Exemple

Soit k la fonction numérique à variable réelle définie par : $k(x) = \begin{cases} x-4 & si\ x\leq -2 \\ 2 & si -2<x\leq 1 \\ 2x & si\ 1<x<4 \\ -x+1 & si\ x\geq 4 \end{cases}$

Etudions k et construisons sa courbe représentative dans une repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Etude

Ensemble de définition

D_k= IR, en effet, tout nombre réel x de IR appartient à un des quatre intervalles cités, on peut donc calculer $k(x)$.

Parité

k (-2) = - 6 car -2 appartient à l'intervalle]-∞ ; -2] ; k (2)= 4 puisque 2 appartient dans l'intervalle]1 ; 4] . On en déduit que k (-2) ≠k (2) ce qui entraine que k n'est pas paire. On en déduit aussi que k (-2) ≠$-k$ (-2) ce qui entraine que k n'est pas impaire. k n'est donc ni paire, ni impaire.

Sens de variation

f est croissante sur l'intervalle]-∞ ; -2] , f est constante sur l'intervalle]-2 ; 1] ; f est croissante sur l'intervalle]1 ; 4] et est décroissante sur l'intervalle]4 ; +∞[. Ce qu'o n peut résumer dans le tableau de variation qui suit :

x	-∞ -2	1	4	+∞
k	↗	→	↗	↘

La flèche qui monte dans le sens gauche-droite indique la croissante, la flèche horizontale indique la constance et la flèche descendante de la gauche vers droite indique la décroissance.

Construction

Représentation graphique

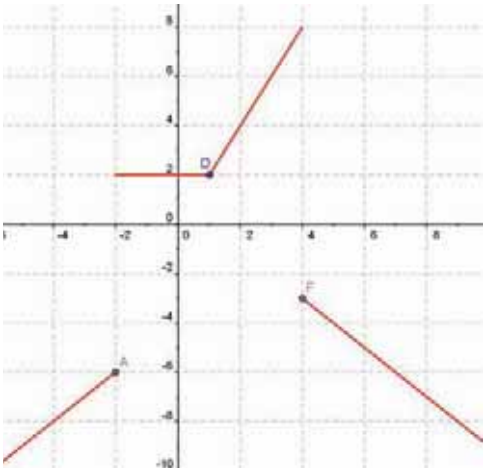


Tableau de valeur

x	-3	-4	0	1	3	4	5
$k(x)$	-7	-8	2	1	6	-3	-4

Les points A(-2,-6), D(1,2), et F (4,-3) appartiennent à C_k.

Les points de coordonnées (-2 , 2) et (4, 8) n'appartiennent pas à C_k.

Fonction partie entière :

Activité

1) Encadre chacun des quatre nombres qui suivent par deux entiers consécutifs :

   2,5 ; -5,4 ; , $\frac{-3}{4}$; $\sqrt{2}$.

2) Combien de possibilités as-tu pour chacun de ces nombres ?

Retiens :

- Nous admettons que pour tout nombre réel x, il existe un entier relatif n et un seul tel que :
$n \leq x < n+1$

- Définition : on appelle fonction partie entière, la fonction numérique à variable réelle notée E définie par :

E : IR IR

$x \longmapsto E(x) = n$, où n est l'unique entier relatif tel que $n \leq x < n+1$.
$E(x)$ est la partie entière de x.

Exemple

E(2,5) = 2 ; E(-5,4) = -6 ; E($\frac{-3}{4}$) = -1 et E($\sqrt{2}$) = 1.

Tu retrouves ainsi les encadrements que tu avais obtenus dans l'activité.

On aussi E(-2) = -2 ; E(0) = 0 ; E(-1, 3) = -2 ; E(1) = 1 ; E(4) = 4 ; E(0,2) = 0 et E(-0,7) = -1.

Si n est un entier relatif, on a : pour tout réel x appartenant à l'intervalle [n ; n+1[, E(x) = n.

Application

Exercice :

Résoudre dans IR l'équation E(x)= 2 puis E(x)= -1 où E(x) désigne la partie entière de x.

Etude de la fonction partie entière définie sur [-3 ;3[

Il s'agit donc de la restriction de la fonction partie sur l'intervalle [-3 ;3[, nous la notons aussi E

Ensemble de définition

L'ensemble de définition de E est [-3 ;3[

Détermination de l'expression de E(x)

On a :

x	[-3 ;-2[	[-2 ;-1[	[-1 ;0[	[0 ;1[	[1 ;2[	[2 ;3[
E(x)	-3	-2	-1	0	1	2

Variation

Tu constates que E est une fonction affine par intervalles. Elle est constante sur chacun des cinq intervalles.

Parité

E(-1,3)=-2 et E(1,3)=1. E n'est donc pas paire puisque E(-1,3) $\neq$ E(1,3).

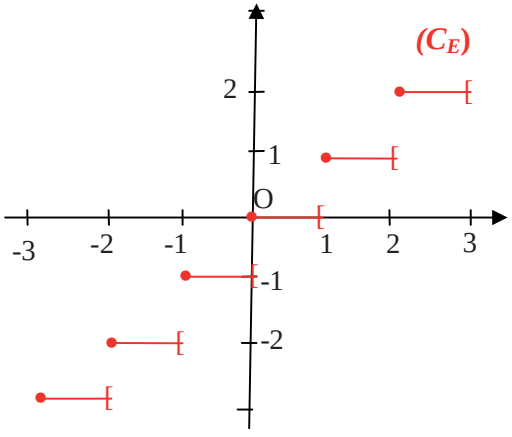
Elle n'est pas non plus impaire puisque E(1,3)) $\neq$ - E(-1,3).

Construction

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2
E	-3	-2	-1	0	1	2

Représentation graphique



Retiens :

La représentation graphique de la fonction partie entière définie sur IR a la forme des marches d'un escalier, on dit de ce fait que E est une « *fonction en escalier* ».

Fonction carré

Etude la fonction $x \longmapsto x^2$

On appelle fonction carré la fonction f définie par : $f: IR \longrightarrow IR$, $x \longmapsto x^2$

Ensemble de définition

Pour tout réel x, on peut calculer x^2 ; donc f est définie sur IR par suite Df = IR .

Parité

f est paire (voir exemple de fonction paire).

Sens de variation

La fonction f est croissante sur IR^+ est décroissante sur IR^- (voir exemple de fonction croissante) .

D'où le tableau de variations qui suit.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

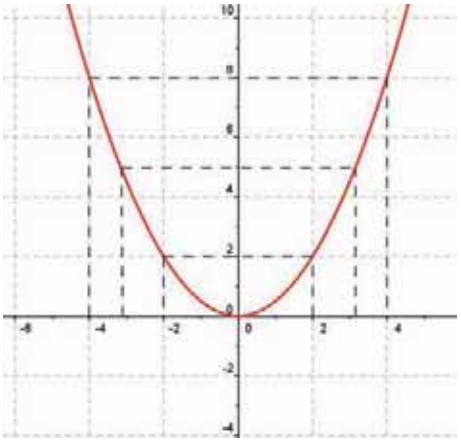
Construction

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$)

Tableau de valeurs.

x	-3	-2	-1	-0 ,5	0	0 ,5	1	2	3
f(x)	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

Représentation graphique



Remarque :

- On aurait pu faire l'étude de f sur IR^+, tracer la partie de la courbe correspondante et compléter, comme la fonction est paire, en traçant sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- Cette courbe en fonction en forme « d'antenne parabolique » est appelée parabole
Le point O de coordonnées (0 , 0) est son sommet. Elle a un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Fonction de la forme : $x \longmapsto ax^2$, avec a différent de 0.

Exemple : cas où $a = \frac{1}{2}$

Soit *u* la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Ensemble de définition

D_u = IR

Parité

On vérifie aisément que u est paire.

Sens de variation

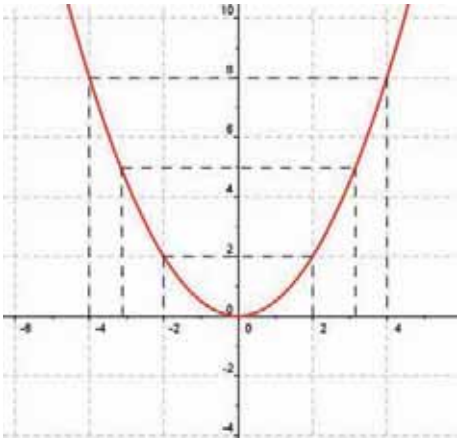
On vérifie de même que u est croissante sur IR^+ et décroissante sur IR^-.

Construction

Tableau de valeurs.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
u(x)	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8

Représentation graphique



Remarque : Cette courbe est aussi une parabole. Son sommet est toujours O et l'axe des ordonnées est un axe de symétrie.

Cas général

Ensemble de définition

Pour tout réel x, il est possible de calculer ax^2. Donc Df = IR.

Parité

Pour tout x élément de IR on a :

- -x est élément de IR
- $f(-x) = a(-x)^2$
  $= ax^2$
  $= f(x)$.

La fonction f est donc une fonction paire.

Conséquence : Puisque la fonction f est paire sur IR, il suffit de l'étudier sur l'intervalle [0 ;+∞[car la représentation graphique de f dans un repère d'axes perpendiculaires admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Sens de variation

Soit $T'(x_2,x_1)$ le taux de variation de la fonction définie sur IR par f(x) = ax^2 et $T(x_2,x_1)$celui de la fonction « carrée »

$$T'(x_2,x_1)=\frac{ax_1{}^2-ax_2{}^2}{x_1-x_2}$$, donc

$$T'(x_2,x_1) = aT(x_2,x_1)$$

Tableau de variation de f pour a > 0			
x	-∞	0	+∞
f	↘	0	↗

Tableau de variation de f pour a < 0			
x	-∞	0	+∞
f	↗	0	↘

Remarque : Ces courbes sont des paraboles. O est leur sommet et l'axe des ordonnées est un axe de symétrie.

Fonction du type $x \longmapsto ax^2+bx+c$ **où a, b et c sont des nombres réels avec a différent de 0.**

Exemple : cas où a =-2, b= 4 et c= 1

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : f(x)= $-2x^2$ +4x +1

Ensemble de définition

D_f = IR

Parité

f(1) = 3 et f(-1) = -1. Donc f(1) ≠ f(-1) et f(-1) ≠ - f(-1). f n'est alors ni paire ni impaire.

Sens de variation

Le taux de variation de f donne une expression difficile à manier. Pour contourner cette difficulté nous allons utiliser la forme canonique de f(x) et les variations de la

fonction $x \longmapsto ax^2$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

$= -2[(x-1)^2 + \frac{3}{2}]$

$= -2(x-1)^2 + 3.$

$= -2X^2 + 3$, en posant $X = x-1$.

On sait que la fonction définie par $X \longmapsto \mathbf{-2}\, X^2$

varie dans le même que celle définie par : $X \longmapsto \mathbf{-2}X^2+3$

Comme la fonction $X \longmapsto \mathbf{-2}\, X^2$ est décroissante sur IR^+ et croissante sur IR^-

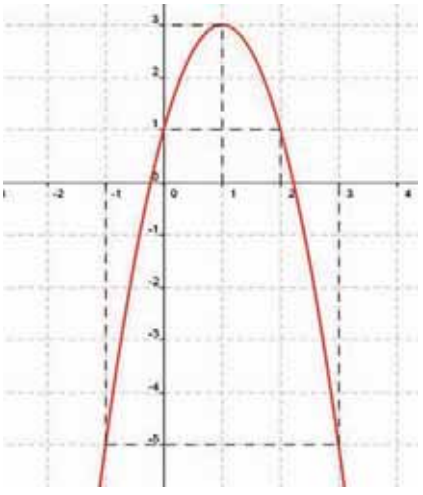
(voir le cas général précédent), il en est de même de la fonction $X \longmapsto \mathbf{-2}X^2+3$..
Comme X= x-1, donc X est positif, revient à dire que x-1 est positif c'est-à-dire que x est supérieur à 1. Et X négatif, signifie que x-1 est négatif c'est-à-dire que x est inférieur à 1. Par suite f est décroissante sur l'intervalle [1, + ∞[et croissante sur l'intervalle]- ∞ ;1].

Construction dans un repère orthonormal (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$)

Tableau de valeurs.

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-5	1	3	1	-5

Représentation graphique
(voir ci-contre)



Autre méthode de construction (changement de repère)

On a vu que f(x) = -2(x-1)^2 + 3, c'est-à-dire f(x)-3 = -2(x-1)^2. L'équation de C_f dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) est donc : y-3 = -2(x-1)^2. Ce qui donne Y = -2X^2 avec X = x-1 et Y = Y-3. Soit Ω le point de coordonnées (1 , 3).

On en déduit que l'équation de C_f dans le repère (Ω, $\vec{i}$,$\vec{j}$) est Y = -2X^2. On construit facilement cette courbe.

Cas général $\begin{array}{rcl} f: IR & \longrightarrow & IR \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$ **avec a non nul**

Ensemble de définition

D_f = IR

Parité

Si b = 0, la fonction f est paire.

Si b ≠0, f n'est ni paire, ni impaire.

Sens de variation

Pour tout réel x :

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ d'où

$f(x) + \frac{b^2-4ac}{4a} = a(x+\frac{b}{2a})^2$

f a donc même sens de variation que la fonction $x \longmapsto a(x+\frac{b}{2a})^2$

On a déjà étudié la fonction ; $g: X \longmapsto aX^2$; elle est monotone sur IR$^+$ et sur IR$^-$.

Donc la fonction $x \longmapsto a(x+\frac{b}{2a})^2$ est monotone sur $[-\frac{b}{2a}\ ;\ +\infty[$ dans le même sens que g sur IR$^+$; elle est aussi monotone sur $]-\infty\ ;\ -\frac{b}{2a}]$ dans le même sens que g sur IR$^-$.

On établit donc aisément le tableau de variations de f suivant le signe de a.

Tableau de variation de f pour a > 0			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↗

Tableau de variation de f pour a < 0			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↘

La construction en découle sans difficultés après l'établissement d'un tableau de valeurs. Ces courbes sont aussi des paraboles ; leur sommet est le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Ce point varie suivant les valeurs prises par a, b et c

Fonction « cube » qui à *x* associe x^3

Etude de la fonction *v* définie par :

$$v: \begin{array}{ccc} IR & \longrightarrow & IR \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Ensemble de définition

D_v = IR

Sens de variation

On a déjà vu dans ce qui précède que v est croissante sur IR ; d'où le tableau de variations qui suit :

Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
v	$\nearrow$

Construction

Représentation graphique

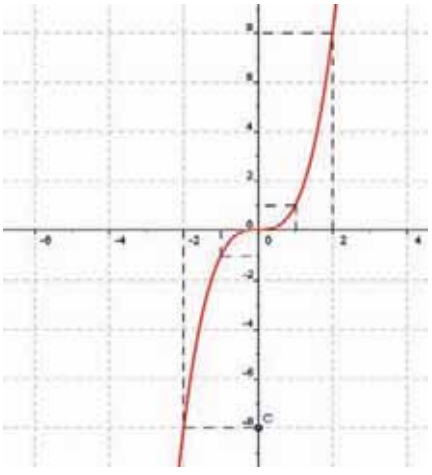


Tableau de valeur

x	-2	-1	0	1	2
$v(x)$	-8	-1	0	1	8

Fonction inverse

Etude de la fonction inverse

Soit g la fonction définie par $g: IR \longrightarrow IR$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Ensemble de définition

f est définie sur

$D_f = IR^* =]-\infty\ ;0[\ \cup]0\ ;+\infty[$

Parité

Pour tout x élément de R^* on a : $-x \in R^*$ et $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$; c'est-à-dire : f(-x) = - f(x).

Donc f est une fonction impaire sur IR^* .

Sens de variation

$T_f = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2}$. Donc T_f est négative sur IR^*_+ et sur IR^*_- ;

f est alors décroissante sur IR^*_+ et sur IR^*_- .

D'où le tableau de variation qui suit.

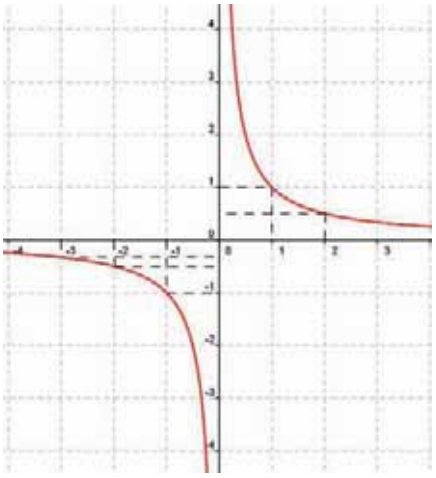
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

Construction dans un repère orthonormal

Tableau de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

Représentation graphique



Cette courbe est appelé hyperbole. Elle a un centre de symétrie qui est ici le point O. Tu peux vérifier sans difficulté que la première bissectrice et la deuxième bissectrice sont des axes de symétrie pour cette courbe.

Fonction inverse définie par : $f(x) = \frac{k}{x}$

Exercice : cas où k = -2

Soit g telle que : $g(x) = \frac{-2}{x}$. On a : $g(x) = -2\ \frac{1}{x}$

1) Vérifie que g est impaire.

2) En utilisant la variation de la fonction précédente f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, montre que g est croissante sur IR^*_+ et sur IR^*_-.

3) Déduis-en le tableau de variation de g et construis C_g. Tu remarqueras que C_g est aussi une hyperbole.

4) En procédant de façons analogue, étudie les variations de la fonction h telle que $h(x) = \frac{k}{x}$ suivant le signe de k

Etude de la fonction numérique définie par : $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx}$ avec c≠0

Exemple

Cas : $a = 1,\ b = 2\ et\ C = 3$

Soit t la fonction définie par $t(x) = \frac{x+2}{3x}$

Ensemble de définition

$D_t = IR^*$

Parité

On vérifie sans difficulté que t n'est ni paire, ni impaire.

Sens de variation

$t(x) = \frac{2}{3} . \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$. Donc $t(x)$ est de la forme $a\ f(x) + k$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$,

$a = \frac{2}{3}$ et $k = \frac{1}{3}$.

Comme $a > 0$, t est monotone dans le même sens que f sur IR^*_+ et sur IR^*_-. D'où le tableau de variation de qui suit.

x	-∞	0	+∞
t	↘	‖	↘

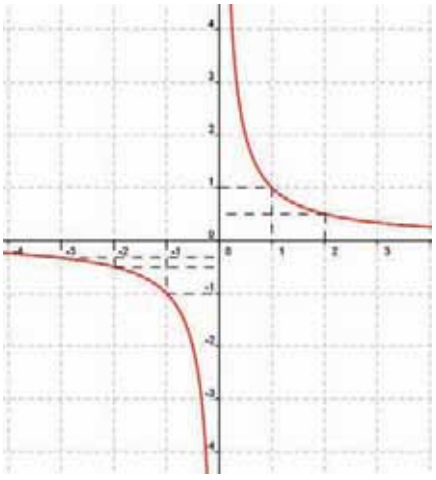
On peut remarquer que $t(x) > \frac{1}{3}$ si $x > 0$ et $t(x) < \frac{1}{3}$ si $x < 0$. Pour le traçage de la courbe il est utile de tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{3}$

Construction dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$)

Tableau de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$t(x)$	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

Représentation graphique



Cette courbe est aussi une hyperbole. Elle a un centre de symétrie qui est ici le point Ω de coordonnées (0 , $\frac{1}{3}$). Tu peux vérifier sans difficulté que la première bissectrice et la deuxième bissectricedu repère (Ω, $\vec{i}, \vec{j}$) sont des axes de symétrie pour cette courbe.

Autre méthode de construction (Changement de repère)

L'équation de t dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$) est $y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$. En posant $X = x$ et $Y = y - \frac{1}{3}$.

C_t aura donc pour équation dans le repère (Ω, $\vec{i}, \vec{j}$) : $Y = \frac{2}{3}\frac{1}{X}$

Avec Ω de coordonnées (0 , $\frac{1}{3}$).

Cas général : étude de la fonction $l;\ x \longmapsto \frac{ax+b}{cx}$ avec $c \neq 0$ et $b \neq 0$

Exercice

Soit la fonction numérique à variable réelle définie par $l(x) = \frac{ax+b}{cx}$ avec $c \neq 0$ et $b \neq 0$

1) Quel est l'ensemble de définition de l ?
2) Détermine les réels p et q tels que $l(x) = q\,f(x) + p$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$.
   Déduis-en le sens de variations et le tableau de variations de l suivant le signe de q.

Retiens

- Si $q = \frac{b}{c}$ est positif, l est monotone sur IR$^*_+$ et sur IR$^*_-$ dans le même sens que f

- Si $q = \frac{b}{c}$ est négatif, l est monotone sur IR$^*_+$ et sur IR$^*_-$ dans le sens inverse de celui de f

Tableau de variation de l pour $\frac{b}{c} > 0$			
x	-∞	0	+∞
f	↘	‖	↘

Tableau de variation de l pour $\frac{b}{c} < 0$			
x	-∞	0	+∞
f	↗	‖	↗

D'où les tableaux de variations suivants :

C_l est aussi une hyperbole si $c \neq 0$ et $b \neq 0$. Le point de coordonnées $(0, \frac{a}{c})$ est son sommet.

Fonction racine carrée

Soit la fonction f telle que : $\begin{array}{l} f : IR \longrightarrow IR \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$

Ensemble de définition

$D_f = [0 ; +\infty[$.

Parité

$1 \in D_f$ mais $-1 \notin D_f$, donc f n'est ni paire , ni impaire.

Sens de variation

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs distincts, on a :

$$T_f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}^2 - \sqrt{x_1}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$$

$T_f(x_2, x_1)$ est donc strictement positif sur IR_+ ; f est alors croissante sur $[0 ; +\infty[$.

D’où le tableau de variation qui suit :

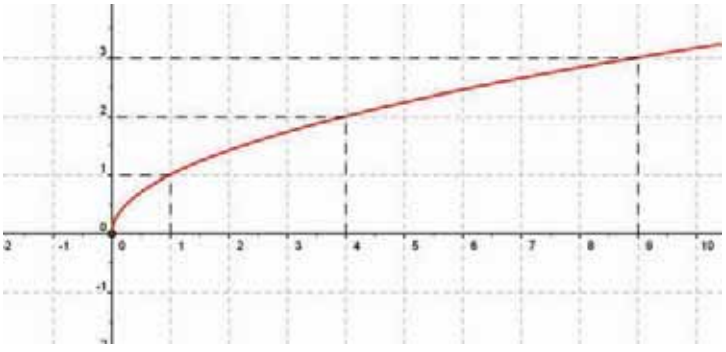
x	0	$+\infty$
f	↗	

Construction

Tableau de valeurs

x	0	1	4	9
f(x)	0	1	2	3

Représentation graphique



Fonction numérique définie par : f(x) =$\sqrt{x+a}$.

Exercice

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par f(x) =$\sqrt{x+a}$.

1) Montre que f est définie pour tout x tel que $x \geq -a$.
2) Justifie que f n'est ni paire, ni impaire.
3) Effectue un changement de repère qui donne f(X) = $\sqrt{X}$.
4) Détermine les coordonnées de l'origine de ce nouveau repère.
   Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variation.

Application

Etudions la fonction numérique à variable réelle h définie par h(x) =$\sqrt{x+3}$.

Ensemble de définition

D_h= [-3 ; +∞ [.

Parité

6 $\in D_h$ mais -6 $\notin D_h$; donc h n'est ni paire, ni impaire.

L'équation de h dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$) est $y = \sqrt{x+3}$. En posant $X = x + 3$ et $Y = y$.
C_h aura pour équation dans le repère (Ω, $\vec{i}, \vec{j}$) : $Y = \sqrt{X}$. Avec Ω de coordonnées (-3 , 0).

h est alors croissante sur [-3 ; +∞ [d'où le tableau de variations qui suit.

x	-3	+∞
h	↗	

Construction

Pour construire C_h , il suffit de construire la courbe représentative de la fonction numérique à variable réelle qui $x \longmapsto \sqrt{x}$ dans le repère orthonormal $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

APPLICATION A LA RESOLUTION GRAPHIQUE D'EQUATION ET D'INEQUATIONS

Résolution graphique d'équations

Intersection de courbes dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

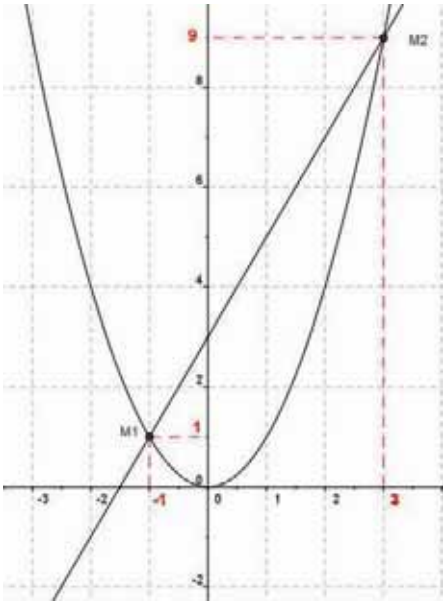
Déterminons l'ensemble des points d'intersection de la courbe C_f d'équation $f(x) = x^2$ avec la droite D courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = 2x+3$.
Un point $M_0(x_0, y_0)$ appartient à l'intersection de ces deux courbes si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux courbes soit : $y = x^2$ et $y = 2x+3$. Ce qui revient à dire $y_0=2x_0 +3$ et $y_0 =x_0^2$. Pour chercher les points M_0 , il suffit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, appelée « équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux courbes ». Ses solutions sont les abscisses des points d'intersections des ces deux courbes.

Donc x_0 est solution de l'équation $x^2 - 2x – 3 = 0$. Le réel -1 étant une racine évidente l'autre racine est donc le réel +3.

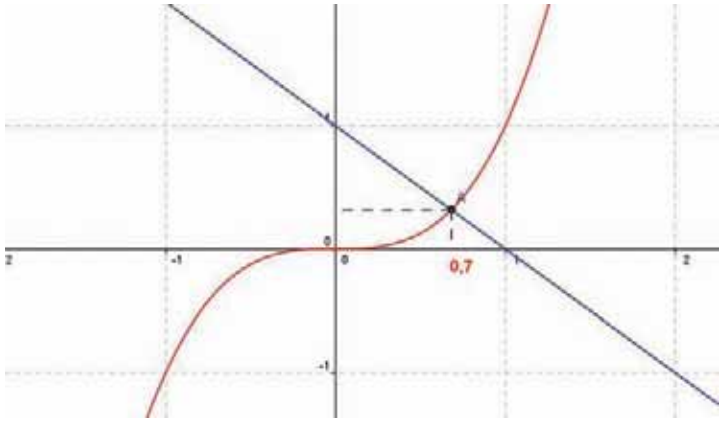
Si $x_0 = -1$, alors $y_0 = 1$ et si $x_0 = 3$ alors $y_0 = 9$. Nous avons ainsi deux points d'intersection et deux seulement que nous appelons $M_1(-1, 1)$ et $M_2(3 , 9)$.

Interprétation graphique

L'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ peut être interprétée comme la recherche des abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y=f(x) = x^2$ et de la droite D d'équation $y = g(x) = 2x + 3$. On trace donc C_f et C_g ; les abscisses de leurs points d'intersection sont les solutions de cette équation.
Une lecture directe sur le graphique donne ces abscisses. Mais l'inconvénient est que cette lecture graphique donne rarement les valeurs exactes. Cependant elle permet de donner le nombre de solutions et les valeurs approchées de ces solutions.
L'outil informatique permet aujourd'hui de résoudre graphiquement des équations avec un degré de précisions très élevé.



Exemple
Soit dans IR l'équation $x^3 - x + 1 = 0$**.** Cette équation est une équation du troisième degré dont tu ne connais aucune racine évidente. Résoudre cette équation par le calcul n'est donc pas chose aisée. On peut l'interpréter comme une équation aux abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction h telle que $h(x)= x^3$ et m telle que $m(x) = x-1$. On trace ces deux courbes et on repère les points éventuels d'intersection, puis on lit leurs abscisses pour avoir les valeurs des solutions de cette équation. Si les deux courbes ne se coupent pas, l'équation n'a pas de solution.



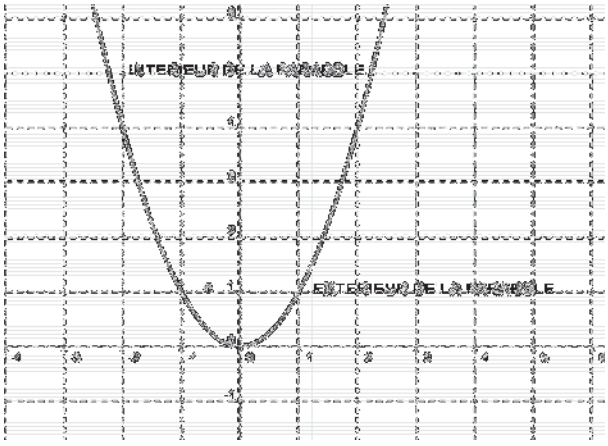
Le tracé des deux courbes montre qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection, donc l'équation n'a qu'une solution qui est l'abscisse de ce point.
Une lecture graphique permet de dire que 0,7 est une valeur approchée de cette solution.

Résolution graphique d'inéquations

Résolution graphique d'inéquations

Vous avez vu en classes antérieures, la résolution graphique d'inéquations du type $ax+by+c \leq 0$ et de systèmes d'inéquations de ce type.

Nous avons tracé la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Cette parabole est reproduite ci-dessous.



1) Prends 4 points à l'intérieur de la parabole et vérifie que pour chacun d'eux, l'ordonnée est supérieure au carré de l'abscisse.
2) Prends 4 points à l'extérieur de la parabole et vérifie que pour chacun d'eux, l'ordonnée est inférieure au carré de l'abscisse.

Retiens :

Nous admettons que :
- l'intérieur de la parabole est l'ensemble des points M(x , y) tels que $y-x^2 \geq 0$;
- l'extérieur de la parabole est l'ensemble des points M(x , y) tels que $y-x^2 \leq 0$.

De façon générale si P est la parabole, courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)= ax^2 +bx+c$, on a :
- si $a > 0$, son intérieur est l'ensemble des points M(x,y) tels que $y \geq f(x)$;
- si $a < 0$, son intérieur est l'ensemble des points M(x,y) tels que $y \leq f(x)$.

Tu sais déjà que la parabole est l'ensemble des points M(x , y) tels que $y = f(x)$.

Les solutions de l'inéquation $y-x^2 \geq 0$ sont donc les couples de coordonnées des points de l'intérieur de la parabole d'équation $y = x^2$.
Les solutions de l'inéquation $y-x^2 \leq 0$ sont donc les couples de coordonnées des points de l'extérieur de la parabole d'équation $y = x^2$.

Exemple

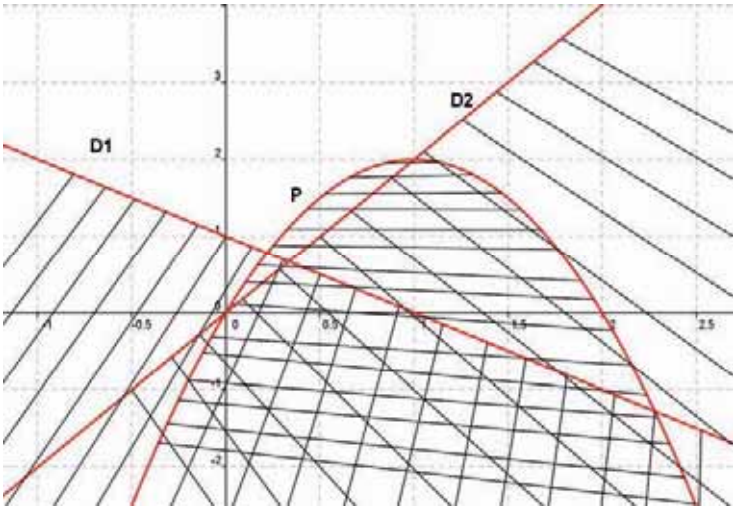
Résous graphiquement le système $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ 2x-y \leq 0 \\ -2x^2+4x-y \leq 0 \end{cases}$

On trace la droite

$D_1 : x+y-1=0$, la droite D_2 : $2x-y \leq 0$ et la parabole

P : $-2x^2+4x-y=0$.

Pour chaque inéquation on hachure la partie du plan ne représentant pas son ensemble de solutions. La représentation de l'ensemble des solutions du système est la partie non hachurée.



Application

Résous graphiquement le système d'inéquations suivant :

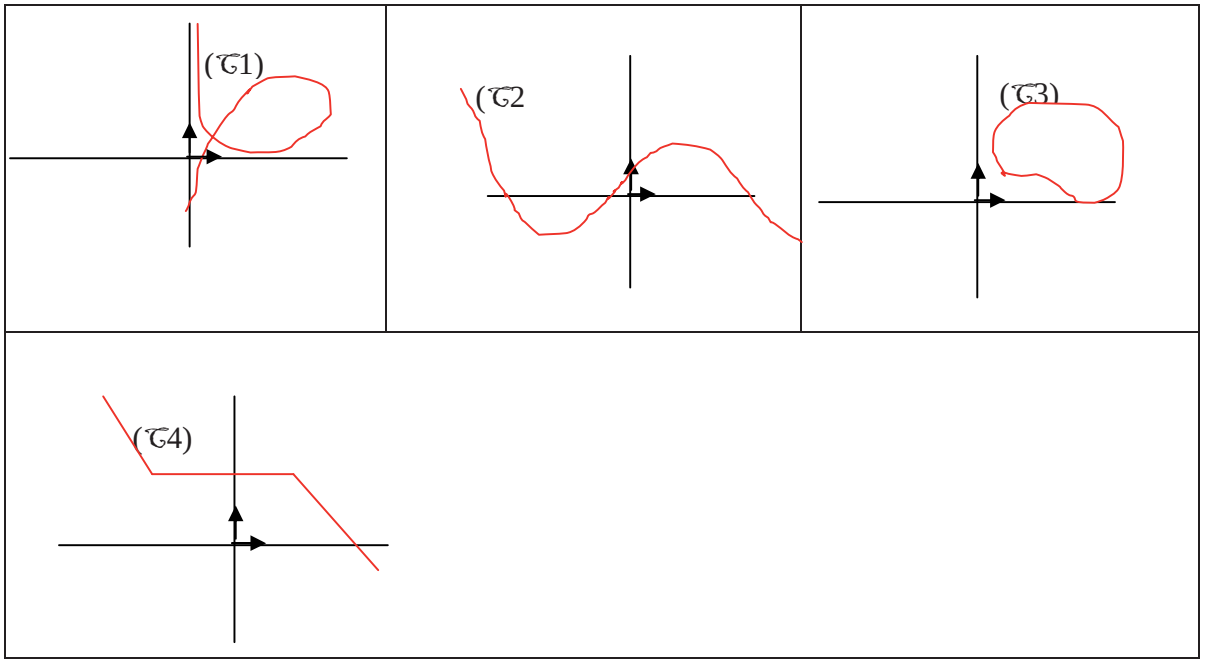
$$\begin{cases} -2x+y-2 > 0 \\ y+x^2-2x+4 \geq 0 \\ x+y < 0 \end{cases}$$

EXERCICES ET PROBLEMES

LECTURE GRAPHIQUE

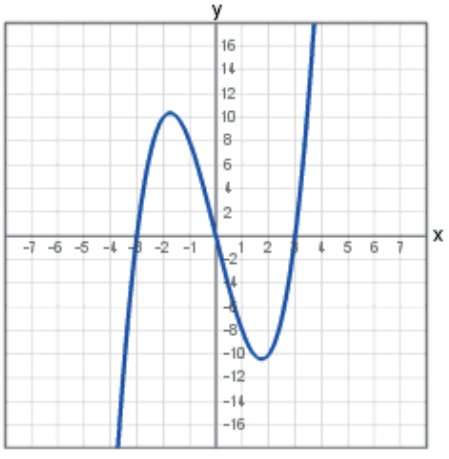
Exercice 1

Parmi les courbes suivantes, quelles sont celles qui sont des représentations graphiques de fonctions.



Exercice 2

On donne la courbe (C) ci-contre, représentative d'une fonction f
Détermine par lecture graphique :
a) Le domaine de définition de f
b) L'ensemble des images des points de l'ensemble de définition par f.



Exercice 3

On considère la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 – 4x + 3$.

1) Calcule f(0), f(1) et f(3).

2) Calcule en fonction de x,

$f(x^2)$, $f(x – 1)$ et $f(2x + 1)$.

3) a) Montre que pour tout réel x,

$f(x) = (x – 2)^2 – 1$.

b) Déduis-en une factorisation de f(x).

c) Si (C) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan, détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

d) Montre que pour tout réel x, $f(x) \geq - 1$.
Déduis-en la nature de l'extrémum de f sur IR et Im (f), l'ensemble des images par f.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = – x^2 + 3x - 2$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Montre que pour tout réel x,

$f(x) = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$.
Déduis-en la nature de l'extrémum de f sur IR et Im (f).

3) a et b étant deux réels distincts, compare f(a) et f(b) en utilisant la question 2), dans les cas suivants :

i) $a < b \leq \frac{3}{2}$. ; ii) $\frac{3}{2} \leq a < b$

4) a) Déduis de la question 3) le sens de variation de la fonction f sur : $]-\infty ; \frac{3}{2}]$
et sur $[\frac{3}{2} ; +\infty[$.

b) Dresse le tableau de variations de f.

c) Compare sans les calculer f(- 1) et f(0) puis f(3) et f(5).

Peut-on comparer f(-1) et f(3) sans les calculer ?

5) Pour tout x, montre que : $f(|2x + 1|) \leq \frac{1}{4}$.

6) Trace dans un repère orthonormal du plan la courbe représentative de f.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2 - x + 1$.

1) Montre que pour tout réel x, f(x) = $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Déduis-en le signe de $f(x)$ sur IR.

2) Etudie la position de la courbe représentative de f dans un repère orthonormal par rapport à l'axe des abscisses.

3) a) Si a et b sont deux réels distincts, montre que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ = a + b – 1.

Déduis-en le sens de variation de f sur] -∞ ; $\frac{1}{2}$] et sur [$\frac{1}{2}$; +∞[.

b) Dresse le tableau de variation de f.

4) Montre que la droite (D) : x = $\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f.

5) Détermine l'ensemble Im(f).

6) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

7) Peux-tu retrouver ces derniers résultats par le calcul ?

Exercice 6

Soit la fonction numérique f telle que f(x) =$\frac{2x+1}{x-2}$.

1) Détermine le domaine de définition de f.

2) a) Détermine les constantes réelles a et b telles que, pour tout x différent de 2, f(x) = $a + \frac{b}{x-2}$.

b) Détermine le sens de variation de f sur] -∞ ; 2[et sur] 2; +∞[en considérant la fonction f comme composée de fonctions usuelles.

3) Compare f(x) et 2 pour tout x différent de 2 et interprète graphiquement les résultats obtenus.

4) On note (C) la courbe représentative de f sur un repère orthonormal du plan.

a) Montre que le point I(2 ; 2) est centre de symétrie de (C).

b) Trace (C) ainsi que les droites d'équations x = 2 et y = 2.

c) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

Exercice 7

On considère la fonction numérique f telle que f(x) = $\sqrt{x^2+1}$ + 1.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Montrer que $\forall$ x $\in$ IR, $\sqrt{x^2+1}$ ≥1 ; en déduire que pour tout réel x, f(x) ≥ 2.

b) En déduire Im(f) .

3) Comparer f(a) et f(b) dans les cas suivants : i) a < b ≤ 0 et ii) 0 ≤ a < b.

En déduire le sens de variation de f sur]- ∞ ; 0] et sur [0 ; +∞[.

4) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

5) Etudier les positions relatives de (C) et de la droite (D) : y = x. (Cette droite est appelée première bissectrice).

Exercice 8

On considère la fonction numérique f telle que f(x) = $\sqrt{-x^2+3x-2}$.

1) Détermine le domaine de définition de f.

2) Montre que pour tout réel x,

$-x^2+3x-2 = \frac{1}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2$. En déduire la factorisation de : $-x^2+3x-2$.

3) a) En utilisant l'écriture f(x) = $\sqrt{= \frac{1}{4} - (x - \frac{3}{2})^2}$, montre que :

i) f(a) < f(b) si a < b ≤ $\frac{3}{2}$;

ii) f(a) > f(b) si $\frac{3}{2}$ ≤ a < b.

b) Déduis-en le sens de variation de f sur [1, $\frac{3}{2}$] et sur [$\frac{3}{2}$; 2].

c) Dresse le tableau de variation de f et trace la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

4) En remarquant que pour tout x du domaine de définition de f : - $(x - \frac{3}{2})^2$ ≤ 0,

montre que pour tout x du domaine de définition de f, 0 ≤ f(x) ≤ $\frac{1}{2}$.

En déduire les extrémums de f sur son domaine de définition.

5) On veut montrer que la courbe (C) est un demi cercle de centre I ($\frac{1}{2}$; 0).

Pour cela, on considère un point M(x ; f(x)) sur (C) avec x ∈ [1 ; 2].

a) Montre que pout tout x ∈ [1 ; 2], IM =$\frac{1}{2}$.

b) Conclus.

Exercice 9

On considère un carré ABCD de côté 1 cm ; un point M parcourt, à partir du sommet A, le périmètre du carré dans le sens de A vers B et fait un tour complet. O étant le centre du carré ABCD, on note OM = f(x) avec x la distance parcourue par M.

On note I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) a) Si M appartient au segment [AI], montre que : IM =$\frac{1}{2}$ - x et que f(x) =$\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}$

b) Si M appartient au segment [IB], montre que : IM = x - $\frac{1}{2}$ et que f(x) = $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}$

c) En déduire f(x) en fonction de x lorsque M appartient au segment [AB].

2) Si M appartient au segment [BJ], montrer que :

BM = x – 1, MJ = $\frac{3}{2}$ - x et que f(x) = $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{2}}$.

Montre que f(x) = $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{2}}$ pour M appartenant à [BC].

3) Donne l'expression de f(x) lorsque :

a) M appartient à [CD].

b) M appartient à [DA].

Exercice 10

On considère un triangle équilatéral ABC de coté 1. Un point M appartient à [AB] et on note AM = x.

1) A quel intervalle appartient x lorsque M appartient (décrit) à [AB] ?

2) On note f(x) l'aire du triangle MBC, A' le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de M sur [BC].

a) Montrer que AA' =$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et MH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1-x).

b) Déterminer f(x) en fonction de x.

3) Déterminer le sens de variation de f sur [0 ;1].

4) Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle MBC est-elle égale à la moitié de celle du triangle ABC ? Quelle est la position correspondante de M sur [AB] ?

5) Soit C' le milieu de [AB], G le centre de gravité du triangle ABC.

On pose g(x) = GM, pour M appartenant à [AB].

a) Montrer que : GC' =$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et MC' = $\frac{1}{2}$ – x.

b) En déduire l'expression de g(x) en fonction de x.

c) Déterminer géométriquement la valeur de x pour laquelle g atteint son maximum.

Exercice 11

f est une fonction impaire définie sur l'intervalle [-7 ; 7].
On donne ci-dessous le tableau de variations de f sur [0; 7].

x	0	1	2	7
f(x)	0 ↗	2 ↘	1 ↗	5

1) Donner le tableau de variation de f sur [-7 ; 7].

2) Tracer une courbe (C) représentative de f.

Exercice 12

f est une fonction paire définie sur l'intervalle [- 3 ; 3]. Le tableau suivant est le tableau de variation de f sur [0 ; 3].

x	0	1	2	3
f(x)	4 ↘	1 ↗	3 ↘	0

1) Dresser le tableau de variation de f sur [- 3 ; 3].

2) Tracer une courbe (C) représentative de f.

Exercice 13

En utilisant le sens de variation des fonctions usuelles, étudier le sens de variation de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -x^2 + 2$

2) $f(x) = 2(x - 3)^2$.

3) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 1$.

4) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

5) $f(x) = (x - 1)^3$.

6) $f(x) = -2(x + 1)^3 + 2$.

Exercice 14

En utilisant les fonctions usuelles, construis la courbe (C) de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - 4$.

2) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$.

3) $f(x) = -x^2 + 1$

4) $f(x) = -(x + 1)^2 - 2$.

5) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$.

6) $f(x) = |x^2 - 1|$.

7) $f(x) = |\frac{1}{x+2} + 1|$

8) $f(x) = \sqrt{x-2}$

9) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

Modéliser une situation en utilisant une fonction

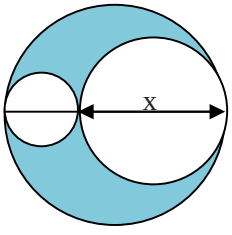
Exercice15

Un boutique diminue de 10% le prix de vente de chaque article.

1) Détermine la fonction f qui à un ancien prix associe le nouveau prix.
2) Détermine la fonction g qui à un nouveau prix associe l'ancien prix.
3) Etudier le sens de variation de chacune de ces deux fonctions.

Exercice 16

Le diamètre du grand cercle vaut 10. L'un des petits cercles a pour diamètre x. Donner en fonction de x l'aire f(x) de la partie coloriée.



Exercice 17

Soit f une fonction de domaine de définition D $\subset$ IR. On dit qu'un réel x de D est un point fixe si f(x) = x. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent un point fixe (un réel qui est égal à son image) ?

a) f telle que f(x) = $\frac{x^2}{2}$
b) g telle que g(x) = 3 – x.
c) h telle que h(x) = $x^2 + 3x - 2$.
d) k telle que k(x) = $\sqrt{x+3}$.

Exercice 18

Une ficelle nouée mesure 40 cm.

1) Déterminer l'aire **a**(x) du rectangle délimité par la ficelle et dont l'un des cotés vaut x.
2) Trouver le domaine de définition de la fonction a.
3) Montrer que : **a**(x)= - $(x - 10)^2$+100.
4) Etudier les variations de la fonction **a** sur chacun des intervalles [0 ;10] et [10 ;20].
5) En déduire le sens de variation de la fonction **a** puis préciser la valeur maximale prise par **a**(x). Quel constat peux-tu faire ?

Exercice 19

Déterminer pour chacune des fonctions f, g, h, j, k, l et m à variable réelle x, le domaine de définition.

f(x) = $\frac{2x+1}{x+1}$; g(x) = $\frac{x-3}{x^2-4}$; h(x) = $(x+2)\sqrt{x-3}$; j(x)= $\frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$;

k(x) = $\sqrt{\frac{x+4}{x-5}}$; l(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x+2}}$ m(x)= $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}$

Exercice 20

1) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions f et g définies par f(x) = x^3 et g(x) = 1– x.

2) Quel est le nombre de solutions de l'équation : $x^3 + x - 1 = 0$?

Exercice 21

ABCDEFGH est un cube d'arête 2. M est un point de l'arête [AD], N un point de l'arête [CG] tel que : AM = CN = x.

Soit la fonction f définie par f(x) = MN.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Que vaut f(0), f(1) , f(2) ?

3) Exprimer f(x) en fonction de x.

Exercice 22

On veut calculer le nombre :

$x = 1122445566^2 - 1122445567 \times 1122445565.$

1) Que donne la calculatrice ?

2) En posant a = 1122445566, exprime x en fonction de a puis calcule x.

Exercice23

On dispose d'un carré de coté 20 cm. Pour fabriquer une boite parallélépipédique, on découpe, à chaque coin du carré un petit carré de côté x.

1) Soit V(x) le volume de la boite obtenue en fonction de x. Déterminer le domaine de définition de V, puis calculer V(x) en fonction de x.

2) Soit S(x) l'aire latérale de la boite. Déterminer le domaine de définition de S puis calculer S(x) en fonction de x.

Exercice 24

On considère tous les cônes de révolution de génératrice 10. 1) Soit h la hauteur d'un de ces cônes. Calcule le volume V(h) du cône en fonction de h.

2) Etudie et représente graphiquement V dans un repère orthonormé.

3) Détermine la valeur maximale prise par la fonction qui à $x \longmapsto V(x)$

4) Résous algébriquement puis graphiquement l'inéquation : $V(x) < 200$.

Problèmes de synthèse

Problème 1

Soit une fonction f à variable réelle définie par : f(x) = $\frac{2x+1}{x-1}$. On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan P.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b)Tracer point par point la courbe ($\mathcal{C}$) et les droites d'équations x = 1 et y = 2.

2) a) Déterminer une équation de la droite (D) passant par le point A(2 ; 5) et de coefficient directeur -3.

b) Etudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (D).

3) Soit la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = -1 - t \end{cases}$, t $\in$ IR.

a) Résoudre le système : $\begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = -1 - t \\ y = -3x + 11 \end{cases}$. Interpréter graphiquement la solution (x, y) obtenue.

b) Etudier la position relative de la courbe ($\mathcal{C}$) par rapport à la droite (Δ).

4) On considère la droite (D_m) de coefficient directeur m et passant par B(1 ; 0).

a) Donner une équation de (D_m) en fonction m.

b) Discuter en fonction de m le nombre de points d'intersections de ($\mathcal{C}$) et de (D_m).

c) Lorsque ($\mathcal{C}$) coupe (D_m) en deux points M'(x', y') et M''(x'', y'') soit I_m le milieu du segment [M'M''].

i. Pour m = - 2, le point I_m existe-t-il ?
ii. Montrer que I_2 existe et déterminer ses coordonnées.
iii. Déterminer la courbe décrite par les points I_m lorsqu'ils existent.

5) Donner une équation de la courbe ($\mathcal{C}$) dans le repère (C, $\vec{i}$, $\vec{j}$). En déduire que C est centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

Problème 2

Soit la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$. On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P.

1) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) en utilisant une fonction de référence.

2) Montrer que la droite (D) : x = 2 est axe de symétrie de ($\mathcal{C}$). Que représente le point S(2 ; 3) pour la courbe ($\mathcal{C}$)

3) Donner une équation de ($\mathcal{C}$) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ et en déduire que (D) est axe de symétrie de ($\mathcal{C}$).

4) Déterminer par le calcul les points d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec l'axe des abscisses du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) > 0$ b) $f(x) \leq 0$; c) $f(x) \geq 3$.

6) Soit (D) la droite de coefficient directeur 2 et coupant l'axe des abscisses du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ au point d'abscisse 3. Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D).

7) On note P_m la courbe d'équation $y = x^2 + 4mx + 4m$ où $m \in IR^*$. Etudier suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection des courbes ($\mathcal{C}$) et P_m.

8) Etudier graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$x^2 = 4x + m - 3$.

Problème 3

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. On donne AB = 6, DC = 9 et AH = 3 avec H projeté orthogonal de A sur [CD].

Soit M un point du segment [AD]. La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe [AH] en K et [BC] en N. On pose AK = x et f(x) = MN.

1) Exprimer f(x) en fonction de x.

2) Si MN = 6, déterminer la distance des droites (MN) et (AB).

3) Peut-on avoir MN = 10 ?

Problème 4

Un cavalier doit se rendre d'une ville A à une ville B. Il effectue le $\frac{1}{3}$ du trajet à la vitesse de 10 kilomètres à l'heure et le reste du trajet à la vitesse de x kilomètres à l'heure.

1) Détermine la vitesse moyenne de ce cavalier sur le trajet qui mène de A à B.
2) Le cavalier ayant fait le trajet qui mène de A à B à la vitesse moyenne de 20 km / h, calcule x .
3) Montre que la vitesse moyenne du trajet qui mène de A à B est strictement inférieure à 30 km/h.

Problème 5 :

soit la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme : $a + \frac{b}{x+2}$ avec a et b réels.

b) Montrer que S(-2 ; 2) est centre de symétrie de la courbe (C_f).

c) Construire (C_f) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

a) Ecrire g(x) sous forme canonique.

b) En déduire l'existence d'un axe de symétrie pour la courbe (C_g).

c) Préciser les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ est une racine de (f(x) – g(x)).

b) Etudier le signe de (f(x) – g(x)) et en déduire les positions relatives de (C_f) et de (C_g).

Préciser les coordonnées des points d'intersection (C_f) et de (C_g).

4) Construire (C_g) dans le même repère que (C_f).

Problème 6

On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par f(x) = $\sqrt{1+x}$ -1- $\frac{x}{2}$.

a) Montrer que pour tout x appartenant à [0 ; + ∞ [, f(x) = $\frac{-x^2}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}}$.

b) En déduire que $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$, pour tout x positif ou nul.

2) En utilisant ce qui précède, comparer $\sqrt{1,000001}$ et 1,0000005 .

Problème 7

On considère un trapèze ABCD rectangle en B et C et tel que : AB = 6 , BC = 9 et CD = 5.

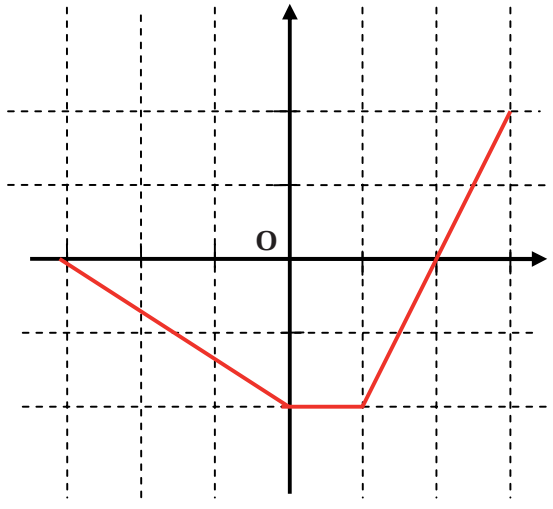
M est un point mobile sur |BC]. On pose BM = x et f(x) = AM + MB.

1) Déterminer f(x) en fonction x.

2) Pour quelle valeur de x f(x) est-il minimal ? Quelle est la position correspondante de M sur le segment [BC].

Problème 8

On donne la représentation graphique suivante d'une fonction g, affine par intervalle, sur [- 3 ; 3].



1) Déterminer l'expression de g(t) suivant les valeurs de t.
2) Résoudre dans [- 3 ; 3], les équations et inéquations suivantes :
a) $g(t) \geq 0$.
b) $g(t) < 0$
c) $g(t) = t - 1$.
d) $g(t) \geq - t + 1$.
3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(t) = - 1$.
4) Déterminer les extrémums de g sur [- 3 ; 3] ; En déduire Im (g).
5) Déterminer par le calcul l'image de l'intervalle [- 1 ; 2] par la fonction g.

Problème 9

Un cultivateur dispose d'un grillage d'une longueur de 400 m pour clôturer un champ de forme rectangulaire.
On note x et y les dimensions en mètres du champ.
1). Calculer l'aire du champ lorsque x = 50 m.
2). Exprimer y en fonction de x.
3). Exprimer en fonction de x l'aire A(x) du champ.
4). Etudier le sens de variation de la fonction A sur chacun des intervalles $[0,100]$ et $[100,200]$.
5). Dresser le tableau de variation de la fonction A.
6). Pour quelle valeur de x l'aire du champ est- elle maximale ?

Problème 10

Sur un axe $x'Ox$, on considère les 3 points A, B et M d'abscisses respectives -2, 3 et x.
Soit f la fonction qui, à tout réel x, associe le réel MA + 2 MB.
1). Déterminer l'expression de f(x) en fonction de x
2). A l'aide d'un tableau, donner une écriture de f(x) sans la valeur absolue.
3). Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4). Tracer la représentation graphique de la fonction f.
5). Existe-t-il une valeur du réel x pour laquelle la fonction f est minimale ?

Problème 11

On considère tous les cônes de révolution dont la génératrice SM mesure 2cm.
On appelle x la hauteur (variable) en cm de ces cônes (0< x <2).
Soit r le rayon en cm de la base.
1).Exprimer r^2 en fonction de x^2.
2). Montrer que le volume $V(x)$ du cône de hauteur x est :

$$V(x) = \frac{\pi x(4-x^2)}{3} cm^2$$

3). Compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-1} près.

x	0	0,5	1	1,5	2
V(x)					

4). Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction V sur l'intervalle [0 , 2] ,

Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée

5). Déterminer graphiquement la valeur x_M de la variable x pour laquelle le volume est maximal, puis donner une valeur approchée de ce maximum.

6). Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles on a : $V(x) \geq 2cm^2$

Problème 12

Un point mobile M part d'une position initiale M_0 et décrit un quart de cercle de centre O et de rayon $OM_0 = 1$.

H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OMM_0.

On note x la longueur OH et h la longueur HM.

1). Exprimer h en fonction de x.

2). Soit A la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.

Démontrer que : $A(x) = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

3). Compléter le tableau suivant :

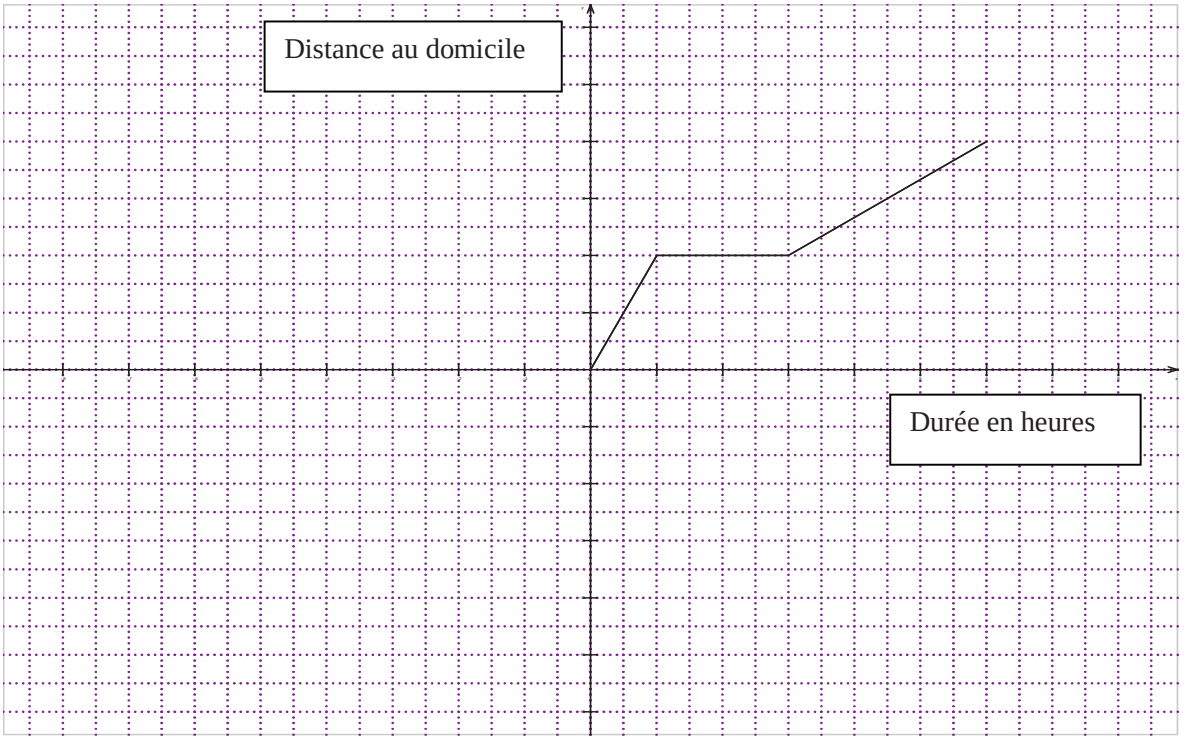
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0.6	0.7	0,8	0,9	0,95	1
f(x)												

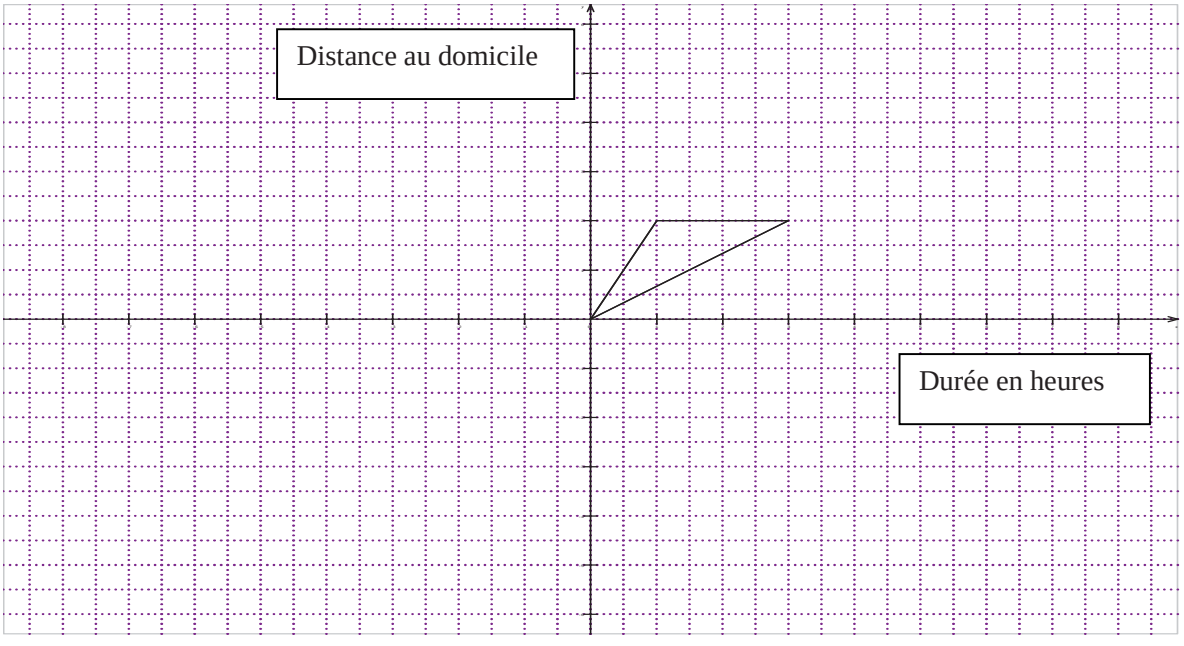
NB : on arrondira les valeurs de f(x) à 10^{-1} près.

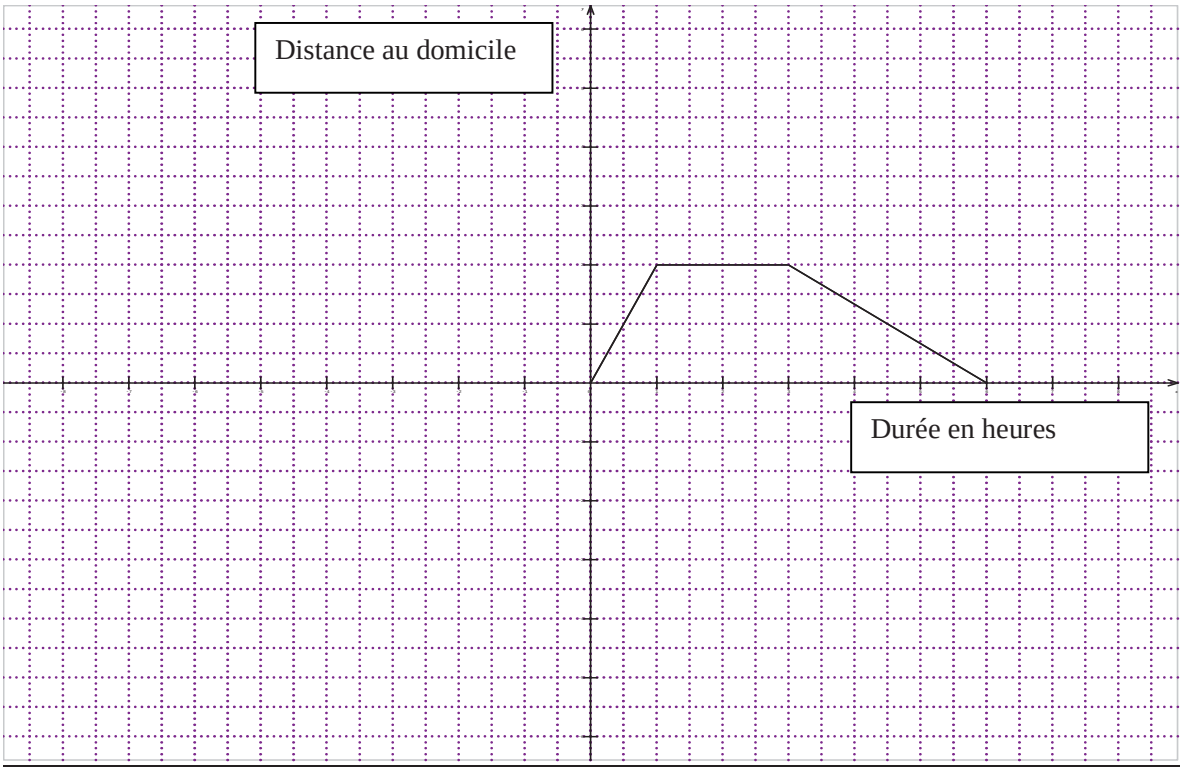
4). Tracer la représentation graphique (C) de la fonction A dans un repère orthogonal.
Unités graphiques : 10 cm en abscisse et 20 cm en ordonnée.

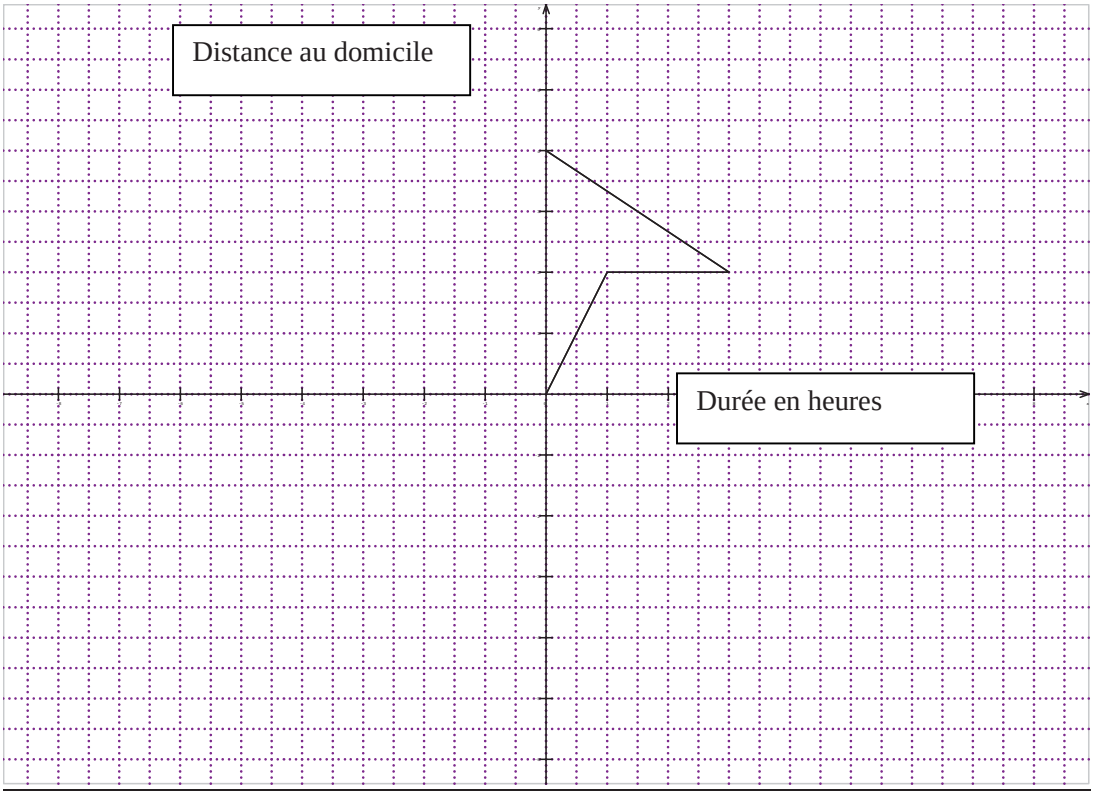
Problème 13

Parmi les quatre graphiques ci-dessous, indiquer celui qui correspond au récit suivant : Un automobiliste part de son domicile, roule pendant une heure (en s'éloignant toujours de son domicile), s'arrête pendant deux heures en raison d'une panne, puis met trois heures pour retourner chez lui à bicyclette.






Distance au domicile
Durée en heures


Distance au domicile
Durée en heures

Problème 14

La cantine d'un lycée ouvre à midi et ferme à 13 heures. Dix élèves sont servis par minute.

La courbe ci-dessous indique le nombre d'élèves qui attendent d'être servis.

Utilise la courbe pour répondre aux questions suivantes :

1). Combien d'élèves sont arrivés entre 12 h 10 et 12 h 20 ?
2). Combien d'élèves sont arrivés entre 12 h et 12 h 05 exclu ?
3). Que se passe-t-il à 12 h 05 ?
4). A quelle heure est servi un élève arrivé à 12 h 20 ?
5). A quelle heure est arrivé un élève servi à 12 h 45 ?
6). Combien d'élèves ont été servis entre 12 h et 12 h 50 ?
7). Combien d'élèves sont arrivés entre 12 h 45 et 12 h 50 ?
8). Que peut-on dire du nombre d'élèves arrivés entre 12 h 50 et 13 h ?

Devoir

Durée : 2 heures

Exercice1: (4 points)

Etudier la parité de la fonction f définie par :

1). $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$ (1pt)

2). $f(x)=-3x^2+4$ (1pt)

3). $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$ (1pt)

4). $f(x)=\dfrac{-5x^4+3}{x}$ (1pt)

Exercice 2 : (5 points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.

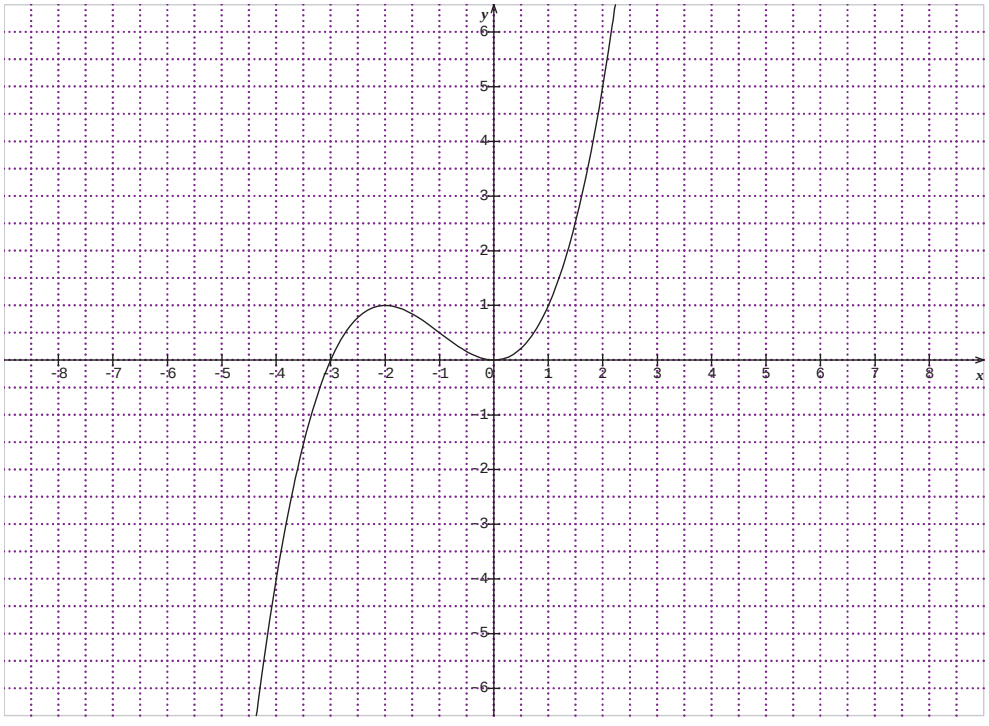
1). Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f (1pt)

2). En utilisant la courbe, donner les valeurs de f(-3), f(-2) et f(0). (1,5pt)

3). Dresser le tableau de variation de f. (1pt)

4). Résoudre graphiquement :

a). f(x) = 0 (0,5pt) b). f(x) = 2 (0,5pt) c). f(x) > 0 (0,5pt)



Exercice 3 : (6 points)
On donne la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
(C) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé(O, $\vec{i}, \vec{j}$).
On considère les points suivants :
$\Omega\binom{2}{-1}$ dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$) ; $M\binom{x}{y}$ dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$),
et $M\binom{X}{Y}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
1). Ecrire x en fonction de X et y en fonction de Y. (1pt)
2). En déduire que (C) est la représentation graphique, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie par : $g(x) = x^2$ (1pt)
3). Montrer que g est une fonction paire et étudier ses variations dans [0 ; +∞[(1pt + 1,5pt).
4). Tracer la courbe (C). (1,5pt)

Exercice4 : (5 points)
On considère une boule à l'intérieur d'un cylindre. La boule est tangente à la paroi latérale et aux bases du cylindre.
x est le rayon de la boule et on note f(x) le volume restant dans le cylindre.
1). Déterminer f(x) en fonction de x. (2pts)
2). Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormal.

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

DEVOIR

Exercice 1 :
1). f est ni paire ni impaire
2). f est paire
3). f est ni paire ni impaire
4). f est impaire

Exercice 2 :
1). Df = R
2). f (-3) = 0 , f (-2) = 1 , f (0) = 0
3). On dressera le tableau de variation en remarquant que :
f est strictement croissante sur]-∞ ;-2] et f (-2) = 1
f est strictement décroissante sur [-2 ;0] et f (0) = 0
f est strictement croissante sur [0 ; +∞[
4). a). S = {-3 ;0}
b). S = {2}
c). S =]-3;0[∪]0 ; +∞[

Exercice 3 :

1). $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$

2). Dans le repère (O,$\vec{i}, \vec{j}$), $C : y = x^2 - 4x + 3$

$(Y - 1) = (X + 2)^2 - 4(X + 2) + 3$

$Y = X^2$

donc $C : Y = X^2$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

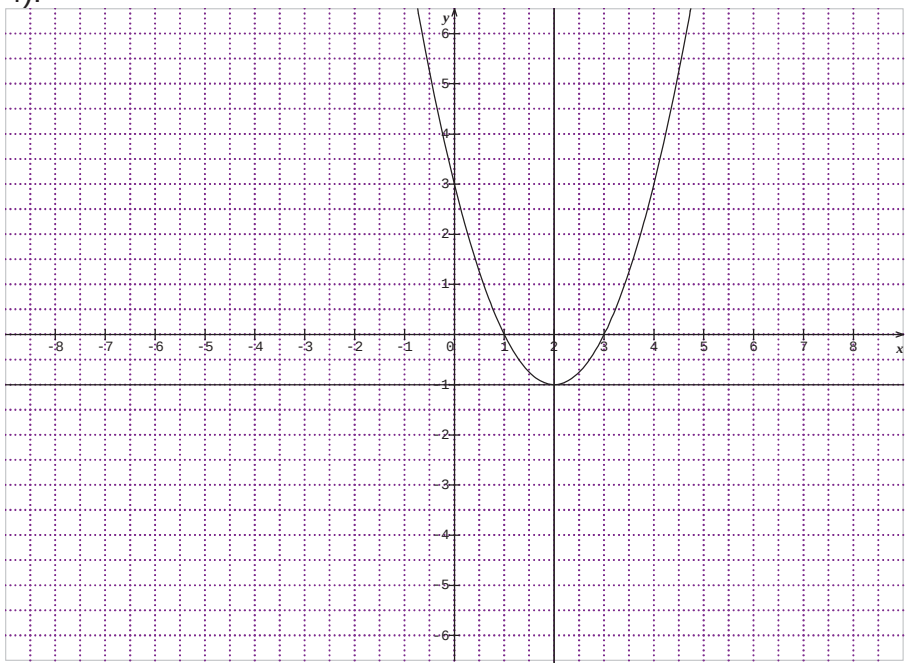
et (C) est la représentation graphique dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction g définie par : $g(x) = x^2$

3). Dg = R et $g(-x) = g(x)$ donc g est paire

Soient x_1 et x_2 dans [0 ; +∞[tels que $x_1 \neq x_2$; $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0$

donc g est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

4).



Exercice 4 :

1). Le rayon x de la boule est égal au rayon de la base du cylindre qui lui-même est égal à la moitié de la hauteur du cylindre.

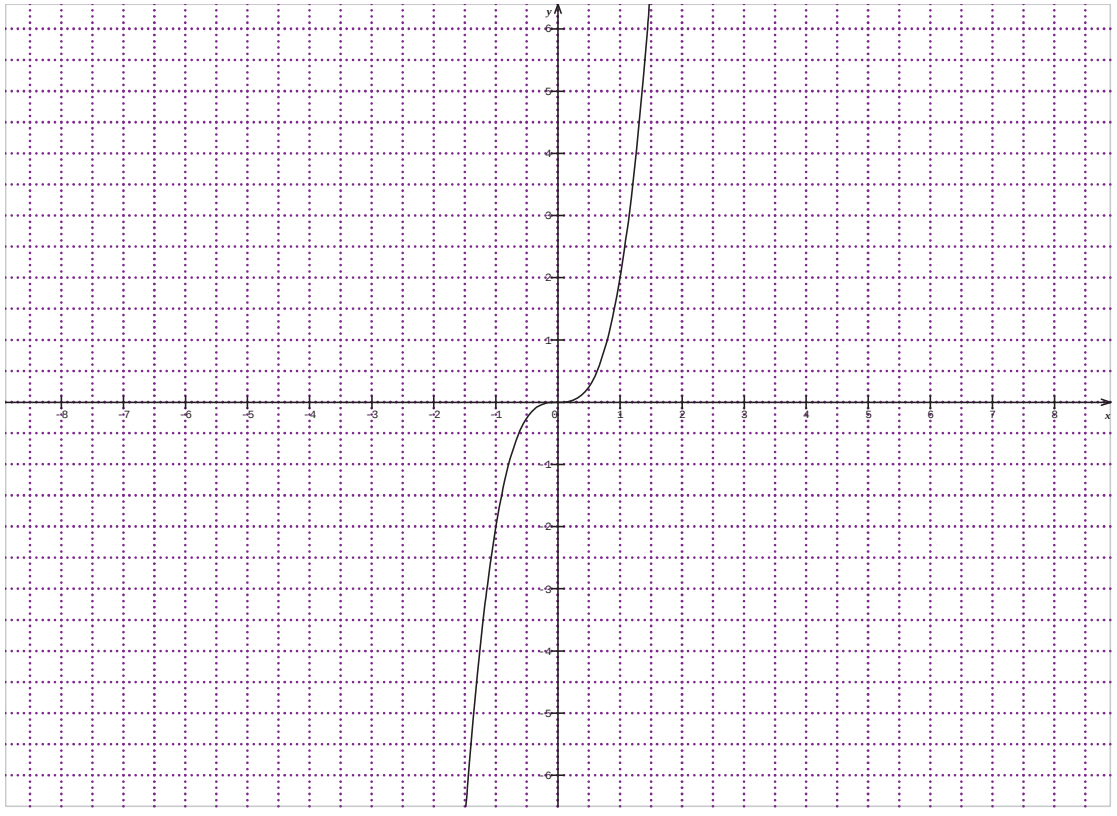
Volume de la boule $= \frac{4}{3}\pi x^3$

Volume du cylindre est égal à $\pi x^2 \times 2x = 2\pi x^3$ $f(x) = 2\pi x^3 - \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$

2). Si $\pi = 3$ alors on a : $f(x) = 2x^3$ ainsi f est impaire.

Dans le repère orthonorrmé$(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f est la suivante.

(on prendra π = 3). (3points)

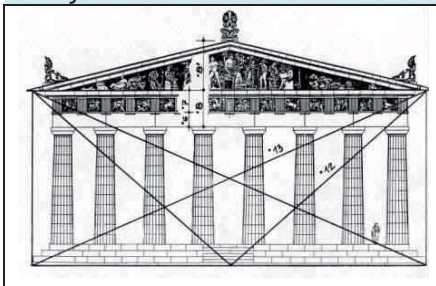


9 EQUATIONS ET INEQUATIONS

APERÇU HISTORIQUE

Que ce soit en Algèbre, Arithmétique, Géométrie, Mécanique, Chimie, etc.…, la détermination d'une ou de plusieurs quantités, appelées **inconnues,** est une tâche habituelle. C'est ainsi que de nombreux problèmes issus des diverses branches des mathématiques, des différentes sciences et du domaine technique conduisent à une **équation** ou une **inéquation** du second degré ou bien à un **système d'équations** ou **d'inéquations**.

Dès la plus haute antiquité, on rencontre, à l'occasion de problèmes concrets, des exemples de résolution d'équations du premier et du second degré, et, jusqu'au début du XIXe siècle, l'étude des équations constitue l'unique préoccupation des algébristes. L'histoire des équations du second degré remonte, à des époques très reculées. La mathématique égyptienne n'a pratiquement rien découvert dans ce domaine, l'essentiel nous vient des Babyloniens.



Il a été démontré que le Panthéon s'inscrivait dans un rectangle doré, c'est-à-dire tel que le rapport de la longueur à la hauteur était égal au nombre d'or

La Pyramide de Kheops appartient à l'ensemble des pyramides de Gizeh bâties en l'honneur des Rois Egyptiens il y a plus de 4500 ans.

OBJECTIFS

- Maitriser les trois phrases de la résolution d'un problème :
- La phase de formalisation du problème qui consiste à traduire les données en expressions et relations mathématiques et qui aboutit aux équations, inéquations ou systèmes.
- La phase de résolution qui va utiliser des techniques de calculs pour résoudre le problème formalisé.
- La phase de contrôle, d'interprétation et d'exploitation des résultats, indispensable surtout si l'on est parti d'un problème concret.

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Equations du second degré

Notion d'équation du second degré

Activité

Baye Laye a un terrain rectangulaire auquel il tient énormément. Curieuse, une de ses enfants Astou, cherche à savoir pourquoi son père tient tant à ce terrain.
Elle constate que le terrain est formé d'un carré de côté a et d'un rectangle de côtés a et b tels que a > b (voir figure ci-contre).
Brillante mathématicienne, elle se rend compte que ceci n'a rien d'extraordinaire.
De guerre lasse, elle s'en ouvre à son père qui lui livra le secret : les dimensions du grand rectangle sont dans les mêmes proportions que celle du petit rectangle. C'est-à-dire le rapport de la longueur du grand rectangle sur sa largeur est égal au rapport de la longueur du petit rectangle sur sa largeur.
Aide Astou à trouver ce rapport en montrant qu'il est solution de l'équation
$x^2 - x - 1 = 0$
NB. Ce rapport noté Φ (*lire « fi »*) est appelé nombre d'or. Le grand rectangle est appelé rectangle d'or. Tu peux vérifier que le petit rectangle est aussi un rectangle d'or. Le nombre d'or se retrouve dans beaucoup de productions artistiques de l'antiquité (Pyramide de Khéops, le Panthéon d'Athènes, le Modulor de Le Corbusier, etc.)

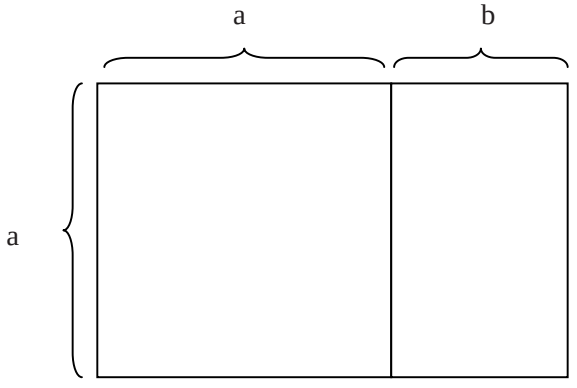
Solution

On a : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$. Donc $\begin{cases} a = b\Phi \\ a + b = a\Phi \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} a = b\Phi \\ b\Phi + b = b\Phi^2 \end{cases}$

Ce qui signifie : $\begin{cases} a = b\Phi \\ \Phi + 1 = \Phi^2 \end{cases}$

On en déduit : $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Φ est alors solution de l'équation
$x^2 - x - 1 = 0$.



Définition : on appelle **équation du second degré à une inconnue**, toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

- Les réels a, b et c sont les **coefficients** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme** du second degré.

Exemples :

$2x^2 - 3x + 5 = 0$,on a : a = 2, b = -3 et c = 5

$t^2 - 1 = 0$, on a : a = 1 ; b = 0 ; c = -1

$-2y^2 + \sqrt{3}y = 0$ avec : a= -2 b= $\sqrt{3}$ c =0

Forme canonique

Activité

Un jardin en forme de carré ABCD est tel que son périmètre augmenté de 5 est égal à son aire.

- Soit x le côté du carré, justifie que : $x^2 = 4x + 5$. c'est-à-dire $x^2 - 4x - 5 = 0$
- On cherche à résoudre dans IR l'équation : $x^2 - 4x - 5 = 0$ (E)

➔ Montre que $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

➔ Déduis-en, en remplaçant $x^2 - 4x$ par sa valeur dans cette expression, que l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$ équivaut à $(x-2)^2 - 9 = 0$

➔ Résous alors l'équation (E) puis trouve le côté du carré.

En appliquant la même démarche résous dans IR les équations :

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

Pour résoudre ces équations nous avons écrit le trinôme $x^2 + mx + p$ sous la forme

$$(x + \frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4} + p$$

<u>Exercice</u> :

Ecris les trinômes du second degré suivants sous la forme $(x + \frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4} + p$

$A(x) = x^2 + 6x - 7$; $B(x) = x^2 - 3x - 4$; $C(x) = x^2 + 2x + 5$

Cas général

On considère l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

Ecrivant $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ sous la forme $(x+\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}+p$, montre que

$$f(x) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Retiens :

$a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est la forme canonique de ax^2+bx+c

Exercices

Ecris sous la forme canonique les expressions suivantes :

$f(x) = -2x^2-6x+5$; $g(x) = 3x^2-2x+1$; $h(x) = \frac{1}{4}x^2-x+1$;

$k(x) = x^2-x-2$

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Méthode de résolution :

$ax^2+bx+c=0$ comme $a\neq 0$ on a : $a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0$

donc $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

Posons $\Delta = b^2-4ac$.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

-Si $\Delta < 0$ alors l'égalité $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ est impossible donc l'équation

$ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution d'où l'ensemble S des solutions est $S=\phi$.

- Si $\Delta = 0$ alors $(x+\frac{b}{2a})^2=0$ donc la solution de l'équation est : $x=-\frac{b}{2a}$ d'où $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

-Si $\Delta > 0$

$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

… $\Leftrightarrow x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Soit $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Retiens :

Pour résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ tu calcules $\Delta = b^2-4ac$ appelé le **discriminant** de l'équation :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution

ou bien le trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ n'admet pas de racine ;

-Si $\Delta = 0$ alors, l'équation admet une seule solution : $-\frac{b}{2a}$ qui est dite double

ou bien le trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ admet **une racine double** $-\frac{b}{2a}$.

D'autre part : $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2$

-Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ou bien le trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ admet **deux racines distinctes :**

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

D'autre part : $f(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$

Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2-3x+4=0$; $3x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{48}=0$; $3x^2-x-4=0$.

Remarque : *discriminant réduit*

Si $b = 2b'$ alors pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on peut utiliser $\Delta' = b'^2 - ac$ appelé le discriminant réduit de l'équation.

Retiens :

- Si $\Delta' < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution ;

-Si $\Delta' = 0$ alors, l'équation admet une seule solution : $-\frac{b'}{a}$;

-Si $\Delta' > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exercices d'application

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$2x^2 + 3x - 2 = 0$ $\quad 4x^2 + 8x + 4 = 0$ $\quad x^2 + x + 3 = 0$ $\quad x^2 - 3x + 1 = 0$

$x^2 + 2x = -1$ $\quad 3x^2 + 3x + 1 = -x + \frac{1}{2}$ $\quad x^2\sqrt{2} - 3x + 1 = 0$

Somme et Produit des racines d'un trinôme du second degré

Soit une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Retiens :

Si le trinôme du second degré

Exercice :

O O

Il passa encore le septième de sa vie avant de se marier et cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge final du père, périt d'une mort malheureuse.

Son père lui survécu quatre années.

De tout ceci, passant, déduis-en l'âge de Diophante.

5) On lance cinq dés numérotés chacun de 1 à 6. Trois dés indiquent le même nombre et les deux autres dés indiquent un autre nombre.

Sachant que la somme totale des nombres apparus sur les 5 dés est 22. Quels sont les deux nombres affichés sur les dés ?

6) On doit partager 30.000 F entre un certain nombre de personnes. Si le nombre de personne diminuait de 4, la part des personnes restantes augmenterait de 1. 250 F. Quel est le nombre initial de personnes ?

7) Un triangle rectangle a pour aire 429 m^2. Sachant que son hypoténuse vaut 72,5 m,

Problème 5

Un artisan fabrique des objets A et B. La réalisation d'un objet A demande 30F de matière première et 125F de main- d'œuvre ; celle d'un objet B demande 70F de matière première et 75F de main- d'œuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise , les dépenses journalières en matière première et main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560F et 1250F.Les profits réaliser sont 54F par objet A et 45F par objet B.

On désignera par x le nombre d'objet A et y le nombre d'objets B fabriqués par jour.

1) Calculer en fonction de x et de y la dépense journaliére en matiére première ,et la dépense journalière en main d'œuvre .
2) (x , y) représentant les coordonnées d'un point M dans un repére orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$,déterminer l'ensemble des points M(x , y) du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

Problème 9

On considère le système (S) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{cases}$ où x et y sont des réels.

1) Résoudre ce système dans $\mathbb{R}^2$.
2) Déduire de 1) les solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x^2 + y = -1 \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + b^2 = -1 \\ a - b^2 = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{2}{d^2-1} + \frac{1}{m+1} = -1 \\ \frac{1}{d^2-1} - \frac{1}{m+1} = -2 \end{cases}$

Problème10

On considère l'équation (E) : $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 1120$.

1) En décomposant 1120 en un produit de 4 nombres entiers, trouver une solution de (E) qui soit un nombre entier ;
2) Démontrer que si α est une solution de (E), alors – α est aussi solution de (E).
3) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

Problème 11 (corrigé)

Au niveau d'un certain arrêt de bus « Dakar Dèm Dick », il a été établi que , pendant les 30 premières secondes de démarrage, la distance d (en métres) parcourue par le bus et le temps t $(en\ secondes)$ mis pour effectuer ce parcours, sont liés par la relation :

$d = \frac{t^2}{10}$.

Au moment où le bus démarre ,un cycliste apparaît derrière le bus , à 22,5 m de l'arrêt , à la vitesse de 18km/h .

A quelle distance de l' arrêt de bus le cycliste rattrape-il le bus ?

1) Au moment où démarre le bus ,apparaît aussi derrière , à 22,5 m de l'arrêt , un passager potentiel qui se met aussitôt à poursuivre le bus à la vitesse constante v.
   a) Si $v = 9$ km/h ,le passager peut-il rattraper le bus ? Si non, quelle est la distance minimale qui le séparera du bus pendant la poursuite ?
   b) Quelle est la valeur minimale de v pour que ce passager puisse rattraper le bus ?

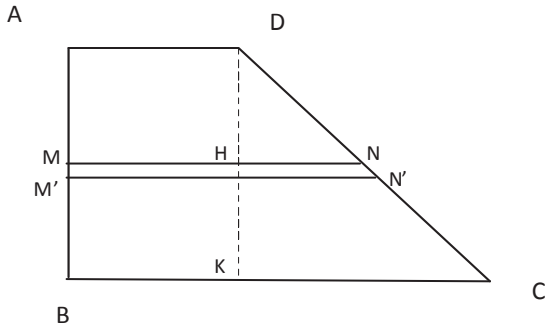
SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Exercices et problèmes

Problème de synthèse 4

Posons : *AM* = *x*

x étant une longueur que l'on doit retrancher de 200, on a ; $0 < x < 200$.



D'après le théorème de Thalès :

$\frac{HN}{KC} = \frac{DH}{DK}$; donc

HN = $\frac{150x}{200} = \frac{3x}{4}$ d'où *MN*=$150 + \frac{3x}{4}$.

Soit *M'* le point du segment [AB] tel que : *AM'* =$x + 2$ et H' le point d'intersection des droites (*MM') et (DK).* On démontre en utilisant le théorème de Thalès que :

$MM' = 150 + \frac{3(x+2)}{4}$.

L'aire en m^2 du trapéze $AMND$ est : $\frac{(AD+MM')AM}{2} = \frac{(1200+3x)x}{8}$.

Celle du trapèze $M'BCN$est : $\frac{(M'N'+BC)BM'}{2} = \frac{(1806+3x)}{8}(198 - x)$.

L'égalité des aires des deux champs équivaut à :

$$\frac{(1200+3x)x}{8} = \frac{(1806+3x)}{8}(198 - x) \Leftrightarrow x^2 + 402x - 59598 = 0$$

pour $0 < x < 200$.

En résolvant cette équation et en tenant compte de la contrainte, on trouve

$x = 3\sqrt{11111} - 201$.

Problème de synthèse 7

1) $\begin{cases} 2x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 - 6x + 2y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) - 4 = 0 \\ 3(x^2 - 2x) + 2(y^2 - 2y) - 5 = 0 \end{cases}$

Poser $X = x^2 - 2x$ et $Y = y^2 - 2y$.

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2x + 8y + 3 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2(y^2 - 4y) + 3 = 0 \\ 3(x^2 - 2x) + y^2 - 4y - 12 = 0 \end{cases}$

Poser $X = x^2 - 2x$ et $Y = y^2 - 4y$.

Problème de synthèse 11

1) On considère l'instant de départ du bus comme origine des temps et sa position à cet instant comme origine des distances.
Soit x_c la position du cycliste à l'instant t, $18km/h$ étant égal à 5 m/s.
On a : $x_c = 5t - 22{,}5$.
$x_c = d \Leftrightarrow \frac{t^2}{10} = 5t - 22{,}5$ et $t \in [0;30]$
$t^2 - 50t + 225 = 0 \Leftrightarrow t = 5s$ $où$ $t = 45s$ or $t \in [0;30]$, donc le cycliste rattrape le bus $5s$ après le départ du bus c'est à $2{,}5m$ de l' arrêt de bus.
2) a) Soit x_p la position du passager à l'instant t, $9km/h$ étant égal à 2,5 m/s.
On a : $x_p = 2{,}5t - 22{,}5$.
$x_p = d \Leftrightarrow \frac{t^2}{10} = 2{,}5t - 22{,}5$ et $t \in [0;30]$.
D'où $t^2 - 2{,}5t + 225 = 0$

$\Delta = -275$; donc le cycliste ne rattrapera pas le bus.

Soit δ la distance qui sépare le bus du passager, on a : $\delta = d - x_p$

$\delta = \frac{t^2}{10} - (2{,}5t - 22{,}5)$

$\delta = \frac{t^2}{10} - 2{,}5t + 22{,}5$

$\delta = \frac{1}{10}(t^2 - 25t + 225)$

$\delta = \frac{1}{10}(t - \frac{25}{2})^2 + \frac{275}{40}$. La valeur minimale de δ étant $6{,}875$; la distance minimale qui sépare le bus du passager est : $6{,}875m$.

c) Soit v la vitesse du passager pour qu'il rattrape le bus.
On sait que $x_p = vt - 22{,}5$ donc $x_p = d \Leftrightarrow \frac{t^2}{10} = vt - 22{,}5$ et $t \in [0;30]$.

$t^2 - 10vt + 225 = 0$

$\Delta' = 25v^2 - 225$

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 25v^2 - 225 \geq 0$ c'est à dire $v \geq 3$.

Ansi la valeur minimale de la vitesse du passager pour qu'il rattrape le bus est égale à 3 m/s, soit 10,8 k m/h.

Devoir

(Durée : 2heures)

EXERCICE 1 (6points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $3x^2 - x - 14 = 0$ $(\mathbf{0,5point})$ 2) $-x^2 + 5x - 4 < 0$ $(\mathbf{1point})$
3) $(1 - 4x + 4x^2)(-5x^2 + 3x - 2) \leq 0$ $(\mathbf{1,5point})$

4) $-4x^2 - 3|x| + 115 = 0$ $(\mathbf{1,5point})$ 5) $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ $(\mathbf{1,5point})$

EXERCICE 2 (4points)

On considère le trinôme du second degré $f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4$, m étant un paramétre réel.

1) Déterminer les valeurs de m pour les quelles le trinôme $f(x)$ admet deux solutions distinctes $(\mathbf{1,5point})$.
2) On suppose dans cette question que $m \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$.
   Déterminer suivant les valeurs m le signe des racines de $f(x)$ $(\mathbf{2,5point})$.

EXERCICE 3 (4points)

On considère l'équation $(E): x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

1) Montrer que 0 n'est pas une solution de l'équation (E). $(\mathbf{0,5point})$
2) Montrer x est une solution de l'équation (E)si et seulement x est une solution de l'équation$(E'): x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$ $(\mathbf{1point})$.
3) On pose $X = x + \frac{1}{x}$.
   Montrer x est une solution de l'équation (E')si et seulement x est une solution de l'équation$(E''): X^2 - 3X + 2 = 0$ $(\mathbf{1point})$.
4) a) Résoudre (E'') dans $\mathbb{R}$. $(\mathbf{0,5point})$
   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation(E). $(\mathbf{1point})$

EXERCICE 4 (6points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équation suivant par la méthode Cramer:
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 3y = -4 \\ x - 5y = 6 \end{cases} .$$ $(2points)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ graphiquement l'inéquation suivante :
$(2x - y + 4)(-2x + y - 1) < 0$ $(2points)$
3) On considère le système suivant : $(\Sigma)\begin{cases} ax - 4y = 5 \\ -x + ay = 2 \end{cases}$; a étant un paramètre réel.
   a) Résoudre le système (Σ) pour $a = 1$ par la méthode Cramer. $(0,5point)$
   b) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a , le nombre de solution du systéme (Σ). $(1,5point)$

10 POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

APERÇU HISTORIQUE

L'histoire des polynômes est inséparable de celle de l'algèbre. Initialement créés pour résoudre des équations, les polynômes se trouvent confondus avec les fonctions polynômes. Au fur et à mesure que les recherches s'approfondissent, il se révèle nécessaire de distinguer plus nettement le polynôme formel de la fonction polynôme.

« Descartes (1596 – 1650) philosophe, mathématicien et physicien est certainement l'un des hommes les plus responsables du développement des mathématiques sous sa forme actuelle. Il a voulu avoir « une connaissance claire et assurée de tout ce est utile à la vie ». Ses recherches l'amenèrent à unifier le corps des sciences selon un petit nombre de principes qu'il énonce dans le célèbre *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.*

Au début de ce traité, Descartes introduit l'usage des lettres *x, y, z…*pour désigner des inconnues, des lettres *a, b, c …*pour les données et des symboles x^2, x^3…pour les carrés et les cubes.
Pour l'égalité, il emploie un signe ancien ressemblant au symbole infini « ∞ », ignorant ou rejetant le signe « = » introduit en 1557, par le mathématicien anglais Recorde. C'est le début de l'utilisation des polynômes et des fractions rationnelles en mathématiques.
Les polynômes et les fractions rationnelles jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines de la vie et des mathématiques.

OBJECTIFS

- Mobiliser la notion de polynôme et le vocabulaire y afférent dans la résolution des problèmes de calcul algébrique.
- Utiliser les polynômes pour résoudre des problèmes faisant intervenir la résolution des équations et/ou l'étude de signe d'expressions littérales.
- Utiliser les fractions rationnelles pour résoudre des problèmes de factorisation et de décomposition de d'expressions littérales.

POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Polynômes

Activité

On considère la fonction A définie de IR vers IR par A(x) $= (3x^2 + x - 1)(2x + 5)$
Développe, réduis et ordonne l'expression .$A(x)$
Tu constates que $A(x)$ est une somme de termes de la forme $a_i x^i$ où les a_i sont des constantes réelles, i un entier naturel.
$A(x)$ est un polynôme.

Définition et vocabulaire

Soient n un entier naturel non nul et les n + 1 réels fixés a_n ; a_{n-1}; … a_1; a_0.
On appelle polynôme toute expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + + a_0$$

- x désigne la **variable.**
- Les réels constantes a_i avec $i = 0, 1, \ldots, n$ sont appelées **coefficients** du polynôme.
- Si $a_n \neq 0$ alors **n** est le **degré** du polynôme P(x) et on note d°(P) $= n$
- Chacun des termes $a_i x^i$ est un **monôme**.

Exemples

P(x) = $3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ est un polynôme de degré 5. On note :
d°(P) = 5.
Les coefficients de P sont : $a_5 = 3$, $a_4 = 3$, $a_3 = -1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 5$ et $a_0 = -7$.
Q(x) = $-2x^3 + \frac{3}{5}x - 2$ est un polynôme de degré 3 dont les coefficients sont : $a_3 = -2$; $a_2 = 0$; $a_1 = \frac{3}{5}$ et $a_0 = -2$.

Remarque :

- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Un polynôme nul n'a pas de degré.
- Par abus de notation un polynôme p(x) est souvent noté p.

Différentes écritures d'un polynôme

Forme réduit

Soit f(x) = $x^3(x^2 + 2) + 2x(x^3 + 2x)$.
Montre que pour tout réel x, $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2$
Cette nouvelle écriture de $f(x)$ est appelée forme réduite du polynôme f(x).

Forme factorisée

Montre que pour tout réel x, $f(x) = x^2(x+2)(x^2+2)$.
Cette écriture de f(x) est sa forme factorisée.

Exercice

On considère le polynôme p(x) = $4x^3 - x + (2x - 1)(x + 5)$.
Donne la forme réduite et la forme factorisée de p(x).

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- ils ont le même degré ;
- les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exercice d'application

On considère les polynômes $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7$ et $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Détermine les réels $a, b, c, et\ d$ pour que $p(x) = q(x)$.

Somme et produit de deux polynômes

Somme

Activité

On considère les polynômes $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7$ et $q(x) = 2x^4 - 5x^2 + 7x + 2$.
Calcule $p(x) + q(x)$.
$p(x) + q(x)$ est un **polynôme** appelé **somme** des polynômes p(x) et q(x) : on le note $(p+q)(x)$.
On écrit : $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$.

Retiens :
La somme de deux polynômes p(x) et q(x) est un polynôme noté (p + q)(x).
Le degré du polynôme (p + q)(x) est inférieur ou égal à celui du polynôme qui a le plus grand degré.

Produit

Activité :

On considère les polynômes $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7$ et $q(x) = 2x^4 - 5x^2 + 7x + 2$.
Mets $p(x) \times q(x)$ sous forme réduite.
$p(x) \times q(x)$ est le **polynôme produit** des polynômes $p(x)$ et $q(x)$ on le note : $(p \times q)(x)$.

Retiens :
Le produit de deux polynômes $p(x)$ et $q(x)$ est un polynôme noté $(p \times q)(x)$.. Le degré du polynôme $(p \times q)(x)$. est égal à la somme des degrés des polynômes $p(x)$ et $q(x)$.

Zéro ou racine d'un polynôme

Activité

On considère le polynôme $p(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

Calcule $p(-2)$; $p(1)$; $p(3)$; $p\left(\frac{1}{2}\right)$ et $p\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Tu remarques que $p(-2) = 0$, $p(3) = 0$ et $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$: on dit que -2 , 3 et $-\frac{1}{2}$ sont des **zéros du polynôme p** ou des **racines du polynôme p**.

Retiens :

Un nombre réel a est une racine d'un polynôme p lorsque *p(a) = 0*

Exercice d'application :
On donne le polynôme $g(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$.
Les réels 2 ; -2 et 3 sont-ils des racines de g ?

Factorisation d'un polynôme

Activité

On considère le polynôme $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 10$
Montre que $p(2) = 0$.
Justifie que $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 10 - (2 \times 2^3 - 5 \times 2^2 + 7 \times 2 - 10)$.
Montre alors que $p(x) = 2(x^3 - 2^3) - 5(x^2 - 2^2) + 7(x - 2)$ ensuite que $p(x) = (x - 2)(2x^2 - x + 5)$.

Retiens :

- Un nombre réel α est une racine d'un polynôme p signifie qu'il existe un polynôme q tel que : d°(q) = d°(p) – 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$ $p(x) = (x - \alpha)q(x)$.
- Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal au degré du polynôme.

Soit un polynôme p(x) admettant le réel a comme racine.
Comment déterminer q(x) tel que p(x) = (x – a)q(x) ?

- ***Méthode d'identification des coefficients***

Activité :
On donne le polynôme : $p(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$
Calcule $p(-1)$.
Déduis-en que $p(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où $a, b\ etc$ sont des nombres réels $(a \neq 0)$.
Développe cette nouvelle expression de $p(x)$ et en appliquant l'égalité des polynômes, trouve les réels $a, b\ et\ c$.

Ainsi en remplaçant $a, b\ et\ c$ par les valeurs trouvées dans l'égalité $p(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ tu obtiens la forme factorisée de p(x).
Cette méthode est appelée méthode d'identification des coefficients.

- ***Méthode d'Hörner***

Activité 1
On donne un polynôme $P(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ avec $c_3 \neq 0$.
On suppose que pour un réel a tel que p(a) = 0.
On veut calculer le polynôme $g(x) = b_2x^2 + b_1x + c_0$ tel que :
p(x) = (x – a)g(x).
Montrer que :

- $b_2 = c_3$
- $b_1 = c_2 + ab_2$
- $b_0 = c_1 + ab_0$

Activité 2

On donne le polynôme : $p(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$.

i) Vérifie que le p (-1) = 0 ;
ii) Applique le résultat de l'activité précédente pour factoriser p(x). Voici une disposition pratique permettant de calculer facilement les coefficients de g(x).

Coefficients de p(x) par ordre décroissant	c_3	c_2 ↓ +	c_1 ↓ +	c_0 ↓ +
a multiplié par les coefficients de g	×a ↗	ab_2 ‖ ×a ↗	ab_1 ‖ ×a ↗	ab_0 ‖
Coefficient de g(x) par ordre décroissant	c_3 = **b_2**	c_2+ab_2 = **b_1**	$c_1 + ab_1$ = **b_0**	g(a)

Solution :

Coefficients de p(x) par ordre décroissant	2	-2 ↓ +	-5 ↓ +	-1 ↓ +
a multiplié par les coefficients de g	×(-1) ↗	-2 ‖ ×(-1) ↗	4 ‖ ×(-1) ↗	1 ‖
Coefficient de g(x) par ordre décroissant	c_3 = **2**	**-4**	**-1**	g(a) = 0

On en tire : $p(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x - 1 = (x+1)(2x^2 - 4x - 1)$.
Cette méthode de factorisation d'un polynôme est appelée méthode de Hörner.

Exercices d'application :

Exercice 1

Soit $f(x) = 2x^3 - 5x - 6$

Calcule $f(2)$ et factoriser $f(x)$ par la méthode de Hörner.

Exercice 2

On donne $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

Calcule $p(1)$.

En utilisant la méthode de Hörner détermine le polynôme q tel que :

$p(x) = (x-1)q(x)$.

Exercice 3

Soit $q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, calcule $q(2)$ et détermine les nombres réels a, b et c tels que $q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

Déduis-en une factorisation de $p(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

- ***Méthode de la division euclidienne***

Rappel

Tu connais bien la technique qui te permet d'effectuer ces divisions.

a) 156 par 12
b) 180 par 7

La première tu trouves 13 comme quotient et 0 comme reste : 1 5 6 | 1 2 0 | 1 3 On a donc : 156 = 12×13 ; comme le reste est l'entier 0 (156 est divisible par 12)	La seconde division donne : 25 comme quotient et 5 comme reste. 1 8 0 | 7 5 | 2 5 On a : 180 = 7×25 + 5.

Cette division euclidienne se généralise aux polynômes.
On dispose les calculs de la même façon. Dans ce premier exemple, nous allons effectuer une division euclidienne où le reste est nul ; le cas général sera abordé dans les paragraphes suivants.

Exemple :

Effectuons la division $(2x^3 - 2x^2 - 5x - 1) : (x+1)$

Explicitation de la méthode

Etape 1 : Tu écris $2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ à la place du dividende et $x+1$ à la place du diviseur. Ces deux polynômes sont ordonnés dans le sens décroissant	**Etape 2 :**Tu mets au quotient le monôme qu'il faut multiplier par x, monôme de plus haut degré au diviseur, pour avoir $2x^3$ Tu trouves alors $2x^2$. Le produit $2x^2(x+1) = (2x^3 + 2x^2)$ soustrait au diviseur (les monômes de même degré sont alignés verticalement).
$2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ | $x+1$	$2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ | $x+1$ $-(2x^3 + 2x^2)$ | $2x^2$ $-4x^2 - 5x - 1$

Etape 3 : Tu cherches le monôme qu'il faut multiplier par x pour avoir - $4x^2$. Tu effectues le produit - 4x(x + 1) que tu soustrais de $-4x^2 - 5x - 1$.	**Etape 4** De même, tu cherches le monôme à multiplier par x pour trouver – x. A la fin de l'opération tu trouves comme quotient $2x^2 - 4x - 1$ et comme reste le polynome nul
$2x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \mid x + 1$ $-(2x^3 + 2x^2) \mid 2x^2 - 4x$ $-4x^2 - 5x - 1$ $-(-4x^2 - 4x)$	$2x^3 - 2x^2 - 5x - 1 \mid x + 1$ $-(2x^3 + 2x^2) \mid 2x^2 - 4x - 1$ $-4x^2 - 5x - 1$ $-(-4x^2 - 4x)$

On en déduit la factorisation : $2x^3 - 2x^2 - 5x - 1 = (x + 1)(2x^2 - 4x - 1)$

Étude du signe d'un polynôme

Activité

On considère le polynôme $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

Montre que – 1 est un zéro de p(x).

Montre que $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x - 3)$

Etudie le signe de chacun des deux facteurs : $(x + 1)$ et $(2x^2 - 5x - 3)$

A l'aide d'un tableau de signes, étudie le signe de p(x).

Indication

Tu pourras utiliser l'une des méthodes précédentes (Hörner, division euclidienne, coefficients indéterminés) pour montrer que : $p(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x - 3)$.

Tu sais déterminer aussi le signe d'un polynôme de degré un ou deux (revois au besoin le cours sur les équations et inéquations).

Tu auras finalement le tableau :

x	- ∞		-1		$-\frac{1}{2}$		3		+ ∞
$x + 1$		–	0	+	|	+	|	+	
$2x^2 - 4x - 1$		+	|	+	0	–	0	+	
p(x)		–	0	+	0	–	0	+	

En résumé :

- p(x) < 0 si x $\in$]- ∞ ; -1[$\cup$]- $\frac{1}{2}$; 3[
- p(x) > 0 si x $\in$]- 1 ; - $\frac{1}{2}$ [$\cup$]3 ; + ∞ [
- p(x) = 0 si x = -1 ou x = - $\frac{1}{2}$ ou x = 3.

Remarque :
Pour étudier le signe d'un polynôme p(x) connaissant ses racines, tu peux le factoriser en facteurs plus simples; à l'aide d'un tableau de signe donnant le signe de chacun de ses facteurs, tu détermines son signe.

Exercice
Etudie le signe du polynôme p(x) dans chacun des cas suivants :
p(x) = $x^3 - 8$; p(x) = $x^3 + 4x^2 + 2x - 1$;
Indication : tu pourras chercher des racines évidentes de chaque polynôme.

DIVISION EUCLIDIENNE DE DEUX POLYNOMES

Définition et technique de calcul

Activité

Voici la division euclidienne de $2x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ $par\ \ x + 1$

Explique les différentes étapes de cette division en t'inspirant de l'exemple du paragraphe précédent.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - 2x^2 - 5x - 3 & x + 1 \\
\hline
-(2x^3 + 2x^2) & 2x^2 - 4x - 1 \\
\hline
\quad -4x^2 - 5x - 3 & \\
\quad -(-4x^2 - 4x) & \\
\hline
\end{array}
$$

Pour tout réel x, $2x^3 - 2x^2 - 5x - 3 = (x+1)(2x^2 - 4x - 1) - 2$

Retiens :
Etant donnés deux polynômes $a(x) et\ b(x)$, avec ($b(x)$ différent du polynôme nul ; il existe deux polynômes $q(x)\ et\ r(x)$ tels que : $a(x) = b(x) \times q(x) + r(x)$ avec degré de $r(x)$ inférieur strictement à celui de $b(x)$.
$q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $a(x)\ par\ b(x)$ et $r(x)$ le reste.
NB **:** Si $r(x)$ est le polynôme nul alors on dit que $a(x)$ est divisible par $b(x)$.

FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

Activité

Soit l'expression $g(x) = x - 2 - \frac{3x+4}{x^2+3}$

Écris $g(x)$ sous la forme $\frac{m(x)}{n(x)}$ où m et n sont des polynômes.

Note que $\frac{m(x)}{n(x)}$ est appelé fraction rationnelle.

Définition

On appelle fraction rationnelle, le quotient de deux polynômes m(x) par n(x), où n(x) n'est pas le polynôme nul.

Exemple

$f(x) = \frac{2x^3-4x^2+7x-3}{x^2+x-2}$

$p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ et $q(x) = x^2 + x - 2$.

$f(x)$ est une **fraction rationnelle**.

Condition d'existence d'une fraction rationnelle

Activité

Soit $f(x) = \frac{2x^3-4x^2+7x-3}{x^2+x-2}$

Détermine les racines de $x^2 + x - 2$

Pour quelles valeurs de x, f(x) existe-t-il ?

Retiens :

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{E(x)}$ une fraction rationnelle, $f(x)$ existe si et seulement si $E(x) \neq 0$.

L'ensemble des réels pour lesquels f(x) existe est appelé le domaine ou ensemble de définition de f. On le note Df.

Exercice d'application
Détermine le domaine de définition de la fraction rationnelle f dans chacun des cas suivants :

a) f est définie par : f(x) = $\frac{2x^3-4x^2+7x-3}{x^2+x+2}$;

b) f est définie par : f(x) = $\frac{-4x^2+7x-3}{-x^2+x+2}$;

c) f est définie par : f(x) = $\frac{-4x^2+7x-3}{x^2+2x+1}$.

Simplification d'une fraction rationnelle

Activité

Factorise les polynômes m(x) = $4x^2 + 7x + 3$ et n(x) = $2x^2 + x - 1$

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$

Montre que pour tout $x \neq -1$ et $x \neq \frac{1}{2}$, f(x) = $\frac{4x+3}{2x-1}$

La fraction rationnelle $\frac{4x+3}{2x-1}$, qui est égale à f(x) pour $x \neq -1$ et $x \neq \frac{1}{2}$, est appelée l'expression simplifiée de f(x).

Retiens :

Simplifier une fraction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{E(x)}$ c'est l'écrire pour tout x appartenant à Df sous la forme $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ où g(x) et h(x) sont des polynômes qui divisent respectivement N(x) et E(x).

Etude du signe d'une fraction rationnelle

Activité

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x-2}$

A l'aide d'un seul tableau de signes, étudie le signe du numérateur et du dénominateur de f(x), puis le signe de f(x).

Retiens :

Pour étudier le signe d'une fraction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{E(x)}$ on étudie dans un même tableau les signes du numérateur et du dénominateur puis le signe de f(x) en appliquant la règle des signes d'un quotient.
NB : Ne pas oublier de tenir compte du domaine de définition de la fonction rationnelle.

Décomposition d'une fraction rationnelle

Activité

Effectue la division euclidienne de $x^3 - 2x^2 - 10$ par $x^2 + 3$ puis déduis-en une expression de $k(x) = \frac{x^3-2x^2-10}{x^3-2x^2-10}$ de la forme $k(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+3}$

Note que l'expression de $k(x)$ sous la forme $k(x) = x - 2 - \frac{3x+4}{x^2+3}$ est appelée décomposition de la fraction rationnelle $k(x) = \frac{x^3-2x^2-10}{x^3-2x^2-10}$

Retiens :

Décomposer une fraction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ c'est l'écrire sous la forme :

$f(x) = g(x) + \frac{C(x)}{B(x)}$ où sont des polynômes $g(x)$ et $C(x)$ avec d°(C) < d°(B).

EXERCICES ET PROBLEMES

Polynômes

Exercice 1 :

1) Trouve un polynôme qui a pour racines -2 et 5.

2) Trouve un polynôme de degré 3 qui a pour racines 2, -3 et 0 et dont le coefficient du monôme de degré 3 est égal à -1.

Exercice 2

On donne $P(x)= -2x^3+7x^2-2x-3$ et $Q(x)= -x^2+4x-3$

1) Détermine les réels a et b tels que pour tout réel x, P(x) = (ax+b)Q(x) en utilisant :

a) La méthode d'identification des coefficients.

b) La division euclidienne

2) Etudie suivant les valeurs de x le signe de P(x).

3) Résous dans IR.

a) L'inéquation $P(x) < 0$;

b) L'inéquation $P(x) \geq Q(x)$.

Exercice 3

On donne deux polynômes $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax - 10$ et $q(x) = x + 1$, a étant un nombre réel.

1) Déterminer a pour que $p(x)$ soit factorisable par (x) .

2) On donne $a = 1$.

a) Ecrire $p(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 10 = 0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 10 \leq 0$

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-3)^4 - 4(x-3)^3 + 6(x-3)^2 + (x-3) - 10 \leq 0$

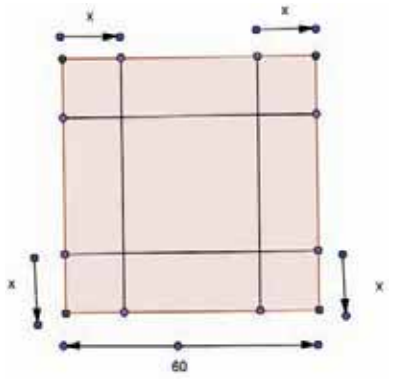
Exercice *3*

Détermine le polynôme T(x) de degré 3 divisible par $q(x) = x^2-x-6$ et dont le reste de la division euclidienne par (x-1) est égal à 12.

Exercice 4

Pour fabriquer une boite parallélépipédique, on dispose d'une plaque de carton carrée de 60 cm de côté dans laquelle on découpe à chaque coin un carré de x cm de côté. On obtient ainsi le patron de cette boite sans couvercle.

1) A quel intervalle appartient x ?
2) Déterminer le volume $V(x)$ de la boite en fonction de x.
3) Etudier le signe du polynôme $V(x) - V(10)$.
4) Quelle conclusion peux-tu faire ?



Exercice 5

Un polynôme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + + a_0$ *de degré n est un polynôme symétrique lorsque :* $a_n = a_0$; $a_{n-1} = a_1$; $a_{n-k} = a_k$ *pour tout k compris entre 0 et n.*

Exemples : $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ *est un polynôme symétrique de degré 4 .*
$X^3 + 10x^2 + 10x + 1$ *est un polynôme symétrique de degré 3.*

1) Un polynôme symétrique de degré 3 est du type $P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$
où $a \in IR^*$ et $b \in IR$.
Montre qu'un polynôme symétrique de degré 3 admet -1 comme racine.
b) Déduis-en la factorisation de $P(x) = x^3 + 10x^2 + 10x + 1$ puis détermine ses racines.
c) Montre que tout polynôme symétrique de degré impair admet -1 comme racine .
2) Montre qu'un polynôme symétrique P(x) n'admet pas de racine nulle et que si α est racine de P(x) alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine de P(x).

3) On donne $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
a) Montre que : P(x) = 0 si et seulement si $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) + 2 = 0$.
b) En posant $X = x + \frac{1}{x}$ déduis de la question 3) a) que l'équation P(x) =0 est équivalente à l'équation : $X^2 - 2X = 0$.
c) Résous l'équation $X^2 - 2X = 0$ puis déduis-en les racines du polynôme P(x).
4) Détermine les racines du polynôme $Q(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 - x + 1$ en utilisant la méthode de la question précédente.

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montre que$(x-1)(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}) = x^n-1$ pour tout x réel.

2) On considère le polynôme $P(x) = (x-1))[nx^{n-1}- (1+x+x^2+\ldots..+x^{n-1})]$.

a) Montre que : $P(x) = nx^n(x-1) - (x^n-1)$.

b) Déduis-en que : $P(x) = (x-1)[nx^n-(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})]$.

3) On considère le polynôme $Q(x)= nx^n - (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$

Calcule Q(1)

4) Déduis de ce qui précède que P(x) est divisible par $x^2 - 2x + 1$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$

1) Quel est le nombre de racines de P(x), pour :

a) n=0 ; b) n=1 ; c) n=2.

2) Montre que pour $n \geq 2$, P(x) admet au plus 2n – 1 racines réelles.

3) a) Montre que pour tout n entier naturel strictement supérieur à 3, P(x) admet x_1, x_2 et x_3 comme racine (x_1, x_2 et x_3 étant les racines de P(x) pour n = 2 trouvées dans la question précédente)

b) Déduis-en un polynôme Q(x) de degré 3 qui divise P(x).

c) Si P(x) = Q(x).R(x), trouve le degré du polynôme R(x).

Exercice 8

On donne le polynôme $P(x)= ax^3 + bx^2 + ax + b - 4$.

1) Détermine les réels a et b pour que P(x) soit divisible par $Q(x) = x^2-3x+2$.

2) Déduis-en alors les racines de P(x) et résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation, $P(x) \leq 0$.

3) On pose $R(x) = P(x^2+x+1)$.

a) Quel est le degré de R(x) ?

b) Détermine les racines de R(x).

c) Déduis du 2) l'ensemble des solutions de l'inéquation $R(x) \leq 0$.

Exercice 9

1) a) Détermine un polynôme P(x) de degré 2 tel que P(0) = 0 et pour tout x réel x $P(x+1) - P(x) = x$. (1)

b) Dans la relation (1) en remplaçant x successivement par les entiers naturels 1 ; 2 ; 3 ; …. ; n et en additionnant membre à membre les n égalités obtenues, montre que pour tout entier naturel n, on a : $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) a) Détermine un polynôme Q(x) de degré 3 tel que Q(0) = 0 et pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$ (2).

b) Déduis-en que pour tout entier naturel n, on a :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) a) Détermine un polynôme R(x) de degré 4 tel que R(0) = 0 et pour tout x réel R(x+1) - R(x) = x^3 (3).

b) Déduis-en que pour tout entier naturel n, on a : $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Déduis des questions précédentes que :
$(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Exercice 10
On Considère le polynôme P(x) = x^3 - 3x + 2.
1) a) Représente graphiquement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions f et g définies par : f(x) = x^3 et g(x) = 3x – 2
b) Déduis-en que le polynôme P(x) admet trois racines dans IR par lecture graphique
2) On désigne par α, β, γ les racines de P(x). Donne la valeur exacte de chacun des réels : $\alpha+\beta+\gamma$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$; $\alpha\beta\gamma$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.

Exercice 11
1) On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les réels *a, b, c* et *d* de telle manière que, pour tout réel x, on ait :
$f(x) - f(x-1) = x$.
Déduis-en la somme des *n* premiers entiers naturels en fonction de n.
2) On pose $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Déterminer les réels a, b, c et d de telle maniére que, pour tout réel *x*, on ait :
$g(x) - g(x-1) = x^2$.
En déduire la somme des carrés des n premiers entiers naturels en fonction de n.

Exercice 12
a, b *et* c étant trois nombres réels distincts
1) On considère le polynôme $p(x) = A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
Calculer $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$.

3) On considère le polynôme $q(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1$

a) Quelle est le degré maximal de $q(x)$?
b) En utilisant 1) montrer que le polynôme $q(x)$ admet trois racines.
Que peut-on déduire pour $q(x)$ et pour le polynôme
$h(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$?

Exercice 13

1) On considère l'équation (E) de la forme : $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont deux nombres réels non nuls.

a) Démontrer que (E) ne peut pas avoir trois solutions égales.

b) Démontrer que si (E) admet trois solutions a, b, c alors $a + b + c = 0$.

2) On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E') : $x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = 0$.

a) Poser $x = X + \alpha$ et montrer que l'on est alors amené à résoudre l'équation (E'') :
$X^3 + (3\alpha - 9)X^2 + (3\alpha^2 - 18\alpha + 6)X + \alpha^3 - 9\alpha^2 + 6\alpha + 56 = 0$.

b) Démontrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle (E'') est équivalente à (E) avec p et q à déterminer.

c) Résoudre (E'') puis en déduire les solutions de (E').

3) Utiliser la méthode exposée dans B) pour résoudre l'équation :
$8x^3 + 12x^2 - 66x - 35 = 0$.

Exercice 14 (Problème de Bhaskara-Inde XIIe siècle)

« Quel est, Homme savant, le nombre qui, multiplié par 12 et ajouté au cube du nombre, est égal à 6 fois le carré, augmenté de 35 ? »

Exercice 15

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les deux points $A\binom{-1}{0}$ et $B\binom{1}{0}$.

Soit x un nombre réel quelconque, M le point d'abscisse x et d'ordonnée $f(x) = (x-1)^2 + 1$ et N le point d'abscisse x et d'ordonnée $g(x) = -x^2 - 2$.

Déterminer les nombres réels x tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient colinéaires.

Exercice 16

On considère les polynômes $f(x) = x^4 + mx + p$ et $g(x) = (x+2)^2$ où m est un nombre réel.

1) Déterminer m pour que $f(x)$ soit factorisable par $g(x)$.
2) Etudier le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 17

On considère le polynôme $p(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$où a et b sont deux nombres réels distincts.

1) Démontrer qu'il existe un polynôme $p_1(x)$ tel que, pour tout nombre réel x :
$p(x) = (x-a)(x-b)p_1(x)$.
2) Quel est le degré de $p_1(x)$? Déterminer $p_1(x)$.En déduire une factorisation de $p(x)$.

Fractions rationnelles

Exercice 18
Parmi les expressions suivantes, reconnais celles qui sont des fractions rationnelles puis détermine leur domaine de définition :

A(x)= $\frac{3x+5}{2} - \frac{1}{x+2}$ B(x) = $\sqrt{\frac{x^2-3}{x-5}}$ C(x) = $-3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8$

D(x)= $\left|\frac{3x^2-x+4}{x+5}\right|$ E(x)= $\frac{2y^3+y+6}{y^2+y}$ G(t)= $\frac{1}{t^2+4}$

F(y)= $(3y^3 + y + 7)(y^2 + 5y + 1)$

Exercice 19
Donne une fraction rationnelle f(x) dans chacun des cas suivants :
a) f(x) s'annule en 2 et -3 et le domaine de définition de f est l'ensemble IR.
b) f(x) s'annule en -2 et 3 et a pour domaine de définition Df = IR - {0,4}.

Exercice 20
Soit k(x)= $\frac{5x^3-3x^2+x+7}{x^2-x-2}$.
1) Détermine le domaine de définition D_k de k.
2) Détermine les réels a, b, c , d tels que pour tout réel x appartenant à D_k,
k(x) = $ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x+1}$.

Exercice 21
Soient f(x) et g(x) les polynômes définis par f(x)= $-2x^3 + 7x^2 + 5x - 4$ et
g(x)= $2x^2 + x - 1$
1) Factorise f(x) sachant qu'il a une racine avec g(x).
2) On pose h(x)= $\frac{g(x)}{f(x)}$.
a) Pour quelles valeurs de x h(x) existe-t-il ?
b) Simplifie h(x).
c) Résous dans IR : h(x) ≥ 0.

Problème 22
On considère le polynôme P(x) = $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$.
1) Calcule P(x+2) en fonction de x.
2) On note Q(x)=P(x+2).
a) Détermine les racines de Q(x).
b) Déduis-en les racines de P(x).
3) On pose R(x)= P(x^2+x). Détermine les racines de R(x).

4) Soit f(x) = P ($\frac{x+1}{x-1}$).

a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Résous dans IR l'équation f(x) = 0.

Exercice 23

On considère le polynôme $p(x) = -3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

1) a) Déterminer les valeurs de a et b pour que 1 et -2 soient des racines de $p(x)$.

a) Factoriser alors $p(x)$ puis résoudre l'équation $p(x) = 0$

2) On pose $a = -9$ et $b = 10$ et on donne $q(x) = \frac{p(x)}{-2x^2+3x-2}$

a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquelles $q(x)$ existe; puis simplifier $q(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $q(x) = 0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $q(x) \geq 0$ et $q(x) = -5x + 5$.

Exercice 24

Soient p(x) = $\frac{x^2+9x+5}{x^2+3x+2}$ et q(x) = $3 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$.

1) Montre que :

a) p(x) et q(x) ont le même domaine de définition.

b) Pour tout réel x différent de -2 et de -1, p(x)=q(x).

2) Démontre que :

$p(0) + p(1) + \cdots . + p(n) = 3(n+1) + \frac{1}{n+2} - 1$

ou que $p(0) + p(1) + \cdots + p(n) = 3n + 2 + \frac{1}{n+2}$

3) Détermine la valeur exacte de $p(0) + p(1) + p(2) + \cdots \ldots \ldots + p(1000)$.

Exercice 25

On considère la fraction rationnelle f(x)= $\frac{1}{x^2+1}$

1) Détermine le domaine de définition Df de f(x)

2) Détermine les réels a et b tels que pour tout réel x appartenant t à Df,

f(x)= $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$

3) En utilisant les deux expressions de f(x), montre que :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$.

Déduis-en la valeur exacte de : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{110}$.

Exercice 26

Soit le polynôme h défini par h(t)= $(\frac{t^2-t}{2})^2$

1) Démontre que pour tout réel t, h(t+1) - h(t) = t^3 (β)

2) Calcule de manière performante en utilisant l'égalité (β) :

h(3) – h(2) , h(11) – h(10) …….h(21) – h(20) .

Montrer que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Devoir

(Durée: 3 heures)

Exercice 1 (6,5 points)

On considère le polynôme $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

1) a) Calculer $p(-1)$. **(0,5 point)**

b) En déduire une factorisation de $p(x)$ **(1 point)**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $p(x) = 0$ **(1point)**

b) $p(x+5) = 0$ **(1point)**

3) a) Etudier le signe de $p(x)$ dans $\mathbb{R}$. **(1point)**

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations

$p(x) \leq 0$ et $p(-x+3) > 0$ **(1point+1point)**

Exercice 2 (5points)

On considère le polynôme $T(x) = 6x^3 - x^2 - 32x + 20$.

1) Calculer $T(2)$ et factoriser (x) . **(0,5point+1point)**

2) On pose $f(x) = \frac{6x^3-x^2-32x+20}{9x^2-4}$

a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. **(1point)**

b) Simplifier (x) . **(1point)**

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > -20$ **(1,5 point)**

Exercice 3 (5points)

Sur une droite (Δ) munie d'un repère (O, I), on considère des points fixes A, B, C d'abscisses respectives $a, a+1, a+2$.

Soit M un point de (Δ) d'abscisse x .

1) Exprimer en fonction de a et x le nombre :

$p(x) = MA^2 \times \overline{BC} + MB^2 \times \overline{CA} + MC^2 \times \overline{AB} + \overline{BC} \times \overline{CA} \times \overline{AB}$ **(1,5point)**

2) On considère le polynôme $p(x) = (x-a)^2 - 2(x-a-1)^2 + (x-a-2)^2 - 2$

a) Quel est le degré maximal du polynôme $p(x)$? **(1point)**

b) Calculer $p(a)$, $p(a+1)$, $p(a+2)$. **(1,5point)**

c) Déduire des deux questions précédentes que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $p(x) = 0$ **(1point)**

Exercice 4 **(3,5 points)**

Soit la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$ par : $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$

1) Trouver deux nombres réels α et β tels que : $f(x)=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}$ **(1point)**

2) a) Soit n un entier naturel , montrer en utilisant 1) que : $f(n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. **(1point)**

b) Montrer que $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=1-\frac{1}{n+1}$ **(1,5point)**

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

Devoir

Exercice 1

1) a) $p(-1)=0$.

b) $p(x)=(x+1)(\ 2x^2-7x+6\ )$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $S=\left\{-1;\frac{3}{2};2\right\}$

$b)$ $S=\left\{-6;\frac{-7}{2};-3\right\}$

3)a)

- si $x\in\ ]-\infty;-1]\ [\cup[\frac{3}{2};2]$ alors $p(x)$ est négatif.
- si $x\in[-1;\frac{3}{2}]\cup[2;+\infty[$ alors $p(x)$ est postif.

b)En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des inéquations

- Pour $p(x)\leq 0$ on a : $S=\ ]-\infty;-1]\cup[\frac{3}{2};2]$
- $p(-x+3)>0$ on a : $S=\ ]-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};4]$

Exercice 2

1) Calculer $T(2)=0$ et $(x)=(x-2)(6x^2+11x-10)$.

2)

a) $f(x)$ existe $\Leftrightarrow x\neq\frac{3}{2}\ \ et\ x\neq\frac{-3}{2}$.

b) Simplifier $f(x)=\frac{(x-2)(2x+5)}{3x+2}$ pour $x\neq\frac{3}{2}\ \ et\ x\neq\frac{-3}{2}$

c) $S=$

Exercice 3 (5points)

1)

$p(x)=\ (x-a)^2-2(x-a-1)^2+(x-a-2)^2-2$

2) On a $p(x)=(x-a)^2-2(x-a-1)^2+(x-a-2)^2-2$

a) Le degré maximal du polynôme $p(x)$ est 2

b) Calculer $p(a)=0$, $p(a+1)=0$, $p(a+2)=0$.

c) le polynôme $p(x)$ admet un nombre de racines supérieur à son degré donc il est nul.

Exercice 4 (3,5 points)

1) On trouve $\alpha = 1$ et $\beta = -1$
2) a) $(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

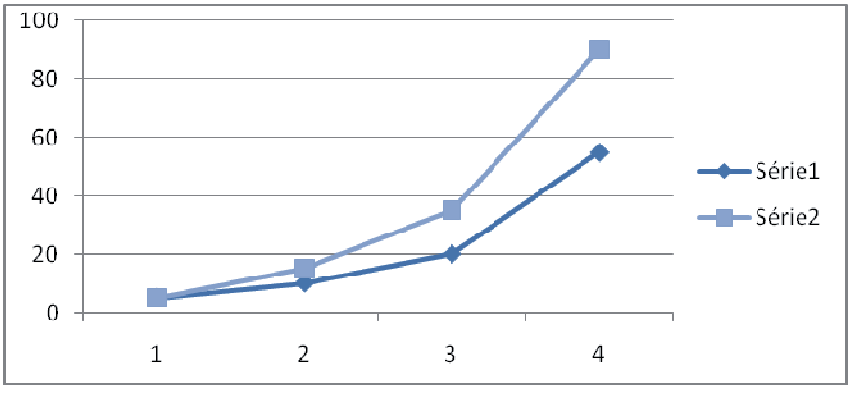
b) $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$

11 STATISTIQUE

APERÇU HISTORIQUE

Au IIe millénaire av. J.-C., les Chinois étudient déjà les chiffres de leurs productions agricoles, tandis que les Égyptiens organisent des recensements de leur population.
La Bible mentionne également le dénombrement des israéliens aptes à porter des armes.
Dans l'Antiquité, Grecs et Romains recueillent des données chiffrées relatives à la population.
A partir du XIe siècle se manifesta un intérêt particulier pour le recueil de quelques données : des relevés des propriétés ecclésiastiques, le recensement de toutes les terres anglaises sous l'ordre de Guillaume Ier le Conquérant, la tenue de registres des décès et des naissances en Angleterre.
En 1662, l'Anglais John Graunt constate une certaine constance dans le rapport du nombre de naissances féminines à celui des naissances masculines. Cette observation est le prélude aux développements du XVIIIe siècle qui voient les statistiques servir de base à des prévisions.
Aujourd'hui, les statistiques sont considérées comme des outils qui permettent de représenter et d'interpréter des données économiques, politiques, sociales, psychologiques, biologiques ou physiques. Elles permettent aussi de mettre en relation de telles données, de les analyser et de faire des prévisions par rapport à des situations futures.



OBJECTIFS

- Savoir traiter des données statistiques
- Savoir interpréter des tableaux statistiques et des graphiques.

CONSOLIDATION DES NOTIONS PREMIER CYCLE

Paramètres de position

Introduction

Tu as déjà vu dans l'enseignement moyen les paramètres de position : le mode, la moyenne et la médiane. Ces paramètres n'informent pas suffisamment sur la disposition des modalités les unes par rapport aux autres.

Dans cette leçon, nous allons aborder un autre paramètre de position, appelé quartile et d'autres paramètres renseignant sur la disposition relative des modalités, appelés paramètres de dispersion.

Activités

Activités 1

Le service de l'urbanisme fait une enquête auprès 43 grands propriétaires immobiliers sur le nombre d'appartements qu'ils possèdent. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'appartements	5	7	8	9	10	12	13	14	15
Nombres de personnes	10	1	10	1	3	7	1	4	6

1) Détermine le mode et la médiane m de cette série.
2) Trouve les valeurs Q_1, Q_2 et Q_3 du caractère qui partagent la série en quatre groupes de même effectif.

NB : Signification de Q_1, Q_2 et Q_3

- pour $\frac{1}{4}$ de la population, la valeur du caractère est inférieure ou égal à Q_1 ;

- pour $\frac{1}{4}$ de la population la valeur du caractère est supérieure ou égal Q_1 et inférieure ou égal à Q_2

- pour $\frac{1}{4}$ de la population la valeur du caractère est supérieure ou égal Q_2 et inférieure ou égal à Q_3

- et enfin pour $\frac{1}{4}$ de la population la valeur du caractère est supérieure ou égal Q_3.

Ces valeurs du caractère sont appelés les quartiles de la série.

Q_1 est le premier quartile, Q_2 est le deuxième quartile et Q_3 est le troisième quartile.

Tu remarques que $Q_2 = m$.

3) Détermine la moyenne.
4) Représente le diagramme des effectifs cumulés.
5) Représente le diagramme des fréquences cumulées.
6) En utilisant ce diagramme des effectifs cumulés, dis comment on peut retrouver les quartiles.

Retiens

Les valeurs d'une série statistiques sont supposées classées dans l'ordre croissant.

Les quartiles d'une série statistique sont les valeurs qui partagent la population en quatre groupes de même effectif. Ils sont souvent notés Q_1 , Q_2 et Q_3.
La plus petite valeur Q_1 est le premier quartile ; Q_2 est le deuxième quartile (il est égal à la médiane) et Q_3 le troisième quartile.
La longueur de l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$ (appelé intervalle interquartile) donne une idée sur la dispersion des modalités du caractère étudié ; cette intervalle est de ce fait un paramètre de dispersion.
Graphiquement, le premier quartile correspond à l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = \frac{N}{4}$ (N étant l'effectif total de la population) et du polygone des effectifs cumulés croissants. On peut aussi utiliser le polygone de fréquences cumulées croissantes.

Activité 2
Le tableau ci-dessous donne la répartition des tailles d'un échantillon de 100 personnes d'un quartier :

Tailles en cm	[80 ;110[	[110 ;140[	[140 ; 170[	[170 ; 200[
Effectifs	9	45	34	12

1) Détermine la classe modale.
2) Détermine le tableau des effectifs cumulés croissants ; déduis-en la classe médiane, la classe qui contient le premier quartile et la classe qui contient le troisième quartile.
3) Calcule la moyenne de cette série statistique.
4) Représente graphiquement les effectifs cumulés croissants de cette série.
5) Détermine les quartiles de cette série graphiquement et par le calcul.
6) A l'aide du graphique obtenu, donne une valeur approchée de la médiane.

Paramètres de dispersion : Variance et écart-type

Cas d'une série discrète

Activité

Activité 1
On considère deux groupes de 9 élèves dont les notes obtenues à un même devoir de mathématiques sont consignées dans les tableaux suivants :

Groupe 1							
Notes	2	5	7	10	13	15	18
Effectifs	1	1	1	3	1	1	1

Groupe2					
Notes	7	9	10	11	14
Effectifs	1	2	4	1	1

Détermine le mode, la médiane, la moyenne de chaque groupe.

Quel est le groupe où les résultats sont les plus homogènes (les notes s'éloignent le moins de la moyenne) ?

Solution

	Groupe 1	**Groupe2**
Mode	10	10
Médiane	10	10
Moyenne	10	10

On remarque que les deux séries ont le même mode, la même moyenne et la même médiane. En te basant sur ces trois informations les deux séries semblent être identiques, mais en regardant bien les notes tu vois que celle du groupe 2 sont plus « concentrées » autour de la moyenne que ne le sont celle du groupe1. Ces trois paramètres : mode, médiane et moyenne sont insuffisants pour rendre compte de la dispersion des notes autour de la moyenne ; d'où la nécessité de faire appel à d'autres paramètres.

Retiens :

Pour une série $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs partiels respectifs : $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ et d'effectif total N :

- **le mode** est la valeur de la variable qui a l'effectif partiel le plus élevé (remarque, on peut avoir plusieurs modes ; dans ce cas la série est multimodale)
- la médiane est la valeur de la variable qui partage la série en deux séries de même effectifs

La moyenne est le quotient de la sommes des valeurs N valeurs par l'effectif total N de la série ; on la note souvent $\bar{x}$. On a : $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$

Activité 2

Pour chacune des deux séries de l'activité 1, remplie le tableau ci-dessous :

Groupe 1

x_i	n_i	$n_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
2	1				
5	1				
7	1				
10	3				
13	1				
15	1				
18	1				
Total	9				

Groupe 2

y_i	n_i	$n_i y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$n_i (y_i - \bar{y})^2$
7	1				
9	2				
10	4				
11	1				
14	1				
Total	9				

2) Que représente les valeurs que tu as marquées dans les cases coloriées en rouge?
3) Utilise les résultats de la sixième colonne de chaque série pour comparer la répartition des notes autour des moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Solution

1)

Groupe 1					
x_i	n_i	n_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i (x_i - \bar{x})^2$
2	1	2	- 8	64	64
5	1	5	-5	25	25
7	1	7	-3	9	9
10	3	30	0	0	0
13	1	13	3	9	9
15	1	15	5	25	25
18	1	18	8	64	64
Total	9	90			196

Groupe 2					
y_i	n_i	n_iy_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$n_i (y_i - \bar{y})^2$
7	1	7	-3	9	9
9	2	18	-1	1	2
10	4	40	0	0	0
11	1	11	1	1	1
14	1	14	4	16	16
Total	9	90			28

2)

a) Pour le groupe 1 : 25 représente $1\times(15 - 10)^2$ car un seul élève a eu la note 15.

b) Pour le groupe 2 :

- le 9 représente $1\times (7 - 10)^2$ car un seul élève a eu la note 7

- le 2 représente : $2\times (9 - 10)^2$ car deux élèves ont la note 9.

3) Pour comparer ces deux groupes, calculons les moyennes de ces valeurs dans la sixième colonne.

On obtient pour le groupe 1 : $\frac{196}{9} \approx 21{,}78$

Pour le groupe 2 : $\frac{196}{9} \approx 3{,}11$.

En moyenne, le carré de l'écart de chaque note à la moyenne est environ égal à : 21,8 pour le groupe 1 et 3,11 pour le groupe 2.

Ce paramètre qui nous donne des informations sur la dispersion des notes par rapport à la moyenne est appelé variance et se note V(X) ou Var(X) pour une série X donnée.

Pour une série $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs partiels respectifs : $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ et d'effectif total N, on a V(X) = $\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+n_3(x_3-\bar{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$ où $\bar{x}$ désigne la moyenne de la série.

On le note aussi : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i-\bar{x})^2$.

Parfois ce nombre positif est très grand et donc difficile à utiliser dans les calculs. On lui préfère souvent sa racine carrée appelée écart type.

L'écart type de la série X noté σ (X) est tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ **.**

Retiens

Soit X une variable discrète de modalités : $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs partiels respectifs : $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ et d'effectif total N.

La variance de X est la moyenne des carrés des écarts des modalités à la moyenne.

La variance de X, notée Var(X) ou V(X), qu'on lit « variance de X » est le réel positif défini par : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i-\bar{x})^2$ où $\bar{x}$ désigne la moyenne de la série statistique X.

L'écart type de la série X, noté σ (X), est le nombre réel positif défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice d'application :

Doudou fait rebondir 50 fois son ballon et mesure à chaque fois la hauteur du premier rebond. Il obtient le tableau ci-dessous.
161 - 152 - 159 -168 - 164 - 168 - 153 -146 - 155 - 155 – 163 - 160 - 155 - 160 -160 - 170 - 160 - 180 - 146 - 155 - 159 - 172 - 164 - 160 - 155 - 159 - 159 - 158 161 - 164 – 152 - 176 - 163 - 159 - 155 - 149 - 182 – 155 -165 - 152 - 151 - 170 - 153 - 162 – 163 – 171- 173 - 184- 174 - 172

1) Dresse le tableau des effectifs de cette série statistique H.
2) Calcule sa variance et son écart-type.

Cas d'une série groupée en classes

Activité

On considère la distribution de l'exercice d'application précédent et on se propose de la regrouper en classes d'amplitude 5 en prenant [150 ;155[comme première classe. On appelle Y cette variable

1) Détermine les différentes classes de cette série et leurs centres c_i.
2) Dresse le tableau des effectifs de la série.
3) Calcule sa variance et son écart type.
   Indication : *Pour cela, on considère les centres de classes* c_i *et on applique la formule :* $V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (c_i - \bar{y})^2$*). Comme dans le cas discret, on a :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Retiens :

Dans le cas d'une série X groupée en classes, la variance $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (c_i - \bar{x})^2$ où les c_i représentent les centres des classes.

L'écart type est donné par la formule : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice d'application

Exercice 3

Le tableau ci-dessous donne la répartition des tailles des élèves d'une classe de 45 élèves:

Taille en centimètres	[110 ;115[	[115 ; 120[	[120 ; 125[	[125 ; 130[	[130 ; 135[
Effectifs	8	13	15	8	1

Calcule la variance et l'écart-type de cette série, puis interprète le résultat.

Autre formule de calcul de la variance

Activité préliminaire

Soient a et b deux nombres réels fixés et n un entier naturel non nul. Soient n nombres réels k_i (*i* prenant les valeurs de 1 à n) et n nombres réels t_i (*i* prenant les valeurs de 1 à n)

1) Vérifie que : $\sum_{i=1}^{n} (k_i + b) = \sum_{i=1}^{n} k_i + nb$

2) Vérifie que : $\sum_{i=1}^{n}(k_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} t_i$

3)Vérifie que : $\sum_{i=1}^{n} ak_i = a\sum_{i=1}^{n} k_i$

Propriété :

Soit X une variable discrète de modalités : $x_1, x_2, \ldots, x_p$, d'effectifs partiels respectifs : $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$ et d'effectif total N.

La variance de X est donnée par : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, {x_i}^2 - \bar{x}^2$.

Preuve

On connait déjà la formule : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,(x_i - \bar{x})^2$

On a donc : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\,({x_i}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_i {x_i}^2 - 2n_i x_i\bar{x} + n_i\bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{p}(n_i {x_i}^2) + \sum_{i=1}^{p}(-2n_i x_i\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p}(n_i\bar{x}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_i {x_i}^2) - 2\bar{x}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i\right) + \bar{x}^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x_i}^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

Par suite : $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, {x_i}^2 - \bar{x}^2$

L'utilisation de cette formule dans les calculs se révèle quelques fois très pratique.

Remarque : Si $\bar{X}$ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type, en général le pourcentage des valeurs n'appartenant pas à $[\bar{X} - \sigma ; \bar{X} + \sigma]$ est petit.

Exercice d'application

On considère deux groupes de 9 élèves dont les notes obtenues à un même devoir de mathématiques sont consignées dans les tableaux ci-dessous

Groupe 1							
Notes	2	5	7	10	13	15	18
Effectifs	1	1	1	3	1	1	1
Groupe 2							
Notes	2	7	9	10	11	15	18
Effectifs	1	2	1	1	2	1	1

1) Pour chaque groupe, calcule l'écart-type en utilisant la formule $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x_i}^2 - \bar{x}^2$.

2) Vérifie les résultats obtenus par la première méthode de calcul de V(X).

Indication

<u>Disposition pratique pour le calcul de l'écart type.</u>

Xi	*4*	*5*	*6*	*7*	*9*	*Total*
n_i	*15*	*5*	*5*	*10*	*20*	*55*
$n_i x_i$	*60*	*25*	*30*	*70*	*180*	*360*
$n_i x_i^2$	*240*	*125*	*180*	*490*	*1620*	*2555*

EXERCICES ET PROBLEMES

Caractère quantitatif discret

Exercice 1 :

On a relevé les tailles en cm de 40 élèves d'une classe de 2de:
161 – 152 - 159 -168 - 164 - 168 - 153 -146 - 155 - 155 – 163 - 160 - 155 - 160 -160 - 170 - 160 - 180 - 146 - 155 - 159 - 172 - 164 - 160 - 155 - 159 - 159 - 158 161 - 164 – 152 - 176 - 163 - 159 - 155 - 149 - 182 - 155 – 165 - 152.

1) Quelle est la population étudiée ?
2) Quels sont les individus ?
3) Présente dans un tableau les modalités, les effectifs, les fréquences en pourcentage.
5) Calcule la taille moyenne des élèves de cette classe.
6) Calcule l'écart-type de cette série.

Exercice 2:
Voici les notes de quatre élèves.
élève A : 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 8
élève B : 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12
élève C : 12 ; 13 ; 12 ; 11; 12
élève D : 7 ; 17 ; 10 ; 13 ; 13
1) Calcule la moyenne obtenue par chacun de ces quatre élèves. Que constates-tu ?
2) Calcule l'écart-type des notes de chaque élève.
3) Si tu étais le professeur, quelle appréciation donnerais-tu pour chaque élève ? Pourquoi ?

Exercice 3 :
Deux tireurs X et Y s'affrontent en vue d'une sélection comportant 20 tirs sur une cible. Les résultats obtenus sont les suivants :

Nombre de points obtenus	50 pts	30 pts	20 pts	10 pts	0 pt
Nombre de tirs de X	4	6	5	4	1
Nombre de tirs de X	6	3	5	3	3

1) La moyenne des points obtenus par chaque tireur permet-elle de départager les deux concurrents ?
2) Calculer l'écart-type de chaque série. Quel est le tireur le plus régulier ?

Exercice 4 :

Pour calculer à la main la moyenne des notes obtenues par une classe à un devoir de mathématiques, le professeur décide d'enlever 10 à chaque note, de calculer la moyenne puis de rajouter 10 au résultat obtenu.

1) Cette démarche est-elle correcte ?

2) Effectuer le calcul pour les notes suivantes :

5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 12, 14, 14, 14, 17, 18.

3) En utilisant la formule de la moyenne, vérifier puis justifier le résultat obtenu.

Exercice 5

1) La taille moyenne des onze joueurs d'une équipe de football est de 1,81 m. En relevant les tailles en mètre, le préparateur physique a omis celle du gardien de but .

Il a obtient la liste suivante des tailles : 1,71 – 1,80 – 1,85 – 1,75 – 1,78 – 1,83 – 1,75 – 1,80 – 1,85 – 1,90.

Détermine, pour le préparateur physique :

a) la taille du gardien.

b) la taille médiane de ces onze joueurs.

2) Dans cette équipe il y a trois remplaçants de la même taille. Sachant que la moyenne des tailles de ces quatorze joueurs est 1,84 m.

a) Détermine la taille de chacun des trois remplaçants.

b) Détermine la taille médiane de cette nouvelle série.

3) Calcule l'écart-type de cette série, puis interprète le résultat.

Exercice 6

On a recensé le nombre d'enfants vivant dans chacun des 810 foyers d'une petite ville. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif (foyers)	290	170	155	95	43	27	20	10

On appelle X le série statistique égale au nombre d'enfants par foyer.
a) Calcule le nombre moyen d'enfants *m* par foyer.
b) Calcule l'écart type σ de la série X.
c) Calcule le pourcentage des foyers de cette ville dont le nombre d'enfants est compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$.

Exercice 7

Un éleveur faisant de l'embouche pèse les 100 moutons de son troupeau. Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Masses en kg	25	30	40	45	50	55	57	60
Effectifs	5	7	13	24	19	14	10	8

On appelle X la série statistique égale à la masse en kg des moutons de ce troupeau

1) Calcule la moyenne $\overline{X}$
2) Calcule l'écart-type σ de cette série, puis interprète le résultat
3) Les 90% au moins de l'effectif sont-ils dans $[\bar{X} - 2\sigma;\ \bar{X} + 2\sigma]$?

Exercice 8
On a mesuré les tailles en cm de 100 personnes d'un quartier. Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Tailles x en cm	150	152	154	156	157	159	160	164
Effectifs	5	7	13	24	19	14	10	8

On pose y = x – 150. On obtient une nouvelle série Y.

1) Montre que $\overline{y} = \overline{x} - 150$.
2) Calcule l'écart-type σ_y de cette série, puis compare σ_y et σ_x .

Exercice 9
Pour étudier l'effet de la caféine sur la fréquence cardiaque, on réalise l'expérience suivante.
12 personnes prennent une tasse de café décaféiné, puis 24 heures plus tard une tasse de café avec caféine. Elles ignorent si le café contient de la caféine ou non. La fréquence cardiaque, en nombre de battements par minute, est mesurée 2 heures après absorption du café.

On note x_i la fréquence cardiaque de la personne n°i après absorption du café décaféiné et y_i sa fréquence cardiaque après absorption du café normal. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Pers. N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	82	96	88	62	74	82	64	76	80	72	91	68
y_i	80	90	92	64	72	76	74	84	90	92	89	84

On pose $z_i = y_i - x_i$, on obtient une nouvelle série statistique Z.

1) Calcule la moyenne $\bar{z}$ et l'écart-type σ_z de la série statistique Z.

2) On pose $t = \frac{\bar{z}\sqrt{12}}{\sigma_z}$: lorsque t > 2,2, les tacticiens médicaux estiment que la caféine augmente de façon significative la fréquence cardiaque 2 heures après son absorption : Calcule t et conclus.

Exercice 10
Soit le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	…	…	…	x_{p-1}	x_p
Effectifs	n_1	n_2	…	…	…	n_{p-1}	n_p

On pose y = x + a. On obtient une nouvelle série Y.

On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries X et Y, σ_x et σ_y les écart-types respectifs des séries X et Y.

1) Montre que $\bar{y} = \bar{x} + a$.
2) Montre que $\sigma_y = \sigma_x$.

Exercice 11

Un industriel a commandé à un sous-traitant un lot de 40 pièces dont le diamètre doit mesurer 80 mm. Il est convenu que le lot ne sera accepté que si les deux conditions suivantes sont réalisées :

Condition 1 : l'écart entre 80 mm et la moyenne du lot est inférieur à 0,05 mm.

Condition 2 : au moins 60 % des pièces du lot ont un diamètre d tel que :

$$80 - 0{,}05 \leq d \leq 80 + 0\ 05$$

Les mesures faites sur le lot sont les suivantes :

Mesure de d	79,75	79,80	79,85	79,90	79,95	80	80,05	80,10	80,15	80,20
Effectif	1	2	3	5	6	14	5	2	1	1

1) Calcule la moyenne des mesures faites.
2) Quel est le pourcentage de pièces dont le diamètre d vérifie la condition 2 ?
3) Le lot sera-t-il accepté ou refusé par l'industriel ? Justifie ta réponse.

Caractère quantitatif continu

Exercice 12

On a relevé les tailles en cm de 40 élèves d'une classe de 2de:
161 – 152 - 159 -168 - 164 - 168 - 153 -146 - 155 - 155 – 163 - 160 - 155 - 160 -160 - 170 - 160 - 180 - 146 - 155 - 159 - 172 - 164 - 160 - 155 - 159 - 159 - 158 161 - 164 – 152 - 176 - 163 - 159 - 155 - 149 - 182 - 155 – 165 - 152.
1) Dans un tableau, regroupe les modalités par classes d'amplitude 5.
2) Détermine la ou les classes modales
3) Calcule la taille moyenne des élèves de cette classe.
4) Calcule l''ècart-type de cette série, puis interprète le résultat.

Exercice 13

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires dans une entreprise :

Salaires en milliers de Fcfa	[110 ;140[	[140 ; 170[	[170 ; 200[	[230 ; 260[	[2 60 ; 2 90[
Effectifs	45	34	12	8	1

1) Calcule les effectifs cumulés croissants.
2) Dans quelle classe se situe la médiane de cette série.
3) Calcule la moyenne de cette série statistique.
4) Représente graphiquement les effectifs cumulés croissants de cette série.
5) A l'aide du graphique obtenu, donne une valeur approchée de la médiane.
6) Calcule l'écart-type de cette série, puis interprète le résultat

Exercice 14

Un opérateur téléphonique a étudié la durée de communication d'un groupe d'abonnés dans une période donnée.

Les résultats de l'étude sont donnés dans le tableau qui suit.

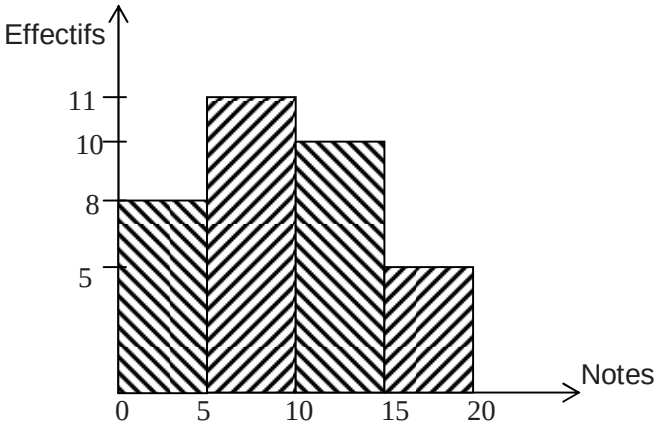
Durée en mn	[0,3[	[3,6[	[6,9[	[9,12[	[12,15[	[15;18[
Nombre de communications	20	25	15	13	9	8

1) Combien de communications ont duré moins de 6 minutes ?
2) Combien de communications ont duré au moins 12 minutes ?
3) Combien de communications ont duré au moins 9 minutes et moins de 15 minutes ?
4) Trace l'histogramme des effectifs cumulés croissants.
5) Trace l'histogramme des effectifs cumulés décroissants.
6) Calcule l'écart-type de cette série, puis interprète le résultat.

Exercice 15

On donne l'histogramme suivant :

Calcule l''ècart-type de cette série, puis interprète le résultat.



Exercice 16

On a mesuré les diamètres de 100 pièces cylindriques fabriquées par une machine dans un atelier.

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

Diamètres en mm	**[240;242[**	**[242;244[**	**[244;246[**	**[246;248[**	**[248;250[**	**[250;252[**	**[252;254[**	**[254;256[**
Effectifs	5	7	13	24	19	14	10	8

Calculer la moyenne $\overline{X}$

Calcule l'écart-type σ de cette série, puis interprète le résultat

La performance de la machine est jugée bonne si :

$\sigma < 0{,}4$ et 90% au moins de l'effectif est dans $[\overline{X} - 2\sigma ; \overline{X} + 2\sigma]$.

La performance est-elle bonne ?

Exercice 17

Un établissement de transfusion sanguine a établi le bilan de sa collecte de sang en un an.

Age du donneur	**Effectif**
Moins de 20 ans	40
De 20 ans à 29 ans	140
De 30 ans à 39 ans	240
De 40 ans à 49 ans	320
Plus de 50 ans	260

1) Détermine la population, le caractère étudié et sa nature.

2) Représente l'histogramme

3) Représente, dans une même figure, le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.

4) Détermine graphiquement la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.

Exercice 18

1) La capacité vitale est le volume d'air maximal pouvant être mobilisé en une seule inspiration.

Sur un échantillon de 17 personnes, on a mesuré la capacité vitale (en litres). Voici la liste des résultats : 4,15; 4,48; 5,24; 4,8; 4,95; 4,05; 4,3; 4,7; 5,51; 4,58; 4,12; 5,7; 4,85; 5,05; 4,65; 4,7; 4,28.

1) Détermine l'étendue et la moyenne de cette série (arrondir la moyenne au centilitre près).

2) En expliquant la méthode utilisée, détermine la médiane de cette série.

3) On décide de regrouper les valeurs de la série par classes.

Complète le tableau suivant :

Capacité vitale en litres	$[4;4,5[$	$[4,5;5[$	$[5;5,5[$	$[5,5;6[$
Effectifs				
Eff. cumulés croissants				

4) a) A l'aide de cette répartition par classes, détermine la moyenne des valeurs de la série.

b) On admet que dans chaque classe, la répartition est uniforme.

Trace alors le diagramme des effectifs cumulés croissants. Puis déduis-en, graphiquement, la médiane de ces valeurs.

5). Détermine le nombre de personnes de cet échantillon dont la capacité vitale est :

a). inférieure strictement à 5,5 litres.

b). au moins égale à 4,5 litres.

c). comprise entre 4 litres et 5,5 litres (tout en restant inférieure à 5,5 litres).

Caractère qualitatif

Exercice 19

Dans la population d'une localité, on s'intéresse à la nationalité des individus. Une étude donne les résultats suivants :

Nationalité	Sénégalaise (S)	Malienne (M)	Togolaise (T)	Béninoise (B)	Ivoirienne (I)
Nombre (en millier)	2, 8	4	37,5	11,2	4,5

1) Quelle est la nature du caractère étudié? Quelles sont les modalités de ce caractère?
2) Calcule la fréquence de chaque modalité.
3) Détermine le mode de cette série.
4) Construis le diagramme circulaire de cette série.
5) Construis le diagramme à bandes de cette série.

Exercice 20

Dans un cabinet médical, on a enregistré durant une année des consultations pour cause de maladie. Les résultats sont mentionnés dans le tableau suivant.

Type maladie	Paludisme	Respiratoire	Hypertension	Hypotension	diabète	Ulcères gastriques	Autres
Nombre de malades	942	130	601	302	130	59	336

1) Quel est le type de caractère étudié ? Donne l'effectif total de la population.
2) Construis le diagramme semi-circulaire de cette série.
3) Quel est le mode de cette série.
4) Donne la fréquence en pourcentage de chaque modalité.

Devoir (durée 2 heures)

Exercice 1 :
A l'issue d'un devoir de mathématiques, un professeur a attribué les notes suivantes :

12 – 7 – 7 – 16 – 9 – 17 – 5 – 8 – 11 – 15 – 5 – 11 -6 – 4 – 16 – 9 – 10 – 7 – 11 – 12 – 10 – 1 5 – 15 – 12.
1) Range toutes les notes dans l'ordre croissant puis déterminer la note médiane.
2) Recopie et complète le tableau suivant :

Notes	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$
Effectifs				

3) Construis l'histogramme des effectifs.

Exercice 2 :
Le tableau suivant donne la répartition des salaires des ouvriers dans une entreprise.

Salaires (en dizaines de milliers de francs)	4	5	7	10
Effectifs	6	4	3	2

1) Calcule le salaire moyen d'un ouvrier de cette entreprise.
2) Calcule la variance et l'écart-type de cette série statistique.
3) Recopie et complète le tableau suivant :

Salaires (en dizaines de milliers de francs)	4	5	7	10
Effectifs cumulés croissants				
Effectifs cumulés décroissants				

4) A partir du tableau, détermine le nombre d'ouvriers ayant :
   a) un salaire au moins égal à 50 000 F.
   b) un salaire au plus égal à 70 000 F.

Exercice 3 :
Au cours d'une journée, le gérant d'un télé-centre a noté la durée de communication (en secondes) pour chaque appel.
1). Recopier et compléter le tableau suivant :

Durées de communication (sec.)	$[30;50[$				
Effectifs	5	10	20	55	10
Effectifs cumulés croissants					

2) Construis le diagramme des effectifs cumulés croissants de cette série.
3) A l'aide du graphique, détermine :
a) Le nombre de communications dont la durée est au moins égale à 70 secondes.
b) Le nombre de communications dont la durée est comprise entre 50 secondes et 110 secondes.
c) La médiane de cette série.
4) Calcule la durée moyenne d'une communication.

SOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLEMES

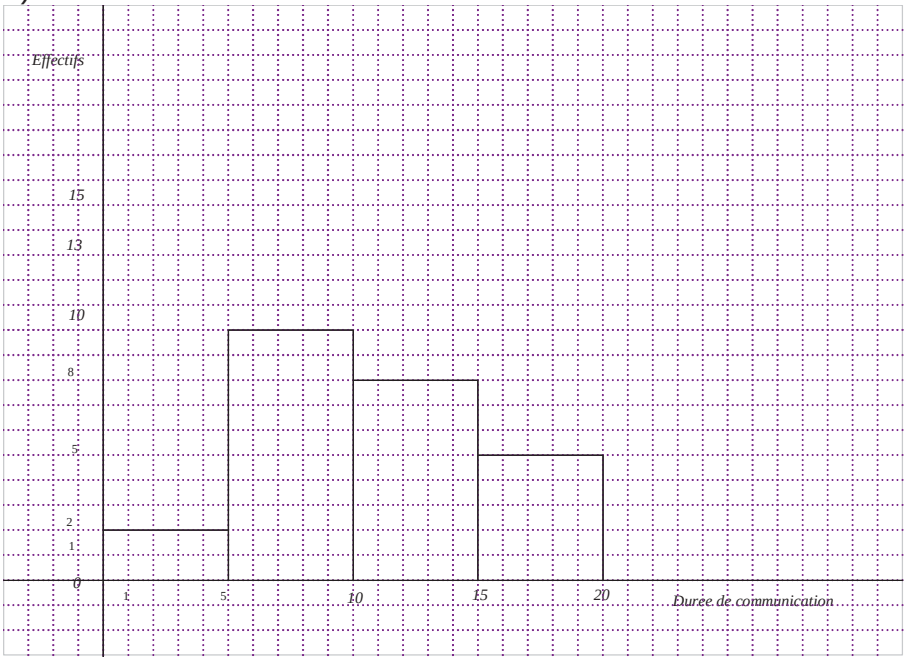
Devoir (durée 2 heures)

Exercice 1 :
1) Voici la liste des notes rangées dans l'ordre croissant :
1 – 4 – 5 – 5 – 5 – 6 – 7 – 7 – 7 – 8 – 9 – 9 – **10** – 10 – 11 – 11 – 11 – 12 – 12 – 12 – 15 – 15 16 – 16 – 17
La note médiane est telle qu'il y a autant de notes situées avant que de notes situées après.
Il s'agit de la 13ième note. La note médiane est donc égale à 10.

2)

Notes				
Effectifs	2	10	8	5

3)



Exercice 2 :

1) $\bar{x} = \dfrac{(4)(6)+(5)(4)+(7)(3)+(10)(2)}{15} = 5{,}67$

Le salaire moyen (en dizaines de milliers de francs) d'un ouvrier est égal à 56 700 F.

2) La variance est égale à :

$$V = \frac{(6)(4^2)+(4)(5^2)+(3)(7^2)+(2)(10^2)}{15} - (5{,}67)^2 = 4{,}05$$

L'écart-type est égal à :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{4.05} = 2{,}01$$

3) Recopions et complétons le tableau :

Salaires (en dizaines de milliers de francs)	4	5	7	10
Effectifs cumulés croissants	6	10	13	15
Effectifs cumulés décroissants	15	9	5	2

4) a) Le nombre d'ouvriers ayant un salaire au moins égal à 50 000 F est 9.

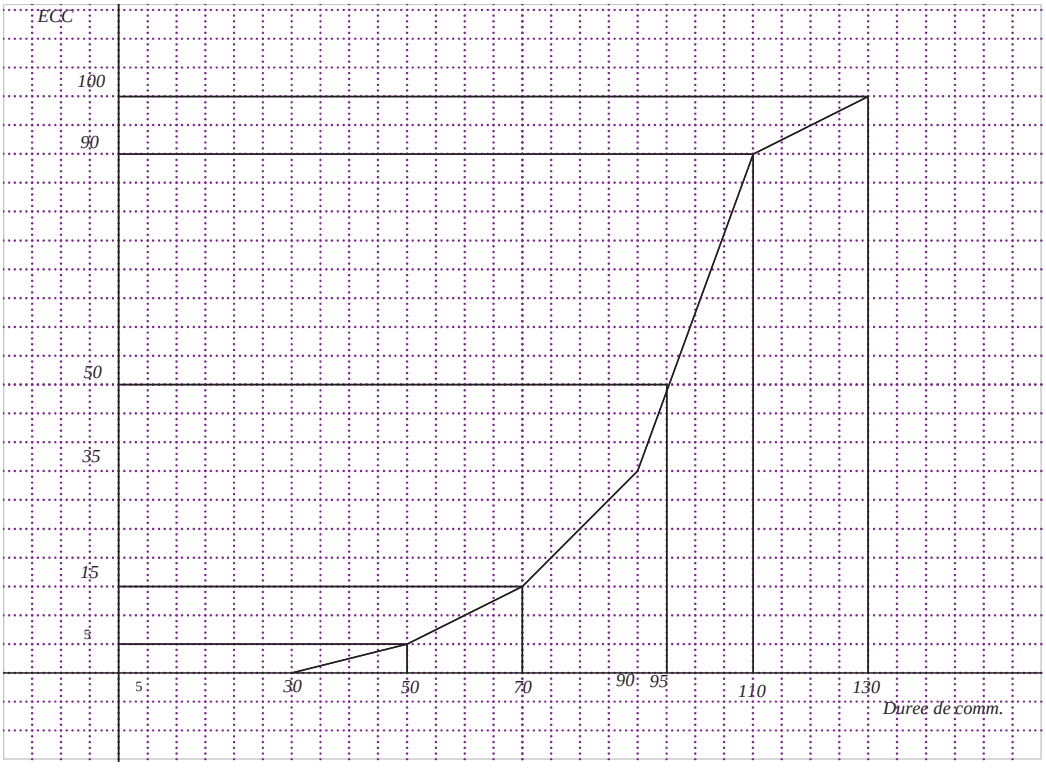
b) Le nombre d'ouvriers ayant un salaire au plus égal à 70 000 F est 13.

Exercice 3 :

1) Recopions et complétons le tableau :

Durées de communication (sec.)	[30 ; 50[	[50 ; 70[	[70 ; 90[	[90 ; 110[	[110 ; 130[
Effectifs	5	10	20	55	10
Effectifs cumulés croissants	5	15	35	90	100

2) Traçons le diagramme des effectifs cumulés croissants :



3) En lisant le graphique, on constate :

a) qu'il y a 100 – 15 = 85 communications dont la durée est au moins égale à 70 secondes.

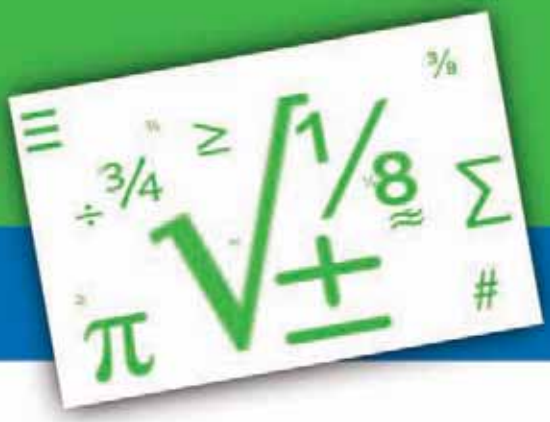
b) qu'il y a 90 – 5 = 85 communications dont la durée est comprise entre 50 secondes et 110 secondes.

c) que l'abscisse du point d'ordonnée 50 (c'est-à-dire 100 / 2) est 95. Donc la médiane est égale à 95.

4) La durée moyenne d'une communication est :

$$\bar{x} = \frac{(40)(5)+(60)(10)+(80)(20)+(100)(55)+(120)(10)}{100} = \frac{9100}{100} = 91.$$

.



USAID
FROM THE AMERICAN PEOPLE

Un Projet pour le Gouvernement du Sénégal
Financé par L'Initiative pour l'Éducation en Afrique AEI de l'USAID
Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage TLMP

CA Référence: RLA-A-00-09-00037-00

VENTE INTERDITE

$0.00
ISBN 978-0-9825955-7-2
90000>
9 780982 595572