SERIE D'EXERCICES FONCTIONS NUMÉRIQUES(Bis)

☞ Exercice 1 :

1. Donner la définition d'une primitve d'une fonction f donnée et la condition d'existence d'une primitive.
2. Dans chacun des cas suivants, montre que F une primitive de f.
   - **a.** $F(x) = 6x^8 - 8x^4 + 3x - 2\,; f(x) = 48x^7 - 32x^3 + 3$.
   - **b.** $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1\,;$ $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
   - **c.** $F(x) = (x^2 + x - 1)^2(x^3 - x^2 + 1)^3\,;$ $f(x) = (x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 1)[4x + 2 + (9x^2 - 6x)(x^3 - x^2 + 1)]$.
   - **d.** $F(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}\,; f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2}$.
   - **e.** $F(x) = \dfrac{x^5+1}{x^5-1}\,; f(x) = -\dfrac{10x^4}{(1+x)^3}$.
   - **f.** $F(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\,;\ f(x) = -\dfrac{4(1-x)}{(1+x)^3}$.
   - **g.** $F(x) = x\cos(x) + 56\,;\ f(x) = \cos(x) - x\sin(x)\,;$
   - **h.** $F(x) = \tan(x) - x\,;\ f(x) = \tan^2(x)$.

☞ Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3x^2 + 5x$	b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
c. $f(x) = 4\sqrt{x}$	d. $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$
e. $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$	f. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
g. $f(x) = x\sqrt{x}$	h. $f(x) = \cos(x)\sin^5(x)$.
i. $f(x) = (x+2)^5$	j. $f(x) = (2x+3)(x^2+3x)^4$.
k. $f(x) = x^3(x^4+1)^2$	l. $f(x) = x + \sqrt{x} - (-\dfrac{2}{x^3})$

☞ Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants trouver la primitive de f qui prend la valeur y_0 au point x_0.

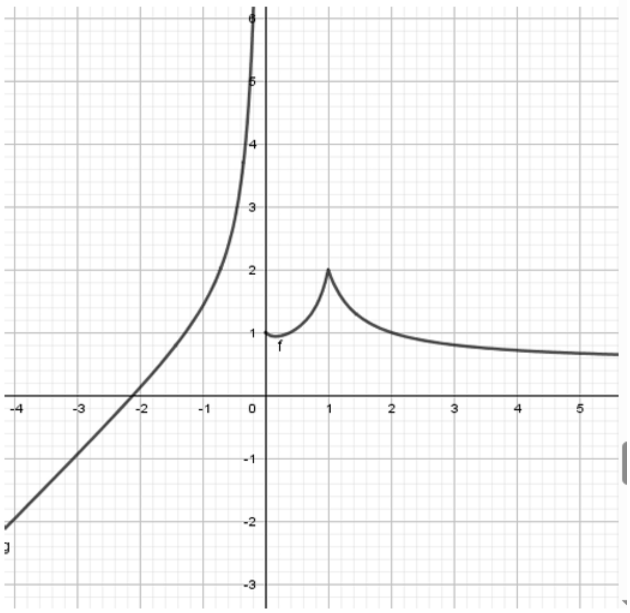
1. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x - 7\,;\ x_0 = \dfrac{1}{4},\ y_0 = \dfrac{1}{8}$.
2. $f(x) = x^2 - x + 1\,;\ x_0 = 1,\ y_0 = 2$.
3. $f(x) = 3x^2 + x - 2\ x_0 = 1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 0$.
4. $f(x) = (x+2)^5\,;\ x_0 = -1,\ y_0 = 4$.
5. $f(x) = \cos(x) + \sin(x)\,;\ x_0 = \dfrac{\pi}{3},\ y_0 = 0$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} + \cos(x)\,;\ x_0 = \dfrac{\pi}{4},\ y_0 = 0$.

☞ Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivants montrer que f peut se mettre sous une forme remarquable en utilisant les fonctions u et v indiquées puis en déduire une primitive de f.

1. $f(x) = \sin(x) + x\cos(x)\,;\ u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}\,;\ u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$.
3. $f(x) = \cos(3x - 7)\,;\ u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = 3x - 7$.
4. $f(x) = (2x+1)\sin(x^2 + x + 4)\,;\ u(x) = x^2 + x + 4$, $v(x) = \sin(x)$.
5. $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}\,;\ u(x) = x,\ v(x) = \sin(x)$.

☞ Exercice 5 :



Soit f une fonction numérique dont la courbe représentative est ci-dessus.
Déterminer :

1. L'ensemble de définition de f noté $\mathcal{D}_f$.
2. L'ensemble de dérivabilité de f noté $\mathcal{D}'_f$.
3. Les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
4. Les asymptotes si possibles.
5. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}\,;\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}\,;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)\,;$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\dfrac{1}{x})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x^2 + 3x + 1)$.

☞ Exercice 6 :(Série de M. Diallo)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; \dfrac{3}{2}]$ par :
$f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$
Soit F la fonction définie sur $]-\infty; \dfrac{3}{2}]$ par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$.

1. $\forall x \in]-\infty; \dfrac{3}{2}]$, calculer $F'(x)$.
2. Trouver trois nombres réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive de f sur $]-\infty; \dfrac{3}{2}]$.

☞ Exercice 7 :(Série de M. Diallo)

1. Soit la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+2} - x$.
   - **a.** Étudier les variations de f,puis dresser son tableau de variation.

b. Montrer que l' équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1;3]$.

2. Soit g la fonction définie par :$g(x) = \sqrt{x+2}$.

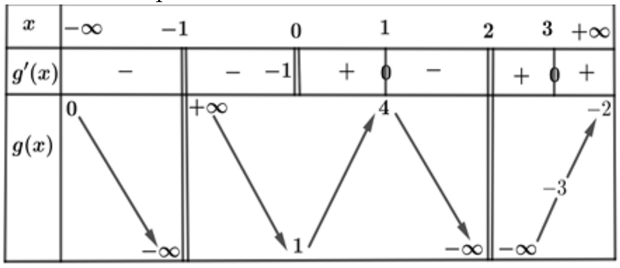
a. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet β comme solution unique.

b. Montrer que $x \in [1;3]$,ona : $\dfrac{\sqrt{5}}{10} \leq g'(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

c. En déduire que sur $[1;x]$,avec $x \leq 3$,ona :
$$\frac{\sqrt{5}}{10}(x-1) + \sqrt{3} \leq \sqrt{x+2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6}(x-1) + \sqrt{3}.$$

☞ **Exercice 8** :(**Série de M. Diallo**)

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par le tableau de variation ci-aprés



1. Déterminer le domaine de définition de g.

2. Déterminer le domaine de définition de g' dérivée de g.

3. En déduire les limites aux bornes de son ensemble de définition.

4. En déduire les coordonnées du point d'inflexion I que le tableau permet de trouver.

5. Déterminer les équations des tangentes et demi-tangentes à la courbe de g que le tableau de variation ci-dessus permet de trouver.

6. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de g que le tableau permet de trouver.

7. Tracer la courbe $\mathcal{C}$,les asymptotes et les tangentes dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☞ **Exercice 9** :

Un élève commercialise des jus de citron d'un même type trés prisées par les consommateurs. Il peut en produire entre 0 et 300 par jour dans sa petite entreprise familiale. Cette production est vendue dans sa totalité. Lorsque x représente le nombre en cen taines de bouteilles de jus produites, on note B(x), le bénéfice réalisé par l'élève pour la vente des x centaines de bouteilles de jus. D'aprés les données précédentes, l'élève sait que :

- pour tout x de l'intervalle $[1;3]$, on a : $B'(x) = -20x+30$, où $B(x)$ est exprimé en milliers de francs et B' la fonction dérivée de B.
- Pour une centaine de bouteilles de jus vendue, son bénéfice est 20 mille francs.

Il te sollicite pour l'aider à déterminer son bénéfice maximal.

Détermine son bénéfice maximal.

☞ **Exercice 10** :(**Série de M. Diallo**)

Un artisant produit des articles. Un technicien du Ministère de l'artisanat, après une étude de son activité, a estimé que si tous les articles produits sont vendus,le bénéfice moyen,en milliers de francs,des x articles est estimé par la fonction suivante : $f(x) = 4000x + \dfrac{400000}{x}$, $x \geq 1$.

Voulant connaitre l'évolution de son activité, il soumet le résultat de l'étude à son fils éléve en Terminale que vous êtes.

1. Détermine le bénéfice que l'artisan fera pour 100 articles, pour 1000 articles vendus.

2. Dis comment évoluera le bénéfice. Justifie ta réponse.

☞ **Exercice 11** :(**Série de M. Diallo**)

☞ **Partie A**

Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x - 2\sqrt{|x^2-1|} & si \quad x \geq 0 \\ \dfrac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ est exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.

2. Calculer les limites f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

3. Étudier la continuité de f en 0.

4. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$; $x = -2$ et $x = 1$. Interpréter graphiquement les résultats.

5. Donner la nature des branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. a. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique en $-\infty$ sur $]-\infty;-2]$.

b. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique en $+\infty$ sur $[1;+\infty[$.

☞ **Partie B**

1. Calculer la dérivée de f dans les intervalles où f est dérivable.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Montrer que $1,1 < \alpha < 1,2$.

☞ **Partie C**

1. Montrer que g est une bijection sur $]1;+\infty[$ vers J un intervalle à déterminer.

2. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. g^{-1} est-elle dérivable sur J ?

3. Calculer $g(2)$, $g\left(2-2\sqrt{3}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(2-2\sqrt{3}\right)$.

4. Expliciter l'expression de $g^{-1}(x)$.

5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $\left(\mathcal{C}_{g^{-1}}\right)$ dans un même repère orthonormé.

"La science nourrit le coeur."1.19