UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□♦□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2023GS21NA0124
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1^er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude
(Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (04 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$Z_A = 1$, $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $Z_C = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $Z_D = 4$.

1. Soit f la similitude plane directe qui transforme A en C et D en B.
   a. Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de f. (0,5 pt)
   b. Déterminer l'image (C') du cercle (C) de centre A et de rayon 6 par f. (0,25 pt)
2. On considère la courbe $(\mathcal{E})$ d'équation : $x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 16$.
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (excentricité, axes, directrices, foyers, et sommets) de $(\mathcal{E})$. (0,75 pt)
   b. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathbb{T})$ à $(\mathcal{E})$ au point $E(2,3)$. (0,25 pt)
   c. Tracer soigneusement $(\mathcal{E})$ et $(\mathbb{T})$. (0,5 pt)
3. On considère la courbe (Γ) d'équation : $15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} - 768 = 0$.
   a. Montrer que (Γ) est l'image réciproque de $(\mathcal{E})$ par f. (0,75 pt)
   b. En déduire que (Γ) est une conique dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques (excentricité, axes, directrices, foyers, et sommets). (0,75 pt)
   c. Tracer soigneusement (Γ) sur la même figure que $(\mathcal{E})$. (0,25 pt)

EXERCICE 2 (05 points)

1. Une urne contient quinze (15) jetons indiscernables au toucher sur lesquels on a inscrit des entiers naturels en base 2, 5, 16 et 10.

   L'urne contient :

   - deux (02) jetons portant le nombre $a = \overline{1001}^{\,2}$,
   - quatre (04) jetons portant le nombre $b = \overline{431}^{\,5}$,
   - six (06) jetons portant le nombre $c = \overline{7E6}^{\,16}$,
   - trois (03)jetons portant le nombre $d = 2023$.

   a. Déterminer les écritures des nombres a, b et c dans la base décimale. (0,75 pt)
   b. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 de chacun des nombres inscrits sur les jetons. (01 pt)

2. On pose $S_n = 2^n + 4^n + 6^n$ où n est un entier naturel.
   a. Démontrer que $S_{6n} \equiv 3[7]$. (0,75 pt)
   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de S_{2023} par 7. (0,5 pt)

3. L'urne précédente est utilisée dans un jeu dont la règle est la suivante :

Le joueur tire un jeton, note le numéro et le remet dans l'urne avant de procéder à un second tirage. Pour chaque tirage, le joueur gagnera un nombre de points égal au reste, dans la division euclidienne par 7, du nombre inscrit sur le jeton.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de points obtenus par le joueur à l'issue des deux tirages.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. (01 pt)
   b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$. (0,5 pt)
   c. Calculer la probabilité d'avoir un gain qui dépasse l'espérance. (0,5 pt)

PROBLEME (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm.

PARTIE A (02,5 pts)

On considère la fonction f_m à variable réelle définie par : $f_m(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m+x}{m-x}\right)$ où m est un paramètre réel non nul. On note (C_m) la courbe représentative de f_m dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer le domaine de définition D_m de f_m. (0,25 pt)

2. a. Montrer que f_m est impaire. (0,25 pt)
   b. Calculer les limites de f_m aux bornes de D_m. (0,5 pt)
   c. Montrer que pour tout réel m non nul, on a : $\forall x \in D_m, f_{(-m)}(x) = -f_m(x)$. (0,25 pt)

3. On suppose dans cette question que m est un réel strictement positif.
   a. Etudier les variations de f_m. (0,5 pt)
   b. Montrer que f_m réalise une bijection de D_m sur un intervalle J à préciser. (0,25 pt)
   c. Soit $(f_m)^{-1}$ la bijection réciproque de f_m. Définir $(f_m)^{-1}$. (0,5 pt)

PARTIE B (02,25 points)

1. Dresser le tableau de variations de f_1. (0,25 pt)
2. Soit (T) la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0.
   Etudier la position de (C_1) par rapport à (T). (01 pt)
3. Construire dans le même repère (C_1) et (T). (0,5 pt)
4. On note $C_{(f_1)^{-1}}$ la courbe représentative de $(f_1)^{-1}$ dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   Par quelles transformations du plan obtient-on les courbes $C_{(-1)}$ et $C_{(f_1)^{-1}}$ à partir de (C_1) ? (*On ne demande pas de les construire*). (0,5 pt)

PARTIE C **(03,5 points)**

1. Soit Φ une primitive de $(f_1)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que $\Phi \circ f_1$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x f_1'(x)$ sur $]-1,1[$. (0,25 pt)
   b. Démontrer alors que pour tous réels a et b appartenant à l'intervalle $]-1,1[$, on a :
   $$\int_{f_1(a)}^{f_1(b)} (f_1)^{-1}(t)dt = \int_a^b t f_1'(t)dt.$$ (0,5 pt)
   c. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1,1[$, on a :
   $$\int_0^{f_1(x)} (f_1)^{-1}(t)dt = \int_0^x t f_1'(t)dt.$$ (0,25 pt)
2. Soit x un élément de $]-1,1[$.
   a. Démontrer que $\int_0^x t f_1'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$. (0,5 pt)
   b. En déduire que pour tout élément y de $\mathbb{R}$, $\int_0^y (f_1)^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$. (0,5 pt)
   c. Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_{(f_1)^{-1}})$ de $(f_1)^{-1}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses. (0,5pt)
3. Soit x un réel et A le point de $(C_{(f_1)^{-1}})$ d'abscisse $\ln\sqrt{2}$.
   a. Montrer qu' on a : $\left((f_1)^{-1}(x)\right)' = 1 - \left((f_1)^{-1}(x)\right)^2$. (0,5 pt)
   b. En déduire le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{OA}$ de $\left(C_{(f_1)^{-1}}\right)$ autour de l'axe des abscisses. (0,5 pt)

PARTIE D **(02,75 points)**

Soit x un nombre réel.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $F_n(x) = \int_0^x \left(f_1^{-1}(t)\right)^n dt$.

1. **a.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \le F_n(x) \le x\left((f_1)^{-1}(x)\right)^n$. (0,5 pt)
   b. En déduire, pour tout réel positif x fixé, la limite de $F_n(x)$. (0,5 pt)
2. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1}\left(f_1^{-1}(x)\right)^{n+1}$. (0,5 pt)
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p-1}\right)\left(f_1^{-1}(x)\right)^{2p-1}$. (0,5 pt)
3. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,,1[$ et pour tout entier naturel non nul,
   $$x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} = f_1(x) - F_{2n}(f_1(x)).$$ (0,5 pt)
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 3^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 3^{2n-1}}\right)$. (0,25 pt)