Mathématiques
TS2,TS2A ,TS4 ,TS5

S.TOUBA GUEYE ,Professeur de Mathématiques

EDITION 2021

DEDICACE

A M. TAIB SOUGOU, Professeur de mathématiques et formateur

A M. VIEUX MASS GUEYE, Professeur de mathématiques

A. Dr DJIBRIL SARR, Professeur de sciences physiques et formateur

Ces éminents professeurs compétents, sérieux, qui de par leur don inné, leur riche expérience, leur bon sens, leur sapience et leur dévouement indéfectible pour l'enseignement m'ont beaucoup appris. ,Ces éducateurs m'ont forgé , accompagné et fait aimé ce métier noble ,cet écrit leur doit beaucoup

Les classes de Terminales S2 et S4 sont des classes à vocation scientifique tournée vers les sciences expérimentales. En conséquence l'analyse et la gestion de données y prennent une place prépondérante et le savoir faire est privilégié sur les savoir théoriques.

Le but de cet ouvrage est de permettre à l'élève de TS2 , TS2A ,TS4 ou TS5 d'avoir un instrument de travail efficace, qui va l'aider durant toute l'année afin de mieux maitriser et comprendre tous les chapitres du programme .Ayant constaté qu'il n'existe pratiquement pas , du moins à ma connaissance ,de manuelles de mathématiques conformes au programme sénégalais en classe de TS2 qui traitent de manière entière tous les chapitres au programme .De ce fait j'ai jugé nécessaire de fournir aux élèves un document qui va traiter toutes les leçons de manière claire avec des exercices d'applications corrigés , bien détaillés et expliqués afin de mettre en place le savoir-faire .

Ce document permettra aussi aux collègues, ces soldats du savoir dévoués pour cette cause noble de gagner du temps pour la préparation de leurs cours et la réalisation de certaines tâches.

En espérant que ce travail vous plaira, vous aidera, j'attends de votre part toute suggestion que vous pourriez me formuler et je prie à toute personne qui aurait constaté une erreur qui se serait glissée de bien vouloir me la signaler

S. TOUBA GUEYE

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : FONCTIONS NUMERIQUES

OBJECTIFS

- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour rechercher une valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue.
- Justifier l'existence de la continuité et la monotonie d'une fonction réciproque.
- Représenter la fonction réciproque d'une fonction bijective donnée à partir de la représentation de cette dernière.
- Calculer la limite d'une fonction composée gof $en\, un\, point\, a\, lorsque\, f\, admet$ une limite b en a et lorsque g est continue en b.
- Justifier la continuité de la composée de deux fonctions continues.
- Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée d'une fonction composée
- Connaitre les notations $f', f'' \dots . f^{(n)}$
- Calculer les dérivées successives
- Savoir utiliser le théorème l'inégalité des accroissements finies
- Connaitre les primitives des fonctions usuelles
- Déterminer les primitives des fonctions usuelles du type $(u'ov).v'$; $u^n u'v$; $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site Sundar(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. Compléments sur les limites et continuité

1. Limite finie en 0

Exemple : Calculer les limites suivantes

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Solution

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=FI$$

Levons l'indétermination

Posons $f(x)=\sin x$; $f(0)=0$

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ $donc\ derivable$ en 0 donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$$

D'où $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}=FI$$

Levons l'indétermination

Posons $g(x)=1-\cos x$; $g(0)=0$

g étant dérivable en 0 et $g'(x)=\sin x$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=\sin 0=0}$$

D'où $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}=0$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}=FI$

Levons l'indétermination

➢ Première méthode

On a $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{x^2}{x}}$

Posons $f(x)=1-\cos x$ $et\ g(x)=x^2$

$$f(0)=0\ et\ g(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{x^2}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$$

Comme $f\ et\ g$ sont dérivables en 0 donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

- Deuxième méthode

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}$$

D'où $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

2. Enoncé usuel sur les limites

a. Théorème de comparaison

- Théorème 1 :Soient $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}, f\ et\ g$ deux fonctions admettant une limite finie
- Si $f(x)\leq g(x)$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq g(x)$
- Théorème 2 :Soient $f\ et\ g\ deux\ fonctions\ et\ x_0\in\overline{\mathbb{R}}$
- Si $f(x)\leq g(x)\ et\ \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty\ alors\ \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
- Si $f(x)\leq g(x)\ et\ \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ alors\ \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$
- Théorème 3 (Théorème des gendarmes) :$Soient\ x_0,l\in\overline{\mathbb{R}}\ f\ ,g\ et\ h\ 3\ fonctions\ telles\ que$:
$$h(x)\leq f(x)\leq g(x)$$
- $Si\ \lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=l\ \ alors\ \lim_{x\to x_0} f(x)=l$

❖ **Conséquence du théorème des gendarmes**

Soient $x_0\in\overline{\mathbb{R}}\ ,\alpha\in\mathbb{R}, f\ et\ g\ deux\ fonctions$.

- $Si\ |f(x)-\alpha|\leq g(x)\ et\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0\ alors\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$

<u>Exemple</u> :

1) $f(x)=-x^2+\cos x. Montrer\ que\ si\ x>0\ ,on\ a\ f(x)\leq -x^2+1. En\ deduire\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$
2) Soit $k(x)=\frac{x+\cos x}{2x+1}$ Montrer que si $>\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} k(x)=\frac{1}{2}$
3) Soit $h(x)=(x-3)\sin\frac{1}{x-3}$ Montrer que $|h(x)|\leq|x-3|$.En déduire $\lim_{x\to 3} h(x)$

<u>**Solution**</u>

1) Soit $f(x)=-x^2+cosx$

Montrons que $f(x)\leq -x^2+1$

Soit $x>0$ $\quad on\ a:\ -1\leq cosx\ \leq 1$

$$-x^2-1\leq -x^2+\cos x\leq -x^2+1$$

$$-x^2-1\leq f(x)\leq -x^2+1$$

D'où $f(x) \leq -x^2 + 1$

Déduisons en $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

On a : $\boldsymbol{f(x) \leq -x^2 + 1 \; et \; \lim_{x \to +\infty} -x^2 + 1 = -\infty \; alors \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) $k(x) = \frac{x + \cos x}{2x+1}$

Montrons que si $x > \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to +\infty} k(x) = \frac{1}{2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, on\ a:$ $\quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$x - 1 \leq x + cosx \leq x + 1$$

$$\forall x > \frac{1}{2} \quad on\ a : \frac{x-1}{2x+1} \leq \frac{x + \cos x}{2x+1} \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq k(x) \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

$\boldsymbol{Or \; \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim_{x \to +} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}}$ **alors d'après le théorème des gendarmes** $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} k(x) = \frac{1}{2}}$

3) $h(x) = (x - 3) \sin \frac{1}{x-3}$

Montrons que $|h(x)| \leq |x - 3|$

$\forall x \neq 3; \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R}, on\ a :$ $\quad -1 \leq \sin \frac{1}{x-3} \leq 1$

$$\left|\sin \frac{1}{x-3}\right| \leq 1$$

$Or\ si\ x \neq 3\,,$ $\quad |x - 3| > 0$ $\quad donc\ |x - 3| \times \left|\sin \frac{1}{x-3}\right| \leq |x - 3|$

On aura : $\quad \left|(x - 3) \sin \frac{1}{x-3}\right| \leq |x - 3|$

D'où $|h(x)| \leq |x - 3|$

Déduisons en $\lim_{x \to 3} h(x)$

On a : $\boldsymbol{|h(x)| \leq |x - 3| \; et \; \lim_{x \to 3} |x - 3| = 0 \; alors \; \lim_{x \to 3} h(x) = 0}$

b. Limite d'une fonction composée

Théorème 4 : Soient a , b et c ∈ $\overline{\mathbb{R}}$ $f\ et\ g$ deux fonctions .

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = b\ et\ \lim_{x \to b} g(x) = c\ alors\ \lim_{x \to a} gof(x) = c$

<u>Exemple :</u>

Soit la fonction m telle que $m(x) = x\ sin \frac{1}{x}$ Calculer $\lim_{x \to +\infty} m(x)$

<u>Solution :</u>

<u>Première méthode :</u>

$\forall\, x \neq 0, on\ a\ m(x) = xsin\ \frac{1}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ $\ et\ g(x) = \frac{\sin x}{x}$ donc $m(x) = gof(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\ et\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

D'où $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} gof(x) = \lim_{x\to+\infty} m(x) = 1}$

Deuxième méthode :

On a $m(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Posons $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. Si $x \longrightarrow +\infty\ alors\ X \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

D'où $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} m(x) = 1}$

Exercice d'application :

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + \boldsymbol{sin}\left(\frac{\mathbf{1}}{x}\right)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x+1}$

$\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to 0} x\,E(\frac{1}{x})$ $\qquad \boldsymbol{d})\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \boldsymbol{cos}(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}})$

$\boldsymbol{e})\ \mathbf{lim}_{\boldsymbol{x}\to} \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{sin}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}$, $\qquad \boldsymbol{f})\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tanx-1}{2sinx-\sqrt{2}}$ $g)$

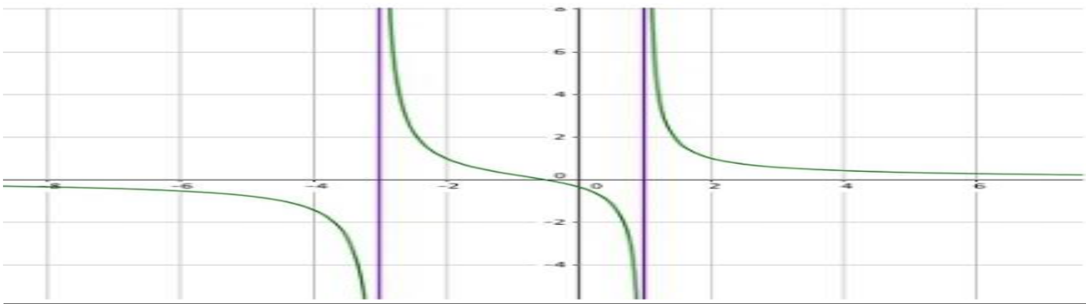
$g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad ;\ g)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^5+x^4+x^3-3}{x^{12}+x^{10}-2}$

3. Interprétation graphique

a. Asymptotes verticales et horizontales

Soit f une fonction définie sur $]-\infty; a[\ \cup\ ]a; +\infty[$,$\mathcal{C}_f$ sa courbe , a et b des réels.

- $Si\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty\ ou\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\ alors\ la\ droite\ x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$
- $Si\ \lim_{x\to\infty} f(x) = b\ \ alors\ la\ droite\ y = b$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$



$La\ droite\ y=0\ est\ asymptote\ horizontale\ en-\infty\ et+\infty\ .$
$Les\ droites\ x=-3\ et\ x=1\ sont\ asymptotes\ verticales\ en-\infty\ et+\infty$

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x)=\frac{2}{x-1}$

Déterminer le domaine de définition, calculer les limites aux bornes puis préciser les asymptotes

<u>Solution</u> :

$$f\ existe\ ssi\ x-1\neq 0$$

$$x\neq 1$$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f\ en-\infty\ et+\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x-1}=\frac{2}{0}=\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty\ \ et\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$

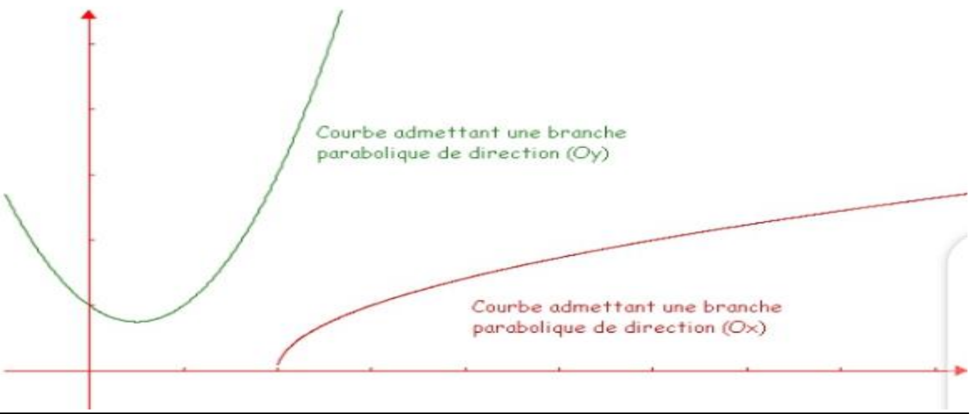
La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f\ en-\infty\ et+\infty$

b. Branches infinies

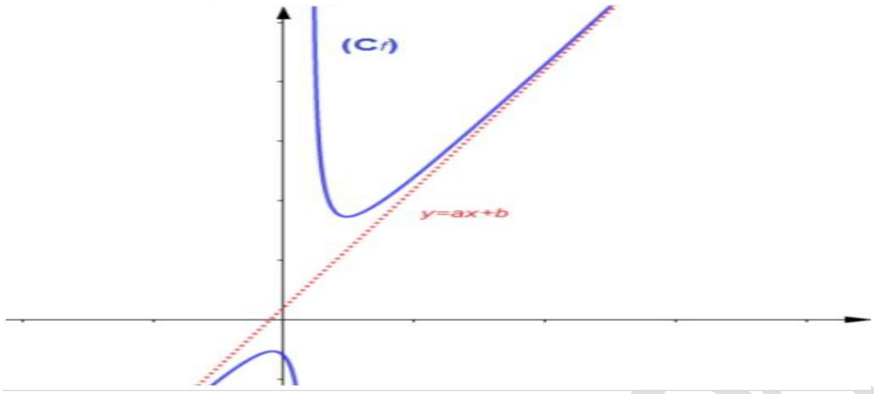
Soit f une fonction ,$\mathcal{C}_f$ sa courbe , a et b des réels.

$Si\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\ alors\ on\ doit\ faire\ une\ recherche\ de\ branches\ en\ calculant\ \lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}.$

- $Si\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0\ alors\ \mathcal{C}_f\ \ admet\ une\ branche\ barabolique\ de\ direction\ (ox)$
- $Si\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\ alors\ \mathcal{C}_f\ \ admet\ une\ branche\ barabolique\ de\ direction\ (oy)$



- $Si \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ $alors\ on\ cacule$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$
  - ✓ $Si \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$



  - ✓ $Si \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = ax$

<u>Organigramme de recherche de branches infinies</u>

$Si \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

↓

On calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ → $(\mathcal{C}_f)$ Admet une BP de direction (ox)
- Si $\lim\limits_{x\to} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ → On calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ → La droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$
  - Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ → $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = ax$
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ → $(\mathcal{C}_f)$ admet une BP de direction (oy)

Exemple :

Dans chacun des cas suivants , étudier la branche infinie en $+\infty$

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$
2) $f(x) = \sqrt{x+1}$
3) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}$
4) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solution :

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (oy) $en + \infty$

2)$f(x) = \sqrt{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 \times 0 = 0$

$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (ox) $en + \infty$

3) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+2x-1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-1}{x+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-1-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

La droite $y \ = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ $en + \infty$

4)$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f\ en+\infty$

Remarque :

$Pour\ montrer\ que\ la\ droite\ d'équation\ y=ax+b\ est\ asymptote\ oblique$ à $\mathcal{C}_f, on\ peut$

montrer que $\lim_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)=0$

c. Position relative d’une courbe par rapport à une droite

Pour étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à une droite $(\Delta): y=ax+b$, on peut étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$

- Si $f(x)-(ax+b)>0\ alors\ (\mathcal{C}_f)\ est\ au\ dessus\ de\ (\Delta)$
- Si $f(x)-(ax+b)<0\ alors\ (\mathcal{C}_f)\ est\ en\ \ dessous\ de\ (\Delta)$

Exemple :

$$Soit\ f(x)=2\sqrt{x^2-1}-x$$

1) Montrer que la droite $(\Delta): y=-3x\ est\ assymptote\ oblique$ à $(\mathcal{C}_f)\ en-\infty$
2) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)\ par\ rapport$ à (Δ)

Solution

1) Montrons que la droite $(\Delta): y=-3x\ est\ asymptote\ oblique$ à $(\mathcal{C}_f)\ en-\infty$

$$D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+3x=\lim_{x\to-\infty}2\sqrt{x^2-1}-x+3x=\lim_{x\to-\infty}2\sqrt{x^2-1}+2x$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4(x^2-1)-4x^2}{2\sqrt{x^2-1}-2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{2\sqrt{x^2-1}-2x}=0$$

Donc la droite$(\Delta): y=-3x\ est\ assymptote\ oblique$ à $(\mathcal{C}_f)\ en-\infty$

2) Etudions la position relative de $(\mathcal{C}_f)\ par\ rapport$ à (Δ)

$$f(x)+3x=2\sqrt{x^2-1}+2x$$

Résolvons $dans\ D_f\ \ l'inéquation\ 2\sqrt{x^2-1}+2x<0$

On a : $2\sqrt{x^2-1}+2x<0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}<-x$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.co

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x^2-1 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ -1 < 0 \; tjrs \; vrai \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
x^2-1	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ | $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$-x$	$+$ $\quad$ | $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ | $\quad$ $-$

$$S =]-\infty; -1]$$

$Si\ x \in \ ]-\infty; -1], f(x) + 3x < 0\ donc\ (\mathcal{C}_f)\ est\ en\ dessous\ de\ (\Delta)$

$Si\ x \in]1; +\infty[\ , f(x) + 3x > 0\ donc\ (\mathcal{C}_f)\ est\ au\ dessus\ de\ (\Delta)$

4. Continuité

a. Prolongement par continuité

Soient $I\ un\ intervalle\ , a \in \mathbb{R}\ tel\ que\ a \notin \ D_f\ ; D_f\ = I$

- Si $f\ est\ definie\ sur\ I\ et\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}\ alors\ f$ est prolongeable par continuité
  La fonction de prolongement de f en a est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\ \ si\ x\ \in I\ (a \notin I) \\ \qquad l\ si\ x = a \end{cases}$$

Exemple :

$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}\ \ f\ est\ elle\ prolongeable$?

Solution :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} = \lim_{x \to -2} x+1 = 3$$

Donc f est prolongeable par continuité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+2} & si\ x \neq -2 \\ 3 & si\ x = -2 \end{cases}$$

Théorème 1 : Soient f et g deux fonctions numériques

- $Si\ g\ est\ continue\ en\ x_0 (respectivement\ en\ I\ ) et\ f\ continue\ en\ g(x_0)\ (respectivement$
  $sur\ g(I)\ alors\ fog\ est\ continue\ en\ x_0 (respectivement\ sur\ I)$

Exemple :

Soit la fonction f telle que $f(x)$=$\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{x-1}}$

1) Décomposer f en deux fonctions
2) En déduire que f est continue en 2

Solution :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x+1}{x-1}}$$

1) Posons $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$ d'où $f(x) = goh(x)$
2) Déduisons en que f est continue en 2

$$h(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$$

$h\ etant\ une\ fonction\ rationnelle\ donc\ definie\ sur\ D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}\ , or\ 2 \in D_h\ donc\ h$ est continue en 2.

$$g(x) = \sqrt{x}$$

g étant une fonction irrationnelle donc continue sur $D_g = [0; +\infty[$

$h(2) = 11 \in D_g\ donc\ g\ est\ continue\ en\ h(2) = 11\ d'où\ goh = f\ est\ continue\ en\ 2$

b. Théorèmes généraux sur la continuité

Théorème 1 : Soient I un intervalle et f une fonction continue sur I donc $f(I)$ est un intervalle

Théorème 2 :Soient I un intervalle fermé borné .Si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle fermé et borné.

Autrement dit , si f est continue sur $[a, b]\ alors\ f([a; b]) = [m; M]$ avec a , b , $m\ et\ M$ des réels.

Conséquence 1 :(Théorème des valeurs intermédiaires TVI)

- Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné prend toutes les valeurs comprises entre les bornes
- Si f est une fonction continue et monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I alors $\forall\ k \in f(I)\ l'equation\ f(x) = k\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ sur\ I$
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors $\forall\ k \in f(I)\ l'équation\ f(x) = k\ admet\ une\ unique\ solution\ sur\ I$

Conséquence 2 :(théorème de Cauchy)

- Si f est continue sur $[a\,; b]\ et\ de\ plus\ f(a) \times f(b) < 0\ alors\ il\ existe\ au\ moins\ un\ x_0 \in]a; b[\ tel\ que\ f(x_0) = 0$
- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,; b]\ et\ de\ plus\ f(a) \times f(b) < 0\ alors\ il\ existe\ un\ unique\ reel\ \alpha\ tel\ que\ f(\alpha) = 0$

Exemple 1 :

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{x+1}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0; 2[$

Solution :

f étant une fonction rationnelle donc continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $en\ particulier\ sur$ $[0; 2]$

$De\ plus\ f(0) \times f(2) = -3 \times \frac{5}{3} = -5 < 0\ alors\ \ d'apres\ le\ TVI\ l'equation\ f(x) = 0\ admet$ au moins une solution sur $]0,2[$

<u>Exemple 2</u> :

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

<u>Solution</u>

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}\ \ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f\ etant\ une\ fonction\ polynome\ donc\ derivable\ sur\ \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^4 + 1 > 0\ d'où\ f\ est\ strictement\ croissante$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

$f\ est\ continue\ et\ strictement\ \ croissante\ sur\ \mathbb{R}, de\ plus\ 0\ \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

c. Détermination d'une valeur approchée d'un zéro d'une équation

<u>Méthode balayage</u>

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x) = x^5 + x + 1$

Trouver une valeur approchée de α solution de l'équation $f(x) = 0$ à $10^{-1} prés$

<u>Solution</u>

$$f\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}\ donc\ il\ existe\ un\ unique\ \alpha \in \mathbb{R}\ \ tel\ que\ f(\alpha) = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{32} \qquad ; f(-1) = -1$$

$$Comme\ f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(-1) < 0\ donc\ \alpha \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$$

x	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$
$f(x)$	$-0{,}49$	$-0{,}12$	$0; 13$	$0{,}32$

D'après le tableau ,$\alpha \in]-0{,}8; -0{,}7[$

$-0{,}8$ *est une valeur approvhée par defaut* à 10^{-1}*de* α

Méthode dichotomie

- On partage l'intervalle $[a;b]$ en deux sous intervalles en introduisant $\frac{a+b}{2}$.Le calcul de $\frac{f(a)+b}{2}$ permet de dire si $\alpha \in \left]a;\frac{a+b}{2}\right[$ *ou si* $\alpha \in \left]\frac{a+b}{2}\ ;b\right[$
- On recommence l'opération précèdent en effectuant à chaque étape le partage du dernier intervalle d'encadrement en deux sous –intervalles

Exemple :

Soit $f(x) = x^5 + x + 1$

Trouver une valeur approchée de α solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-1}*prés*

Solution :

$$f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R} \text{ et de plus } f(0) \times f(-1) = 1 \times (-1) = -1 < 0 \text{ don l'unique } \alpha \in]-1;0[$$

Soit $c_1 = \frac{-1+0}{2} = -0{,}5$; $f(c_1) = f(-0{,}5) = 0{,}47$

On a encore $f(-1) \times f(c_1) < 0$ *donc* $\alpha \in]-1;-0.{,}5[$

Soit $c_2 = \frac{-1-0{,}5}{2} = -0{,}75$ $f(c_2) = f(-0{,}75) = 0{,}01$

On a encore $f(-1) \times f(c_2) = -1 \times (0{,}01) = -0{,}01 < 0$ *donc* $\alpha \in]-1;-0;75[$

Soit $c_3 = \frac{-1-0{,}75}{2} = -0{,}875$; $f(c_3) = f(-0{,}875) \cong -0{,}3$

De même $f(0{,}75) \times f(c_3) < 0$ *donc* $\alpha \in]-0;875;-0{,}75[$

à 10^{-1}*pres* $\alpha \in]-0;8;-0{,}7[$

$-0{,}8$ *est une valeur approvhée par defaut* à 10^{-1} *prés de* α

5. Fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone de I vers J alors :

Propriété 1 :

- f *realise une bijection reciproque*
- La bijection réciproque notée f^{-1} est continue sur $f(I)$
- f^{-1} *est strictement monotone et a le meme sens de variation que* f

Propriété 2 :

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $b \in \overline{\mathbb{R}}$. f *est continue et strictement monotone sur* I , *on a* :

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

	$f(I)$	
$Intervalle\ I$	f $strictement\ croissante$	f $sctrictement\ decroissante$
$[a;b]$	$[f(a)\,;f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f;f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f;f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{a^+} f\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f;\lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f;\lim\limits_{a^+} f\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f;f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f\,;\lim\limits_{+\infty} f\right[$	$\left]\lim\limits_{+\infty} f;\lim\limits_{a^+} f\right[$

II. Dérivation

1. Dérivées successives

On appelle dérivée seconde notée $f''\ ou\ f^{(2)}$ la fonction dérivée de f'.

On appelle dérivée troisième notée $f'''ou\ f^{(3)}$ la fonction dérivée de f'' et par intuition $f^{(n)}$ est la dérivée nième de f .

Exemple :

$$f(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$$

1) Déterminer f', f'', f'''

Solution :

$$f'(t) = -X_m\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

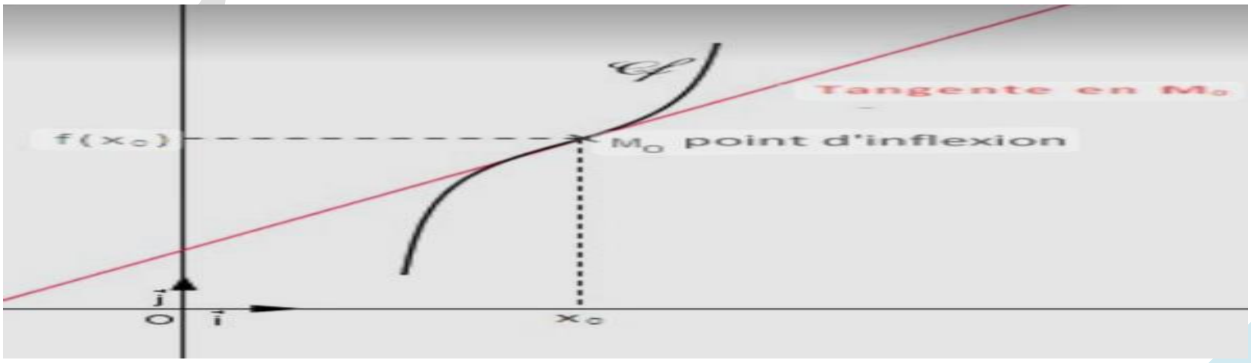
$$f''(t) = -X_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$f'''(t) = X_m\omega^3\sin(\omega t + \varphi)$$

Notation : En physique $f'(t), f''(t), f'''(t)$ sont respectivement notées : $\frac{df}{dt}$; $\frac{d^2f}{dt^2}$; $\frac{d^3f}{dt^3}$

2. Point d'inflexion

On dit que la fonction f admet un point d'inflexion en x_0 si la courbe traverse sa tangente .



Théorème : Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à $(\mathcal{C}_f)$

Exemple :

Montrer que la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ admet un point d' inflexion au point d'abscisse $x = 1$

Solution :

f etant une fonction polynome donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(x)$ *est une fonction polynome donc derivable sur* $\mathbb{R}$. f *est* deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 6x - 6$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

f'' s'annule en 1 en changeant de signe alors le point d'abscisse $x = 1$ est un point d'inflexion à $(\mathcal{C}_f)$

3. Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1 : Si f est dérivable en x_0 (*resp sur* I) *et* g dérivable en $f(x_0)$ (resp sur $f(I)$) alors gof est dérivable en x_0 (resp sur I) et que :

$$[\boldsymbol{gof}(\boldsymbol{x})]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{g}'[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$$

Exemple :

$$Soit\ f(x) = \cos(-4x^2 + 3x - 1)$$

Décomposer f et déterminer $f'(x)$

Solution

Posons $g(x) = -4x^2 + 3x - 1$ et $h(x) = \cos x$ donc $f(x) = hog(x)$

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -8x + 3$,h est dérivable sur $g(\mathbb{R})$

$h'(x) = -sinx \quad donc\ f'(x) = (8x - 3)\sin(-4x^2 + 3x - 1)$

Théorème 2 : Sens de variation d'une fonction composée

- *Si f est croissante sur I , g croissante sur $f(I)$ alors gof est croissante sur I*
- *Si f est decroissante sur I , g decroissante sur $f(I)$ alors gof est croissante sur I*
- *Si f est croissante sur I, et g decroissante sur $f(I)$ alors gof decroissante sur I*
- *Si f decroissante sur I et g croissante sur $f(I)$ alors gof decroissante sur I*

4. Dérivée d'une fonction réciproque

Propriété : Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I

- *Si $f'(x) \neq 0$ sur I alors la fonction reciproque f^{-1} est derivable sur $f(I)$ et on a :*

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_o)]}$$

Exemple :

$$\text{Soit } f : \left]0;\tfrac{\pi}{2}\right[\to]0;1[$$

$$x \to \sin x$$

Montrer que f est bijective et determiner $f^{-1\prime}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

Solution :

La $fonction\ x \to \sin x\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}\ en\ particulier\ sur\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$f(x) = \sin x\ \ est\ derivable\ sur\ \mathbb{R}\ en\ particulier\ sur\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ et\ f'(x) = cosx > 0\ \forall\ x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

x	0 $\frac{\pi}{2}$
f'	$+$
f	$0 \nearrow 1$

Comme f est continue et strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ alors\ elle\ bijective\ de\ \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ vers\ ]0;1[$

Déterminons $f^{-1\prime}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$f^{-1\prime}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

$$Posons\ f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x\ donc\ f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

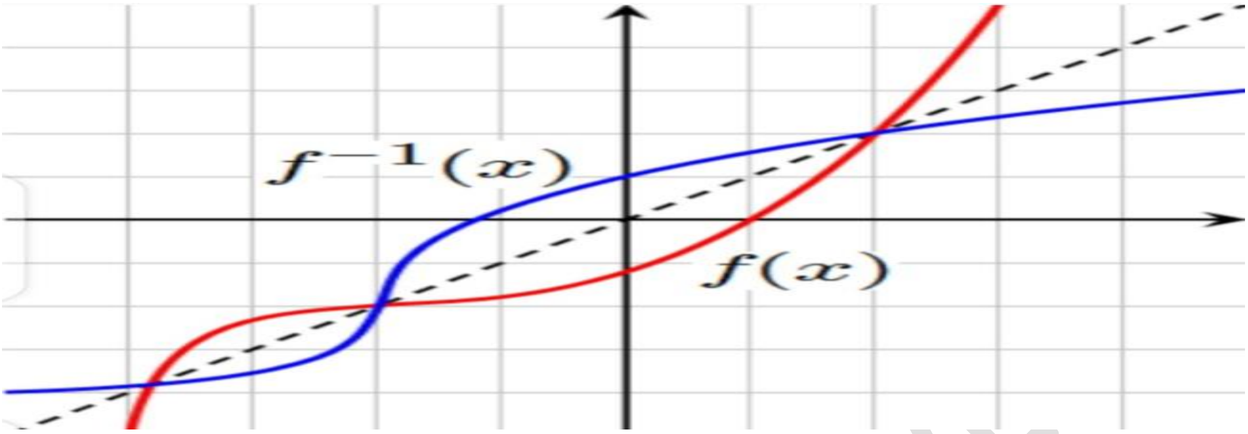
$$\frac{\pi}{3} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ \ et\ -\frac{2}{3}\pi \notin \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ \ donc\ f^{-1\prime}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$f^{-1\prime}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f^{-1\prime}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$

Remarque :

$(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_{f^{-1}})\ sont\ symetriques\ par\ rapport\ à\ la\ premiere\ bissectrice\ (\ la\ droite\ y = x)$

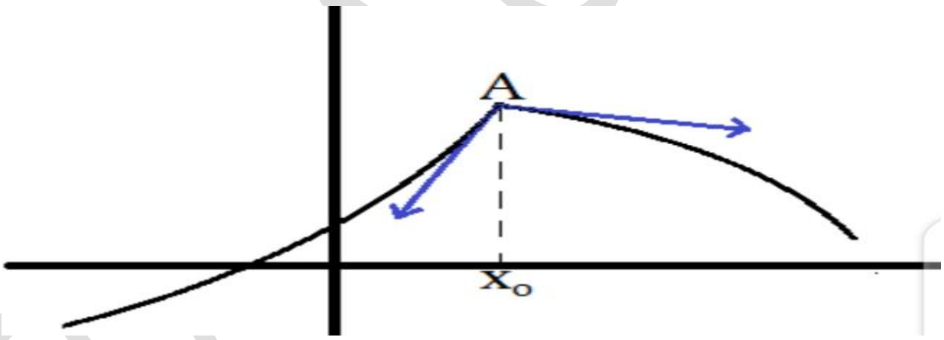


5. Extension du nombre dérivée

a. Point anguleux

$Si\ f\ est\ deribale\ à\ gauche\ de\ x_0\ et \setminus ou\ à\ droite\ de\ x_0\ tel\ que:$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ alors\ C_f\ admet\ au\ point\ d'abscisse\ x_0\ deux\ demi\ tangentes\ de\ directions\ opposées\ c'est\ à\ dire\ un\ point\ anguleux$$



b. Pic ou point de rebroussement

- $Si\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ x_0(respetivement\ à\ droite\ de\ x_0)\ \ alors\ sa\ courbe\ C_f\ admet$

une $demi\ tangente\ d'equation\ y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

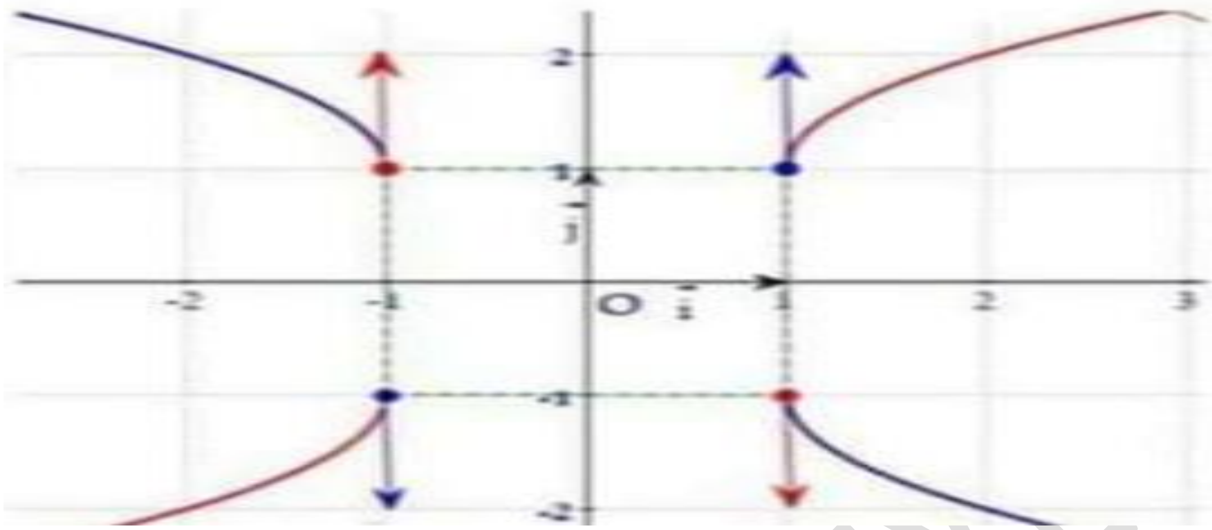
$$(resp\ y = f'_d(x-x_0)+f(x_0))$$

- $Si\ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty\ ou\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty\ alors\ C_f\ admet\ une\ demi-$

  $tangente\ verticale\ dirigée\ vers\ le\ haut\ au\ point\ d'abscisse\ x_0$

- $Si\ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty\ ou\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty\ alors\ C_f\ admet\ une\ demi-$

  $tangente\ verticale\ dirigée\ vers\ le\ bas\ au\ point\ d'abscisse\ x_0$



6. Théorèmes relatifs aux fonctions dérivées

a. Théorème de Rolle

$Si\ f\ est\ continue\ sur\ [a;b]$ et dérivable sur $]a;b[\ tel\ que\ f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c $\in$ $]a;b[\ tel\ que\ f'(c) = 0$

Exemple :

$$f(x) = x^2 - x$$

Montrer que l'équation $f'(x) =\ 0$ admet une solution α sur $]0;1[$ puis determiner α

Solution :

$f\ etant\ une\ fonction\ polynome\ donc\ continue\ sur\ \mathbb{R}\ en\ particulier\ \ [0;1]\ et\ derivale\ sur\ \mathbb{R}\ en$ particulier sur $]0;1[\ et\ de\ plus\ f(0) = f(1) = 0$ alors d'après le théorème de Rolle , il existe un réelle $\alpha \in]0;1[\ tel\ que\ f'(\alpha) = 0$

Déterminons α

$$f'(x) = 2x - 1 = 0\ donc\ x = \frac{1}{2}$$

b. Théorème de l'inégalité des accroissements finies(TIAF)

Propriété 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.S'il existe deux réels m et M tel que pour tout $x \in]a;b[\ , m \leq f'(x) \leq M\ , on\ a : m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Preuve :

- $Soit\ g\ la\ fonction\ definie\ sur\ [a;b]$ par $g(x) = f(x) - mx$

$g\ est\ continue\ sur\ [a;b]\ et\ derivable\ sur\ ]a;b[$

$\forall\ x \in]a\,;b[\ , g'(x) = f'(x) - m\ \ \geq 0\ donc\ g\ est\ croissante\ sur\ [a;b]$

$;or\ a < b\ alors\ g(a) < g(b)$

$c'est\ à\ dire :\ f(a) - m(a) \leq f(b) - m(b)\ soit\ m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ 1)

- $Soit\ h\ la\ fonction\ definie\ sur\ [a;b]\ par\ h(x) = f(x) - Mx$

  $h\ est\ continue\ sur\ [a;b]\ et\ derivable\ sur\ ]a;b[$

  $\forall\ x\ \in]a;b[\ , h'(x) = f'(x) - M \leq 0\ donc\ h\ est\ déroissante\ sur\ [a;b]$

  $or\ a < b\ alors\ h(a) \geq h(b)$

  C'est-à-dire : $f(a) - Ma \geq f(b) - Mb\ \ soit\ \ M(b-a) \geq f(b) - f(a)$ 2)

$$D'apres\ 1)\ et\ 2) : m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Propriété 2 :

Soit f une fonction $derivable\ sur\ un\ intervalle\ I\ .S'il\ existe\ un\ reel\ M > 0$ tel que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq M, alors\ pour\ tous\ reels\ a\ et\ b\ de\ I\ , on\ a : |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exemple 1 :

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x\ | \leq |x|$

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$

Montrer que pour tout réel $x\ et\ y \in [0;1]\ on\ a$: $\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-y)$

Solution :

Exemple 1 :

Considérons la fonction $f(t) = \sin t$

$$\forall\ t\ \in \mathbb{R}, on\ a\ f'(t) = \cos t\ \ donc\ |f'(t)| \leq 1$$

$$Donc\ d'apres\ le\ TIAF\ , on\ a\ \forall \in \mathbb{R}, |f(x) - f(0)| \leq |x - 0|\ soit\ |\sin x| \leq |x|$$

Exemple 2 :

Soit $f(t) = \sqrt{2+t}$

$$f\ est\ derivable\ sur\ [0;1], \forall\ t \in [0,1]\ \ , f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2+t}}$$

$$On\ a : 0 \leq t \leq 1\ \Rightarrow 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2+t} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2+t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Donc\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Appliquons le TIAF à f pour les réels x et y , on obtient :

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-y)$$

III. Etudes des fonctions trigonométriques

1. $Etude\ de\ la\ fonction\ f : x \to \cos x$

$$f(x) = \cos x \qquad D_f = \mathbb{R}$$

Parité :$D_f = \mathbb{R}$ $etant\ symetrique\ par\ rapport$ à 0 , $on\ a\ donc\ \forall\ x \in D_f, -x \in D_f$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)\ donc\ f\ est\ paire$$

$$f\ etant\ paire\ donc\ le\ domaine\ d'etude\ peut\ se\ reduire\ sur\ l'intervalle\ I = D_f \cap [0; +\infty[$$

$$I = [0; +\infty[$$

Périodicité :$\forall\ x \in D_f = \mathbb{R}\ ;\ \ x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)\ donc\ f\ est\ periodique\ de\ periode\ T = 2\pi.$$

$f\ etant\ periodique\ , nous\ pouvons\ restreindre\ le\ domaine\ d'$étude à:

$$J = D_f \cap [0; +\infty[\cap \left[\frac{-2\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}\right] = [0; \pi]$$

Limites aux bornes du domaine d'étude :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad et\ \lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \cos x = -1$$

Dérivée : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; \pi]$

$$f'(x) = -\sin x < 0\ \forall\ x \in [0; \pi]\ \ d'où f\ est\ decroissante\ sur\ [0; \pi]$$

Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
f'	$-$
f	$1 \searrow -1$

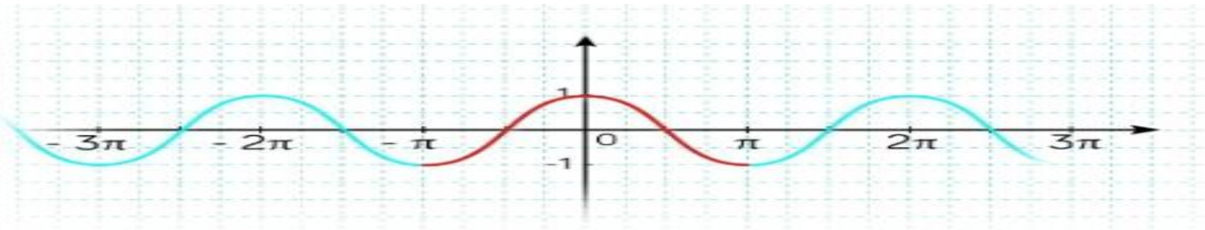
Point d'intersection $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes :

$$avec\ (ox) : f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[2\pi]\ \ ou\ x = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\mathcal{C}_f) \cap (ox) = \left\{A(\frac{\pi}{2}; 0)\right\}$$

$$Avec\ (oy)\ :\ f(0) = \cos 0 = 1$$

$$(\mathcal{C}_f) \cap (oy) = \{B(0; 1)\}$$



2. Etude de la fonction $f : x \to \sin x$

$f(x) = \sin x \;\; ; D_f = \mathbb{R}\, \textit{étant symetrique par rapport}$ à 0

$\forall\, x \; \in \mathbb{R} \;, -x \in \mathbb{R} \;; f(-x) = \sin(-x) = -\sin x \;\; \textit{donc } f \textit{ est impaire} \;.$

f étant impaire donc le domaine peut se réduire sur $I = \mathbb{R} \cap [0; +\infty[\, = [0; +\infty[$

Périodicité :$\forall\, x \; \in \mathbb{R}\,, x + 2\pi \in \mathbb{R}\,; f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$ donc f est périodique de période T =2π

Comme f est impaire et périodique , on peut réduire le domaine sur :

$$J = D_f \cap [0; +\infty[\cap \left[\frac{-2\pi}{2}; \frac{2\pi}{2}\right] = [0; \pi]$$

Limites aux bornes du domaine d'étude :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\to 0} \sin x = 0 \qquad ; \lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \sin x = 0$$

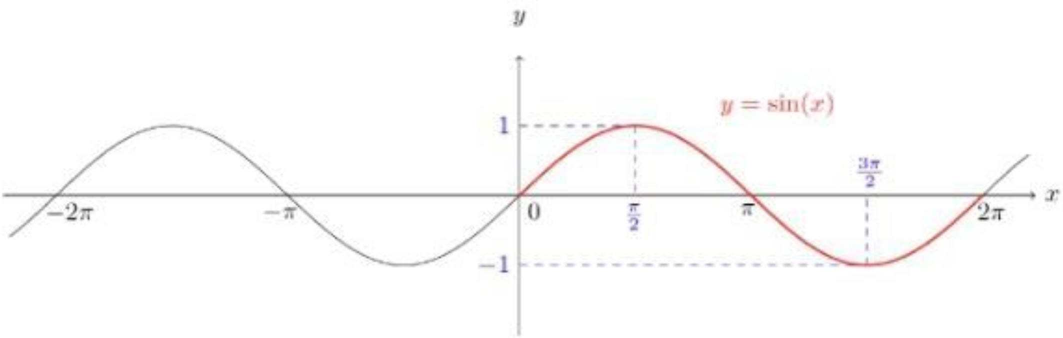
Dérivée :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en paticulier sur $[0; \pi]$ $\;\; et\; f'(x) = \cos x$

$$Sur\; \left[0, \frac{\pi}{2}\right] f'(x) \geq 0 \;et\; sur \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \; f'(x) \leq 0$$

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



3. Etude de la fonction $f : x \to \tan x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;\; \exists\; ssi \cos x \;\neq 0 \;\; \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

Parité :$D_f\; \textit{etant symetrique par rapport}$ à $0\; \textit{donc}\; \forall\, x \in D_f, -x \in D_f;$

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \ \ donc\ f\ est\ impaire$$

Périodicité :

$$\forall\, x \in D_f\ , x+\pi \in D_f \quad ; f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

Donc f est périodique de période T $=\pi$

Comme f est impaire et périodique de période T$=\pi$, donc on peut réduire l'étude sur :

$$I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}[\pi]\right\} \cap [0;+\infty[\cap \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$$

Limites aux bornes du domaine d'étude :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tan x = 0 \qquad ; \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}\ en + \infty$

Dérivée :

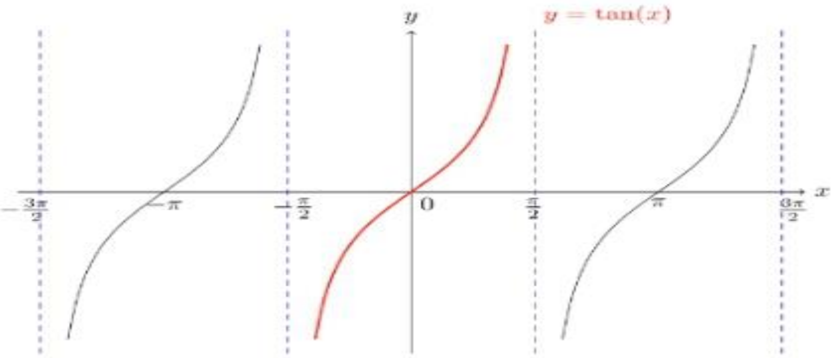
f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} > 0\ \forall\, x\ \in I$, d'où f strictement croissante sur I

Tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	$+$	
f	$0 \nearrow$	$+\infty$

Equation de la tangente en 0 :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)\ \ donc\ (T): y = x$$



IV. Primitives :

1. Définition et propriété

a. **Définition**

Soit f une fonction definie sur un intervalle I . On appelle primitive de f sur I , toute fonction F derivable sur I tel que $F' = f$ sur I

Exemple

Soient $f(x) = \cos\, x$; $F(x) = \sin x$ et $G(x) = \sin x + 1$

Les fonctions F et G sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$

En effet $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = G'(x) = \cos x = f(x)$

Exemple :

Montrer que $F(x) = x\sqrt{4-x^2}$ est une primitive sur $]-2;2[$ de $f(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

Solution

$$F(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$F'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = f(x)$$

$$F'(x) = f(x)\ \ donc\ F\ est\ une\ primitive\ de\ f\ sur\ ]-2;2[$$

Remarque :

La définition reste valable sur un ensemble qui n'est pas un intervalle

2. Propriétés

Propriété 1 :Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Remarque :Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I donc elle admet des primitives sur I

Propriété 2 :Si F est une primitive de f sur un intervalle I ,alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où k$\in \mathbb{R}$

Preuve :

- Soit F une primitive de f sur I et k un reel .

La fonction $F + k$ est dérivable sur I et $(F + k)' = F' = f\ sur\ I$

Donc $F + k$ est une primitive de f sur I

- Soit G une autre primitive de f sur I

La fonction $G - F$ est dérivable sur I

$$\forall\, x \in I\, , (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La fonction $G - F$ est constante sur I donc il existe un réel k tel que $G - F = k\ soit\ G = F + k\ sur\ I$

Remarque :

Toute fonction admettant une primitive sur un intervalle en admet une infinité.

Propriété 3 :

Soit f une fonction admettant une primitive sur I ,y_0 un réel et x_0 un élément de I.Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$

Preuve

Soit G une primitive de f sur I.

On a :$F = G + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$F(x_0) = y_0 \Leftrightarrow G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$ $\quad donc\ k\ est\ unique$

La primitive cherchée est la fonction :$F = G + y_0 - G(x_0)$

3. Calcul de primitives
   a. Tableau de primitives usuelles

$Fonction\ f$	$Primitives\ de\ f$	$Intervalle\ I$
0	$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2} + k$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{x^n}\ \ (n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1)\})$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^r(r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$	$[0;+\infty[\ \ si\ r > 0$ $]0;+\infty[$ si $r < 0\ et\ r \neq -1$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + k$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x\ + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(\ ax + b)$	$\mathbb{R}$

Exemple :

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur I dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^5$ $\quad I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ $\quad I =]-\infty; 0[$

c) $f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad I = [0; +\infty[$ d) $f(x) = \cos(2x+1)$ $\quad I = \mathbb{R}$

Solution

a) $f(x) = x^5$ $\quad I = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{6}x^6 + k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$

b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ $\quad I =]-\infty; 0[$

$\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{3x^3} + k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad I = [0; +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}(x^{\frac{1}{2}})^3 + k = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + k$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

d) $f(x) = \cos(2x+1)$ $\quad I = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$

4. Primitives et opérations

a. Propriétés algébriques des primitives

Propriété :

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur I les fonctions F et G.+ ;k un reel.

- La fonction $f+g$ admet pour primitive sur I la fonction $F+G$
- La fonction kf admet pour primitive sur kF

Attention :La primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives, c'est aussi valable pour le quotient

Exemple :

1) Déterminer les primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ $de\ f(x) = 5x^3 + 2x - 3 + tan^2 x$
2) Soit g définie sur $]0; +\infty[$par $g(x) = x - \frac{1}{x^2}$.Déterminer la primitive G de g prenant la valeur 2 en 1

Solution

1) $f(x) = 5x^3 + 2x - 3 + tan\,^2 x$

$$F(x) = \boldsymbol{\frac{5}{4}x^4 + x^2 - 3x + \tan x - x + k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$$

2) $g(x) = x - \frac{1}{x^2}$

L'ensemble des primitives des primitives de g est de la forme $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + k$

$$G(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + 1 + k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$$

b. Primitives de des fonctions du type : $u' \times (v' ou)$

Propriété :

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur $u(I)$.La fonction $u' \times (v'ou)$ admet pour primitive la fonction vou

Cas particuliers :

$Fonction$	$Une\ primitive$	$Condition\ sur\ I\ et\ u$
$u'u^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}\ (n \in \{0;1\})$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0\ sur\ I$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	U ne s'annule pas sur I
$u'\ u^r(r \in \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u \geq 0\ sur\ I\ si\ r > 0$ $u > 0\ sur\ I\ si\ r < 0$
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Exemple1 :

Donner les primitives de f sur les intervalles où elles sont définies dans les cas suivants :

a) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)^5$;

b) $f(x) = \frac{x-3}{(x^2-6x-7)^3}$;

c) $f(x) = \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x-2}}$

d) $f(x) = cos^2x$

e) $f(x) = sin^2x$

f) $f(x) = cos^3x$

g) $f(x) = cos^3xsin^4x$

h) $f(x) = (\sin 2x - 3\sin x + 8)\cos x$

Exemple 2 :

$$Soit\ f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\quad definie\ sur\ \ I =]1;+\infty[$$

Mettre $f(x)\ sous\ la\ forme\ f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$ En déduire une primitive de f sur I

Solution

Exemple 1

Donnons les primitives de f sur les intervalles où elles sont définies dans les cas suivants

a) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-5)^5$

Posons $u = x^2+x-5 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x+1$

$u'u^5 = (2x+1)(x^2+x-5)^5 = f(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}u^6 + k$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{6}(x^2+x-5)^6 + k} \ \ (k \in \mathbb{R})$$

b) $f(x) = \frac{x-3}{(x^2-6x-7)^3} = (x-3)(x^2-6x-7)^{-3}$

$Posons\ u = x^2-6x-7 \ \Rightarrow u' = 2x-6$

$u'u^{-3} = (2x-6)(x^2-6x-7)^{-3} = 2f(x)\ \ donc\ f(x) = \frac{1}{2}u'u^{-3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-2} + k$

$$\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{4}\left(x^2-6x-7\right)^{-2} + k = -\frac{1}{4(x^2-6x-7)^2} + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

c) $f(x) = \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x-2}}$

$$Posons\ u = x^2+3x-2 \Rightarrow u' = 2x+3$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-2}} = \frac{1}{2}f(x) \Rightarrow f(x) = 2\frac{u'}{\sqrt{u}} \Rightarrow F(x) = 4\sqrt{u} + k$$

$$\boldsymbol{F(x) = 4\sqrt{x^2+3x-2} + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$d)\ f(x) = cos^2x$

On a :$\cos 2x = 2cos^2x - 1$ donc $cos^2x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$e)\ f(x) = sin^2x$

On a $\cos 2x = 1 - 2sin^2x \quad donc\ sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k} \ \ (k \in \mathbb{R})$$

$f)\ f(x) = cos^3x$

$$f(x) = cos^3x = \cos x \times cos^2x = \cos x(1 - sin^2x) = \cos x - \cos x sin^2 x$$

$$F(x) = \boldsymbol{\sin x - \frac{1}{3}sin^3x + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

g) $f(x) = cos^3x sin^4x$

$$f(x) = \cos x \times cos^2x \times sin^4x = \cos x(1 - sin^2x)sin^4x = \cos x sin^4 x - cosx sin^6x$$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{5}sin^5x - \frac{1}{7}sin^7x + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

h) $f(x) = (\sin 2x - 3\sin x + 8)\cos x$

$$f(x) = \sin 2x cos\, x - 3\sin x cos\, x + 8\cos x = 2\sin x cos^2 x - 3\sin x \cos x + 8\cos x$$

$$F(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{cos^3x} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sin^2x} + \mathbf{8}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

Exemple 2 :

$$Soit\ f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad definie\ sur\ \ I =]1; +\infty[$$

Mettons $f(x)\ sous\ la\ forme\ f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a + b}{(x-1)^2}$$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a = -1 \end{cases}$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Déduisons en une primitive de f sur I

$f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

$$F(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

CHAPITRE 2 : Suites Numériques

Pré requis :

- Connaitre les notions de et bases et propriétés des fonctions numériques à une variable réelle et aussi de bien les utiliser
- Calculer une limite
- Calculer une dérivée
- Dresser un tableau de variation
- Tracer une courbe

Objectifs :

Apres cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Déterminer les termes d'une suite
- Démontrer qu' une suite est monotone ou périodique
- Faire une démonstration par récurrence
- Connaitre une suite arithmétique et géométrique
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique
- Majorer ou minorer une suite
- Déterminer la somme des p termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique
- Déterminer les limites des suites convergentes

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https :// sunudaara.com)

Plan :(voir cours)

Déroulement Possible

I. Généralité

1. Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}(ou\ une\ partie\ de\ \mathbb{N})\ vers\ \mathbb{R}$.

2. Notation et vocabulaire

$$Soit\ E \subseteq \mathbb{N}, l'ensemble\ de\ definition\ de\ U$$
$$U: E \to \mathbb{R}$$
$$n \to U(n)$$

Nous distinguons deux types de notation pour l'image de n par U

- La notation fonctionnelle $U(n)$
- La notation indicielle U_n

Mais l'usage est de noter $U(n)$ au lieu de U_n.Le réel U_n est le terme d'indice n de la suite U.
On dit aussi que U_n est le terme de rang n.
Parfois il arrive que l'on note la suite U par U_n ou par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.Dans ce cas , il est utile de distinguer les deux suites .

- Le premier désigne le terme d'indice n
- Le second désigne la suite U

Exemple :
Soient U une suite définie par :

$$U: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to 2n - 3$$
$$Determinons\ U_0; U_1\ et\ U_2$$

$U_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$; $U_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$; $U_3 = 2 \times 2 - 3 = 1$

3. Suites récurrentes

Une suite (U_n) est définie par récurrence si on donne :

- La valeur numérique de son premier terme
- Une relation reliant deux termes consécutifs

Exemple :

Soit $V_n\ une\ suite\ telle\ que \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 3 \end{cases}$

$Calculons\ V_1\ et\ V_2$ etV_3

$$V_1 = \frac{1}{2}V_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$$
$$V_2 = \frac{1}{2}V_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$$
$$V_3 = \frac{1}{2}V_2 + 3 = \frac{1}{2} \times 5 + 3 = \frac{11}{2}$$

4. Sens de variation d'une suite

a. Propriétés

Soit $(U_n)\ une\ suite\ numerique\ definie\ sur\ E \subseteq \mathbb{N}$

- $(U_n)\ est\ croissante\ \ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E\ , U_{n+1} \geq U_n$
- $(U_n)\ est\ decroissante\ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E, U_{n+1} \leq U_n$
- $(U_n)\ \ est\ constante\ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E\ , U_{n+1} = U_n$
- $(U_n)\ est\ stationnaire\ à\ partir\ d'un\ rang\ n_e\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in , dés\ que\ n \geq n_e$
  $$alors\ U_{n+1} = U_n$$
- $(U_n)\ est\ à\ termes\ positifs\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E, U_n \geq 0$

Remarque : Si $\forall$ n $\in$ E, $U_n > 0\ alors$

- (U_n) $croissante\ sur\ E \ \Leftrightarrow \forall\, n \in E, \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$
- (U_n) $décroissante\ sur\ E \ \Leftrightarrow \forall\, n \in E, \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

b. Théorème

Soit (U_n) $une\ suite\ definie\ par\ U_n = f(n)\ avec\ f\ definie\ sur\ [0;+\infty[$

- $Si\ f\ est\ strictement\ croissante\ alors\ U_n\ est\ strictement\ croissante$
- $Si\ f\ est\ strictement\ décroissante\ alors\ U_n\ est\ strictement\ décroissante$

Exemple 1 :

Etudions le sens de la variation de la suite $U_n = 2n^2 - n$

$$U_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) = 2n^2 + 3n + 1$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n) = 4n + 1 > 0\ \forall\, n \geq 0\ donc\ U_n\ est\ croissante$$

Exemple 2 :

Etudions le sens de variation de la suite $W_n = \frac{3n-2}{5n-1}$ $pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*$

$$Soit\ f(x) = \frac{3x-3}{5x-1} \quad ; D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{5} \quad ; \lim_{x\to\frac{1}{5}^-} f(x) = +\infty \qquad ; \lim_{x\to\frac{1}{5}^+} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{7}{(5x-1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
f	$\frac{3}{5}$	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	$\frac{3}{5}$

$$f\ est\ croissante\ sur\ [1;+\infty[\ alors\ W_n\ est\ croissante\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Il existe des suites qui sont ni croissantes ni décroissante comme $U_n = (-1)^n$

5. Comparaison de suites

Suites majorées , suites minorées, suites bornées

Toutes les propriétés et tous les théorèmes donnés sur les fonctions numériques restent valables sur les suites numériques .

- Dire que la suite (U_n) $est\ inferieure\ à\ la\ suite\ (V_n)\ signifie\ que\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$
- $Une\ suite\ (U_n)\ est\ majorée\ lorsqu'il\ existe\ un\ reel\ M\ tel\ que\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$
- $Une\ suite\ (U_n)\ est\ minorée\ lorsqu'il\ existe\ un\ reel\ m\ tel\ que\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$
- $Une\ suite\ (U_n)\ est\ dite\ bornée\ si\ elle\ est\ majorée\ et\ minorée\ c'est\ à\ dire\ lorqu'il\ existe\ deux$ réels m et M $tel\ que\ \forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$

Exemple : Soit $U_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$ $\quad Montrons\ que\ U_n\ est\ bornée\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-2 \ll (-1)^n + \sin n \leq 2$$

$$comme\ n \neq 0\ donc\ -2(\frac{1}{n^2}) \leq ((-1)^n + \sin n) \times \frac{1}{n^2} \leq 2(\frac{1}{n^2})$$

$$on\ aura\ : \quad \frac{-2}{n^2} \leq U_n \leq \frac{2}{n^2}$$

$$-2 \leq \frac{-2}{n^2} \leq U_n \leq \frac{2}{n^2} \leq 2$$

$$-2 \leq U_n \leq 2\ ;\ d'où\ \ U_n\ est\ bornée$$

- $Une\ suite\ (U_n)\ est\ dite\ periodique\ de\ periode\ p \in \mathbb{N}^*\ sssi, U_{n+p} = U_n$

Exemple :

$$Soit\ une\ suite\ \ (T_n)\ telle\ que\ \begin{cases} T_0 = 1 \\ T_{n+1} = {T_n}^2 - T_n - 1 \end{cases}$$

$$Calculer\ T_1, T_2, T_3, T_4. En\ deduire\ une\ periode\ de\ (T_n)$$

$$T_1 = {T_0}^2 - T_0 - 1 = 1^2 - 1 - 1 = -1$$
$$T_2 = {T_1}^2 - T_1 - 1 = (-1)^2 + 1 - 1 = 1$$
$$T_3 = {T_2}^2 - T_2 - 1 = 1^2 - 1 - 1 = -1$$
$$T_4 = {T_3}^2 - T_3 - 1 = (-1)^2 + 1 - 1 = 1$$
$$T_n\ \ est\ periodique\ de\ periode\ p = 2$$

6. Démonstration par récurrence

Pour faire une démonstration par récurrence, on procède comme suit :
Initialisation :On vérifie que la propriété est vraie au premier rang
Hérédité : On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n et puis on montre qu'elle reste vraie au rang n+1

Exemple 1 :

$$En\ utilisant\ la\ recurrence, montrons\ que\ S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Initialisation: S_1 = 1\ \ et\ pour\ n = 1, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

C'est vraie au premier rang donc la propriété est initialisée

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est-à-dire $1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$

Et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $1 + 2 + \cdots . n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots . . (n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots n + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\boldsymbol{S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots . . (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

C'est vraie au rang n+1 donc

$$\boldsymbol{S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exemple 2 :

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ telle\ que\ \begin{cases} U_o = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$$

$$Montrer\ par\ reccurence\ que : \forall\ n \in \mathbb{N}\ , 0 \leq U_n \leq 3$$

Initialisation :Par définition $U_o = 3 \quad \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 3\ donc\ la\ proprieté\ est\ initialisée$
Hérédité : Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est à dire $0 \leq U_n \leq 3$ et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

On a : $,0 \leq U_n \leq 3$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{3}U_n \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{3}U_n + 2 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \leq \frac{1}{3}U_n + 2 \leq 3$$

Donc $\boldsymbol{0 \leq U_{n+1} \leq 3}$; $la\ propri\acute{e}t\acute{e}\ est\ vraie\ au\ rang\ n+1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}\,;\boldsymbol{0 \leq U_n \leq 3}$

<u>Exemple 3 :</u>

Montrons que $\forall\, n \geq 1\quad ,6\ divise\ 7^n - 1 \qquad (n\ est\ entier)$

$-Pour\ n = 1\,, on\ a{:}\, 7^n - 1 = 7 - 1 = 6$ donc la propriété est vraie pour n=1

- Supposons que pour un certains rangs $n \geq 1$ la propriété est vraie$(7^n - 1 = 6k\ avec\ (k \in \mathbb{Z}))$ et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 $(6\ divise\ 7^{n+1} - 1)$

On a :$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 7 + 6$

$$= 7(7^n - 1) + 6$$
$$= 7 \times 6k + 6$$
$$7^{n+1} - 1 = 6(7k + 1)$$
$$7^{n+1} - 1 = 6k' \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc la propriété est vraie au rang n+1

Donc $\forall\, n \geq 1\quad ,6\ divise\ 7^n - 1$

<u>Exercice d'application</u> :

Démontrer par récurrence

a) $\forall n \geq 4\quad ; 2^n \geq n^2$

b) $\forall\, n \geq 1\quad ; S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $Soit\ (U_n)\ la\ suite\ definie\ par \begin{cases} U_0 = -3 \\ \forall\, n\ \geq 0\,, U_{n+1} = 5 - 4U_n \end{cases}$

Montrer que pour tout entier naturel n ,$U_n = 1{+}(-4)^{n+1}$

II. Suites arithmétiques, suites géométriques

1. Suites arithmétiques

a. Définition :

$Une\ suite\ (U_n)\ est\ dite\ arithmetique\ s'il\ existe\ un\ reel\ r\ tel\ que\ \forall\, n \in \mathbb{N},$

$\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}. Le\ reel\ r\ est\ appel\acute{e}\ raison\ de\ la\ suite\ .$

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique , il faut montrer que $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n = r}$

<u>Exemple</u> : Soit la suite $U_n = 2n - 3.\ Montrer\ que\ (\,U_n)\ est\ une\ suite\ arithmetique$

$U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2\ donc\ la\ suite\ \ (U_n)\ est\ une\ suite\ arithmetique$ de raison r=2

b. Terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0

On a :

$$U_1 = U_0 + r$$
$$U_2 = U_1 + r$$
$$U_3 = U_2 + r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n = U_{n-1} + r$$

$$U_n = U_0 + nr$$

De même si a est un entier , on a $U_a = U_{0+}ar$

$$U_n - U_a = U_0 + nr - U_0 - ar$$

Donc le terme générale *est* $\boldsymbol{U_n = U_a + (n-a)r}$

Si le premier terme est $U_0, on\ a$: $\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$
Si le premier terme est $U_1, on\ a$: $\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)r}$

c. Sens de variation d'une suite arithmétiques

$Soit\ (U_n)\ une\ suite\ arithmetique\ de\ raison\ r$

- **Si r > 0 $\boldsymbol{alors\ la\ suite\ (U_n)\ est\ croissante}$**
- **Si r< 0 $\boldsymbol{alors\ (U_n)\ est\ decroissante}$**
- **Si r=0 alors la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est constante**

d. Somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétiques

Soit $(\boldsymbol{U_n})$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme $(\boldsymbol{U_0})$

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \ldots \ldots . + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$
$$S = U_n + U_{n-1} + U_{n-1} + \cdots \ldots \ldots\ U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \cdots \ldots \ldots . (U_n + U_0)$$
$$\boldsymbol{or\ U_p + U_{n-p} = U_0 + U_n}$$

Donc $$2S = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \cdots \ldots \ldots (U_0 + U_n)$$

$$2S = (n+1)(U_0 + U_n)$$

$$S = \frac{\boldsymbol{(n+1)(U_0+U_n)}}{\boldsymbol{2}}$$

De manière générale $S = \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ terme}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{1^{er}\ terme + dernier\ terme})$

<u>Exercice d'application</u> :

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ definie\ par\ (\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$$

1) Calculer $U_1\ et\ U_2$
2) Démontrer par récurrence que :$\forall\ n \in \mathbb{N}: U_n \geq 1$
3) Etudier le sens de variation de (U_n)
4) Soit $V_n, une\ suite\ definie\ par: (\forall\ n \in \mathbb{N}), V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

   a)Montrer que (V_n)$est\ une\ suite\ arithmetique\ dont\ on\ precisera\ sa\ raison\ et\ son$ premier terme.

   b)Ecrire $V_n\ en\ fonction\ de\ n\ puis\ en\ deduire\ U_n\ en\ fonction\ de\ n$,

5) Déterminer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots \ldots . + V_n$

<u>Solution</u>

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ definie\ par\ (\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$$

1)$Calculons\ U_1 et\ U_2$

$$U_1 = \frac{5U_0 - 1}{U_0 + 3} = \frac{5 \times 2 - 1}{2 + 3} = \frac{9}{5}$$
$$U_2 = \frac{5U_1 - 1}{U_1 + 3} = \frac{5 \times \frac{9}{5} - 1}{\frac{9}{5} + 3} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

2)Démontrons par récurrence que :$\forall\, n \in \mathbb{N}: U_n \geq 1$

Initialisation :$U_0 = 2 > 1$ $vrai\ au\ premier\ rang$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : Supposons que c'est vraie jusqu'au rang n $(U_n > 1)$ et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $U_{n+1} \geq 1$

$$On\ a: U_n \geq 1$$

$$5U_n \geq 5$$

$$5U_n - 1 \geq 4 \qquad (1)$$

De même $$U_n \geq 1$$

$$U_n + 3 \geq 4 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} \geq \frac{4}{4} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 1$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$ d'où :$\forall\, n \in \mathbb{N}: U_n \geq 1$

3)Etudier le sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} - U_n = \frac{5U_n - 1 - U_n{}^2 - 3U_n}{U_n + 3} = \frac{-U_n{}^2 + 2U_n - 1}{U_n + 3} = -\frac{(U_n - 1)^2}{U_n + 3} < 0$$

Donc (U_n) $est\ decroissante$

4)Soit $V_n, une\ suite\ definie\ par: (\forall\, n \in \mathbb{N}), V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a)Montrons que (V_n)$est\ une\ suite\ arithmetique\ dont\ on\ precisera\ sa\ raison\ et\ son$ premier terme.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{5U_n - 1}{U_n + 3} - 1} = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{4(U_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

$$donc\ (V_n\ )est\ une\ suite\ arithmetique\ de\ raison\ r = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{V_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1}$$

b) Ecrivons V_n $en\ fonction\ de\ n\ pui\ deduisons\ en$ U_n $en\ fonction\ de\ n$

$$V_n = V_0 + nr$$

$$Vn = 1 + \frac{1}{4}n$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{U_n - 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}n} + 1}$$

5) Déterminer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots \ldots . + V_n$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{4}n\right) = \frac{n+1}{2}(2 + \frac{1}{4}n)}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n+1}{2}(2 + \frac{1}{4}n)}$$

2. Suites géométriques

a. Définition

Une suite (V_n) est dite geometrique s'il existe un réel q tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = q.V_n$. Le réel q est appelé raison de la suite .

Pour montrer qu'une suite (V_n) est une suite géométrique , on peut montrer que :$\frac{V_{n+1}}{V_n}$ =q

Exemple :

Soit $V_n = 2^n. Montrons\ (V_n\ )est\ une\ suite\ geometrique$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2\ donc\ (V_n)\ est\ une\ suite\ geometrique\ de\ raison\ q = 2$$

b. Terme général d'une suite géométrique

Soit (V_n) une suite arithmétique de premier terme V_0 et de raison q

$$V_1 = V_0 \times q$$
$$V_2 = V_1 \times q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_{n-1} = V_{n-2} \times q$$
$$V_n = V_{n-1} \times q$$

En faisant le produit membre à membre , on aura

$$\boldsymbol{V_n = V_0 \times q^n}$$

De manière générale $\forall\, a \in \mathbb{N};$ $\boldsymbol{V_n = V_a \times q^{n-a}}$

c. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit $(V_n)\ une\ suite\ geometrique\ de\ raisons\ q\ et\ de\ premier\ terme\ V_0$

$$Si\ V_0 > 0\ alors\ on\ a \begin{cases} (V_n) croissante\ si\ q > 1 \\ (V_n)\ decroissante\ si\ 0 < q < 1 \\ (V_n)\ constante\ si\ q = 1 \end{cases}$$

d. Somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique

$$Soit\ (\ V_n)\ une\ suite\ geometrique\ de\ premier\ terme\ V_0\ et\ de\ raison\ q$$
$$S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + V_{n-1} + V_n$$
$$S = V_0 + V_0 \times q + V_0 \times q^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + V_0 \times q^{n-1} + V_0 \times q^n$$
$$S = V_0(1 + q + q^2 + \cdots \ldots \ldots . . + q^{n-1} + q^n)$$
$$or\ 1 + q + q^2 + \cdots \ldots \ldots . . + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (deja\ demontré\ avec\ le\ calcul\ dans\ \mathbb{R})$$
$$S = \frac{V_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}\ \ avec\ q \neq 1$$
$$De\ maniere\ generale\ \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{1^{er}\ terme(1 - q^{nombre\ de\ terme})}}{\boldsymbol{1 - q}} \quad avec\ q \neq 1$$

Exercice d'application

Soit $(U_n)\ , la\ suite\ definie\ par \begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases}$

1) Calculer $U_2\ et\ U_3$

2) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Montrer que V_n *est une suite geometrique dont on precisera la raison et le* 1^{er} *terme*

b) *Exprimer* V_n *en fonction de n puis en deduire une formule explicite de* U_n

3 Soient $S_n = V_1 + V_2 + \cdots \ldots . + V_n$

Déterminer S_n

Solution :

1) Calculons U_2 *et* U_3

$$U_2 = \frac{1+1}{3\times 1}U_1 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$
$$U_3 = \frac{2+1}{3\times 2}U_2 = \frac{3}{6}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

3) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$

a)Montrons V_n *est une suite geometrique dont on precisera la raison et le* 1^{er} *terme*

$$\boldsymbol{V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}U_n}{n+1} = \frac{U_n}{3n} = \frac{1}{3}V_n}$$

$$Donc\ (V_n)\ est\ une\ suite\ geometrique\ de\ raison\ q = \frac{1}{3}$$

$$V_1 = \frac{U_1}{1} = \frac{1}{3}$$

b)Exprimons V_n *en fonction de n puis deduisons en une formule explicite de* U_n

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$
$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}}$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{U_n}{n} \Leftrightarrow U_n = nV_n = \frac{n}{3^n}}$$

3 Soient $S_n = V_1 + V_2 + \cdots \ldots . + V_n$ *et* $S'_n = U_1 + U_2 + \cdots \ldots . . U_n$

Déterminons S_n *puis deduire* S'_n

$$S_n = V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{3}^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$$

III. Convergence d'une suite numérique

1. Définition

Une suite (U_n) est dite convergente quand elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.Une suite qui admet une limite infinie ou n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$ est dite divergente .

Exemple :

Etudions la convergence des suites suivantes

$$U_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \; donc \; (U_n) \; converge \; vers \; 0$$

$$V_n = \sqrt{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty \; donc \; (V_n) \; est \; divergente$$

$$W_n = (-1)^n$$

$$W_n = \begin{cases} 1 \; si \; n \; est \; pair \\ -1 \; si \; n \; est \; impair \end{cases}$$

$$(W_n) \; n'admet \; pas \; de \; limite \; en + \infty \; alors \; elle \; est \; divergente$$

2. Théorème

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge
- Si f *est une fonction definie sur* $[b; +\infty[$ $(b \geq 0)$ *et* (U_n) *une suite definie par* $U_n = f(n)$; *si en* $+\infty$, f *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$ (*resp* $-\infty$ *ou* $+\infty$)*alors* (U_n) *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$ (*resp en* $-\infty$ *ou* $+\infty$)
- *Si* $U_{n+1} = f(U_n)$ *et* (U_n) *converge vers* l *alors* l *verifie la relation* $f(l) = l$

<u>Exemple</u> :

$$Soit \; (U_n) \; la \; suite \; telle \; que \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases}$$

1)*Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$

2) Etudier le sens de variation de (U_n)

3)En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite

<u>Solution</u>

1) *Montrer par recurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$

$$U_0 = 1 \Longrightarrow 0 \leq U_0 \leq 2 \; vrai \; au \; premier \; rang$$

Supposons qu'elle reste vraie jusqu'au rang n ($0 \leq U_n \leq 2$) et montrons qu'elle sera vrai au rang n+1 c'est à dire $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

On a $0 \leq U_n \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 3U_n \leq 6$

$\Rightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 10 \qquad (1)$

On a aussi $0 \leq U_n \leq 2 \quad \Longrightarrow 3 \leq U_n + 3 \leq 5 \qquad (2)$

(1) et (2)$\Rightarrow$ $\frac{4}{3} \leq \frac{3U_n+4}{U_n+3} \leq \frac{10}{5} \Longrightarrow 0 \leq \frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq 2$

d'où $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$$

2) Etudions le sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} - U_n = \frac{3U_n + 4 - U_n^{\,2} - 3U_n}{U_n + 3} = \frac{(2 - U_n)(2 + U_n)}{U_n + 3} > 0$$

$$(U_n) \; est \; croissante$$

3) Déduisons en qu'elle converge et déterminons sa limite

Comme (U_n) est croissante et majorée alors elle converge

Soit l sa limite

On a (U_n) qui converge vers l et $U_{n+1} = f(U_n)$ $donc\ l\ verifie\ f(l) = l$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{3l+4}{l+3} = l \Leftrightarrow 3l + 4 = l^2 + 3l \Leftrightarrow l = 2\ ou\ l = -2$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$

- $Soit\ une\ suite\ geometrique\ de\ raison\ q\ et\ de\ terme\ general\ U_n$
  - ✓ Si $|q| > 1\ alors\ (U_n)\ diverge$
  - ✓ Si$|q| < 1\ alors\ U_n\ converge\ et\ \lim_{n\to\infty} U_n = 0$

Exemple :

$$U_n = 2^n\ \ donc\ \lim_{n\to+\infty} U_n = 0\ car\ |2| > 1$$

$$V_n = (\frac{1}{3})^3\ donc\ \lim_{n\to+\infty} U_n = 0\ car\ \left|\frac{1}{3}\right| < 0$$

3. Suites adjacentes

Lorsque $\begin{cases} (U_n\ )est\ croissante \\ (V_n\ )\ decroissante \\ \lim_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0 \end{cases}$ alors $(U_n)\ et(\ V_n)\ sont\ adjascentes$

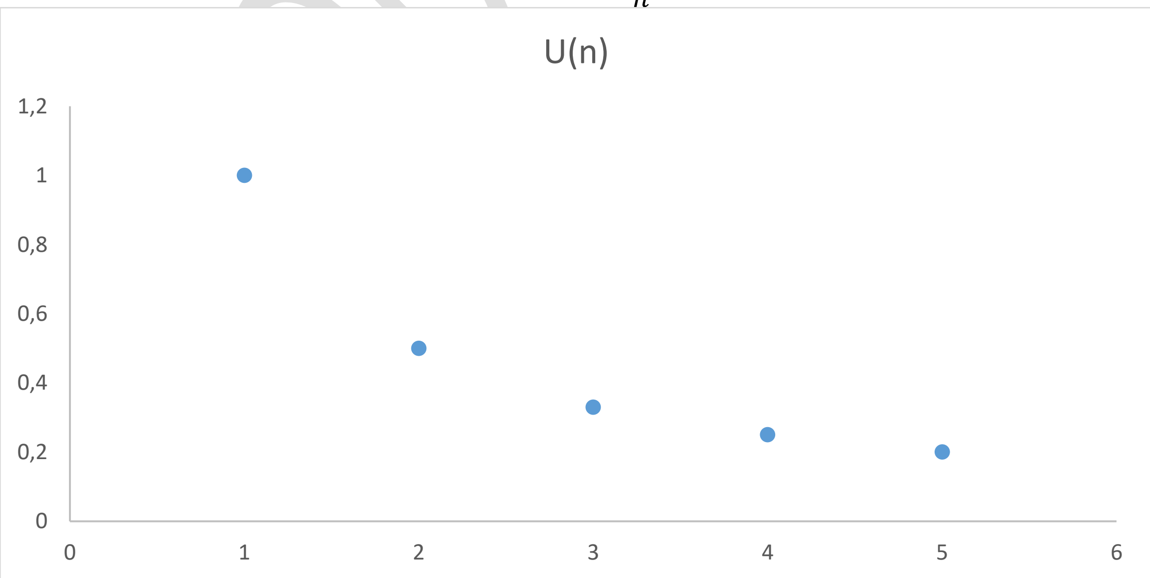
- Si $(U_n)\ et(\ V_n)\ sont\ adjascentes\ alors\ elles\ converges\ vers\ la\ meme\ limite\ l$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ , on\ a\ U_n \le U_{n+1} \le l \le V_{n+1} \le V_n$

IV. Représentation graphique d'une suite

1. Représentation du type $U_n = f(n)$

On se place dans un repère $(o\ ,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La représentation graphique d'une suite $U_n = f(n)\ est$ l'ensemble des points $(n; U_n)$

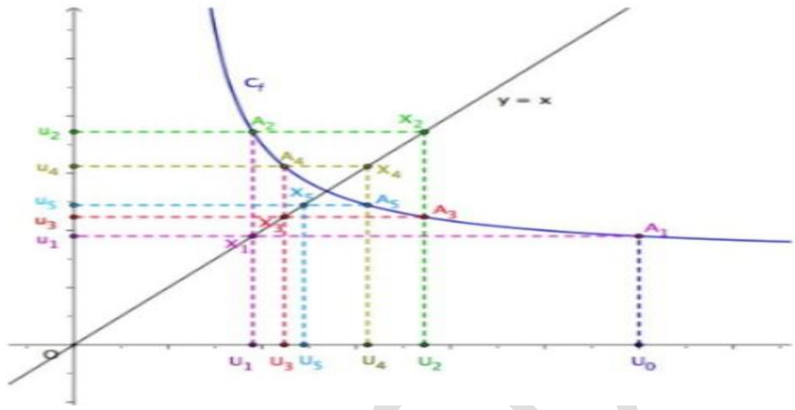
$$U_n = \frac{1}{n}$$



2. Représentation du type $U_{n+1} = f(U_n)$

Dans ce cas , on ne cherche pas en générale à représenter la suite suivant la définition ci-dessous, mais on préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses. Pour le faire , on suit les étapes suivantes :

- Tracer la courbe de f définissant la suite récurrente et la première bissectrice d'équation $y = x$
- Placer le premier terme U_0 sur l'axe des abscisses.
- Utiliser la courbe de f pour construire $U_1 = f(U_0)$
- Reporter U_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
- Utiliser la courbe de f pour construire $U_2 = f(U_1)$ sur l'axe des abscisses et on répète la procédure.



V. Progression arithmétique et géométrique

- Trois réels a, b et c sont en progression arithmétique si $b = \frac{a+c}{2}$

<u>Preuve</u>

$$b = a + r \Leftrightarrow r = b - a$$
$$c = b + r \Leftrightarrow r = c - b$$
$$donc\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

- Trois a , b et sont en progression géométrique si $b^2 = ac$

<u>Preuve</u>

$$b = a \times r \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$
$$c = b \times r \Leftrightarrow r = \frac{c}{b}$$
$$donc\ \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

CHAPITRE 3 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Objectifs

- Connaitre la définition de la fonction logarithme népérien
- Connaitre et savoir utiliser les propriétés de bases
- Résoudre les équations et inéquations logarithmiques
- Connaitre et savoir utiliser les limites usuelles dans certains cas
- Déterminer les primitives des fonctions du type $\frac{u'}{u}$
- Faire une bonne étude de fonction dans le cas des fonctions logarithmiques

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. Définition , conséquences immédiates et propriétés

1. Définition

La fonction logarithme népérien notée $\ln$ $ou\ log$ est l'unique fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $ln1 = 0\ et\ \forall\ x\ \in]0;+\infty[\ (\ln x\ )' = \frac{1}{x}$

On note : $ln:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \ln x$ et $(lnx\ x)' = \frac{1}{x}$

2. Conséquences immédiates

- $\ln \mathrm{x}\ existe\ ssi\ x > 0$
- $\ln \mathrm{x}\ est\ strictement\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[$

$$D'où\ on\ a\ \forall\ a \in \mathbb{R}^*{}_+\ et\ b \in \mathbb{R}^*{}_+$$
$$a \leq b \Leftrightarrow \ln a\ \leq \ln b$$
$$a > b \Leftrightarrow \ln a\ > \ln b$$
$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

- $\forall\ x \in]0;1[;\ ln\ x\ < 0$

  $\forall\ x \in]1;+\infty[\ \ln x\ > 0$

  $Si\ x = 1\ alors \ln x = \ln 1 = 0$

3. Propriétés algébriques

Pour tous réels $a\ et\ b$ strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$

- $\ln(a\ \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln a^r\ = rln\ a$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

<u>Exemple :</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$
b) $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$
c) $\ln(3-x) \leq \ln(4x-1)$

<u>Solution</u>

a) $\ln(x+1) = \ln(2x-3)$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	

$$D_E = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$\forall\, x \in D_E \qquad ; \ln(x+1) = \ln(2x-3)$$

$$x + 1 = 2x - 3$$

$$x = 4 \in D_E \ \ d'où \quad S = \{4\}$$

b) $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$

L'équation est définie ssi $\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

$$D_E =]0; +\infty[$$

$$\forall\, x \in D_E \quad ; \quad \ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$$

$$ln\,[x(x+1)] = \ln 2$$

$$x\,(x+1) = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1 \in D_E\, ; x = -2 \notin D_E$$

$$S = \{1\}$$

c) $\ln(3-x) \leq \ln(4x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 0 \\ 4x - 1 > 0 \\ 3 - x < 4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x > 0 \\ 4x - 1 > 0 \\ -5x + 4 < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{4}{5}$		3		$+\infty$
$3 - x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-5x + 4$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	

$$S = \left]\frac{4}{5}; 3\right[$$

I. Etude de la fonction $\ln x$

1. Domaine de définition

$$D_{ln} =]0; +\infty[$$

2. Limites aux bornes

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

La droite $x = 0$ $est\ asymptote\ verticale$ à $\mathcal{C}_{ln}$

Etude de la branche infinie

Comme $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ alors il y'a possibilité de branche infinie

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\ alors\ \mathcal{C}_{ln}\ \ admet\ une\ branche\ parabolique\ de\ direction\ (ox)$$

3. Bijectivite de ln et le nombre e

On sait que lnx est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $]0; +\infty[\ vers\ \mathbb{R}. Donc\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \ln x = k$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[. En\ particulier\ , pour\ k = 1, \ln x = 1$ donc l'équation admet une unique solution et cette solution est le nombre réel e.

$$\ln e = 1 \ \ et \ln e^a = a \quad avec\ a\ un\ reel$$

$$e \approx 2{,}71828 \ldots$$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(\frac{x+1}{x-1}) = 1$
b) $ln^2 x + \ln x - 6 = 0$

Solution

a) $\ln(\frac{x+1}{x-1}) = 1$

L'équation est définie ssi $\frac{x+1}{x-1} > 0$

$$D_E =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\forall\ x \in D_E \qquad , \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$$

$$\frac{x+1}{x-1} = e \Leftrightarrow x + 1 = ex - e$$

$$x - ex = -e - 1 \Leftrightarrow x(1-e) = -e - 1$$

$$x = \frac{-1-e}{1-e} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$S = \left\{\frac{e+1}{e-1}\right\}$$

b) $ln^2 x + \ln x - 6 = 0$
L'équation est définie si $x > 0$

$$\forall\ x > 0\ Posons\ X = \ln x$$
$$L'equation\ devient\ \ X^2 + X - 6 = 0$$
$$X = 2\ ; \quad X = -3$$
$$Si\ X = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$
$$Si\ X = -3 \Rightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$$
$$S = \{e^2; e^{-3}\}$$

4. Tableau de variation

$$lnx\ est\ derivable\ sur\ ]0; +\infty[\ et\ (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$$

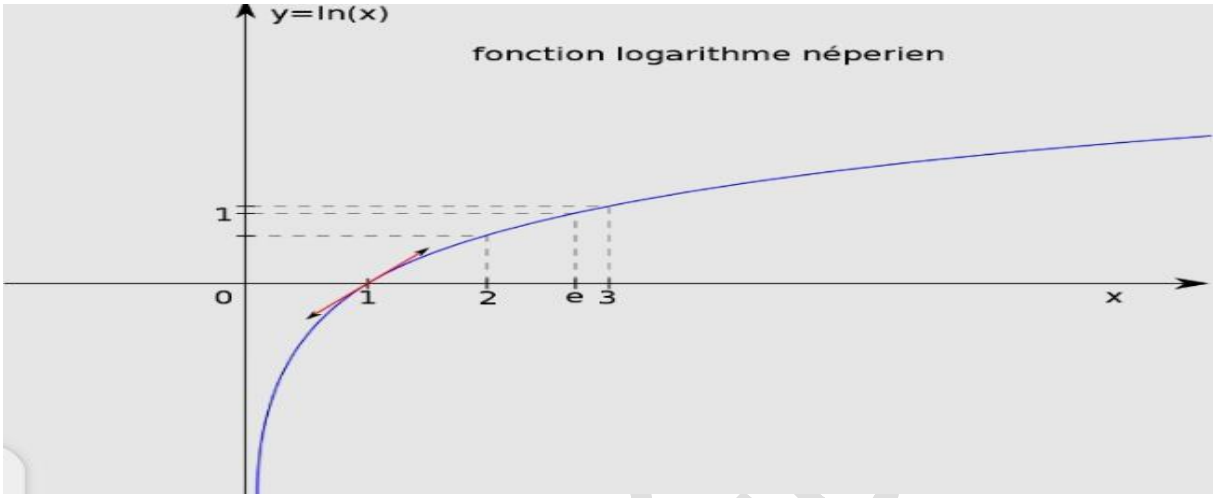
x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\ln x)'$	$+$
$\ln x$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. Représentation

Déterminons une équation de la tangente en 1

$$(T) = y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T) : y = x - 1$$



II. Limites usuelles

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \ln x \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Preuve

- Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

  Soit $f(x) = ln\, x - \sqrt{x}$

$$f \ \exists \ ssi \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$D_f =]0; +\infty[$$

$$f \ etant\ derivable\ sur\ ]0; +\infty[\ car\ somme\ de\ deux\ fonctions\ derivables\ sur\ ]0; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

$$Posons\ 2 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

x	0		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$ln4 - 2 \approx -0{,}61$	$\searrow$	

$$\forall\, x \in]0;+\infty[\ f(x) < 0 \Rightarrow \ln x - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow \ln x < \sqrt{x}$$

$$x > 0\ donc\ \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\forall\, x > 1, on\ a: 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$Or\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\ donc\ d'apres\ le\ theoreme\ des\ gendarmes\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- Montrons que $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

  Posons $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$

  $Si\ x \longrightarrow 0^+ \Rightarrow X \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

- Montrons que $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$$Posons\ f(x) = \ln x\quad donc\ f(1) = 0; f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x\ est\ derivable\ sur\ ]0;+\infty[\ donc\ derivable\ en\ 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$$

- Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

  Posons $X = x + 1 \Leftrightarrow x = X - 1$

$$Si\ x \longrightarrow 0 \Leftrightarrow X \longrightarrow 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$$

<u>Exemple</u>

Calculer les limites suivantes

$a)\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln\sqrt{x}$ b) $\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$ c) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x}$ d) $\lim_{x\to+\infty} x\ln x - (\ln x)^2$

<u>Solution</u>

a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x\ln x = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} x\ln\sqrt{x} = 0}$$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}} = -\infty$$

c) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x(2+\frac{3}{x}\right]}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln(2+\frac{3}{x})}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\ln x} = 1$$

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln x} = 1}$$

d) $\lim_{x\to+\infty} x\ln x - (\ln x)^2$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x - (\ln x)^2 = \lim_{x\to+\infty} \ln x(x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln x(1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$$

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} x\ln x - (\ln x)^2 = +\infty}$$

III. Etude de la fonction $lnoU$

La fonction $lnoU$ est la composée de la fonction U suivie de la fonction ln .On la note aussi $\ln U$.

La fonction $\ln U(x)$ $existe\ ssi\ U(x) > 0$

<u>Exemple</u> :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = x + \ln(2x - 6) \qquad g(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1}) \qquad h(x) = ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

<u>Solution</u>

$$f(x) = x + \ln(2x - 6)$$

$$f\ existe\ ssi\ 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$D_f =]3; +\infty[$$

$$g(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$$

$$g\ existe\ ssi\ \frac{x-1}{x+1} > 0\ et\ x + 1 \neq 0$$

$$D_g =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$h(x) = ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$h\ existe\ ssi\ \begin{cases} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

1. Dérivée

Théorème :

$Soit\ U\ une\ fonction\ derivable\ et\ strictement\ positive\ sur\ un\ intervalle\ I. La\ fonction$ $\ln U$ est dérivable sur I et on a :$[\mathbf{\ln U}]' = \frac{\boldsymbol{U\prime}}{\boldsymbol{U}}$

Définition :

$La\ fonction\ \frac{U\prime}{U}$ est appelée dérivée logarithmique de U

Conséquence (Primitive de $\frac{U\prime}{U}$)

Soit U une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.La fonction $\frac{U\prime}{U}$ a pour primitive sur $I\ la\ fonction\ \ln|U|$.

- $[\ln|U|(x)] = \ln|U(x)| = \ln[U(x)]\ si\ U(x) > 0$
- $[\ln|U|(x)] = \ln|U(x)| = \ln[-U(x)]\ si\ U(x) < 0$

Exemple :

1) Déterminer la dérivée de la fonction $f: x \to \ln(2-\cos x)$
2) Soit $g(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+3}$ Donner une primitive de $g\ sur\ \mathbb{R}$

Solution

1) $\forall\ x \in \mathbb{R}, 2 - \cos x > 0\ donc\ D_f = \mathbb{R}$

La fonction $x \to 2 - \cos x\ \ est\ derivable\ et\ strictement\ positive\ sur\ \mathbb{R}\ donc\ f\ est$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{(2-\cos x)'}}{\boldsymbol{2-\cos x}} = \frac{\boldsymbol{\sin x}}{\boldsymbol{2-\cos x}}$$

2) Donnons une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Posons $u(x) = x^2 - x + 3 \qquad donc\ u'(x) = 2x - 1$

$$f(x) = 2\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$Donc\ f\ a\ pour\ primitive\ sur\ \mathbb{R}, F(x) = 2\ln|u(x)|$$

$$\boldsymbol{F(x) = 2\ln|x^2 - x + 3| = 2\ln(x^2 - x + 3)\ \ car\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ x^2 - x + 3 > 0}$$

$\boldsymbol{NB}: [\boldsymbol{\ln|U|}]' = \frac{\boldsymbol{U\prime}}{\boldsymbol{U}}$

2. Dérivée logarithmique d'un produit ou d'un quotient

Soient $U\ et\ V$ deux fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur un intervalle I.Les fonctions $ln|UV|$ et $\ln\left|\frac{U}{V}\right|$ sont dérivables sur I et on a :

$$[\boldsymbol{\ln|UV|}]' = \frac{\boldsymbol{U'}}{\boldsymbol{U}} + \frac{\boldsymbol{V'}}{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{U'V + V'U}}{\boldsymbol{UV}} \qquad ; \left[\boldsymbol{\ln}\left|\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}}\right|\right]' = \frac{\boldsymbol{U'}}{\boldsymbol{U}} - \frac{\boldsymbol{V'}}{\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{U'V - V'U}}{\boldsymbol{UV}}$$

Exemple :

Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où $f\ est\ derivable$

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
b) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$
c) $f(x) = \ln[x(x-1)^2]$

Solution

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$La\ fonction\ x \to \frac{x+1}{x-1}\ est\ derivable\ et\ strictment\ positive\ sur\ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}}$$

b) $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$
$La\ fonction\ x \to \left|\frac{x+1}{x-1}\right|\ est\ derivable\ et\ strictment\ positive\ sur\ \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$$f'(x) = \frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}}$$

c) $f(x) = \ln[x(x-1)^2]$
$La\ fonction\ x \to x(x-1)^2 est\ derivable\ et\ strictement\ positive\ sur\ ]0;+\infty[\setminus\{1\}$ alors f est dérivable sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}}$$

IV. Fonction logarithme décimal

1. Définition

On appelle fonction logarithme décimale ou fonction logarithme de base 10, la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ (notée log) par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

On a :$\forall\ x \in]0;+\infty[\ \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

2. Propriétés

$Pour\ tous\ reels\ a > 0\ et\ b > 0\ ,on\ a$:

- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
- $\log\frac{1}{a} = -\log a$
- $\log x^r = r\log x\ \ (r \in \mathbb{Q})$

__Remarque__ :

$\log 1 = 0;$ $\qquad \log 10 = 1\ ;$ $\qquad \forall\ r \in \mathbb{Q}, \log 10^r = r$

3. Variation

La fonction log est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall\ x \in]0;+\infty[\ \ ; log'(x) = \frac{1}{x\ln 10} > 0$ donc la fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

4. Usage que l'on peut faire

Le ph (potentiel d'hydrogène) d'une solution aqueuse est l'opposé du logarithme décimal de sa concentration en ion hydronium H_3O^+ exprimée en $mol.L^{-1}$

$$ph = -\log[H_3O^+]\ ;,$$

Cette relation est équivalente à $H_3O^+ = 10^{-ph} et\ est\ valable\ pour\ 10^{-6} \leq [H_3O^+] \leq 10^{-1}$

CHAPITRE 4 : FONCTION EXPONENNENTIELLE

Objectifs :

- Connaitre la définition de la fonction exponentielle
- Connaitre et savoir utiliser les propriétés
- Résoudre les équations et inéquations faisant intervenir l'exponentielle
- Connaitre et savoir utiliser les limites et les croissances comparées
- Déterminer les primitives des fonctions $(expo\ o\ u).u'$
- Faire une bonne étude des fonctions faisant intervenir l'exponentielle

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. Définition et propriétés

Rappel :La fonction lnx est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ $vers$ $\mathbb{R}$ donc elle admet une bijection réciproque définie de $\mathbb{R} \to]0;+\infty[$

1. Définition

La fonction exponentielle notée exp est la bijection réciproque de la fonction ln

$$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$$

$$x \to \exp(x)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, on\ convient\ de\ noter\ e^{x} au\ lieu\ de\ \exp(x)$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \forall\, y \in]0;+\infty[, \ln y = x \Leftrightarrow y = e^{x}$$

Conséquences :

- $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \ln e^{a} = a$
- $\forall\, b > 0, \quad e^{\ln b} = b$
- $e^{0} = 1\ \ et\ \ e^{1} = 1$

NB :$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x} > 0$

Sens de variation

La fonction $x \to e^{x}$ est continue et strictement croissante car fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante , c'est la fonction $x \to \ln x$

$\forall\ a\ et\ b\ des\ reels$

$$a = b \Leftrightarrow e^{a} = e^{b}$$

$$a \leq b \Leftrightarrow e^{a} \leq e^{b}$$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad e^{\frac{1-x}{x}} = 1$

Solution

L'équation est définie si $x \neq 0$

$$\forall\, x \neq 0; \quad e^{\frac{1-x}{x}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1-x}{x}} = e^{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \neq 0$$

$$S = \{1\}$$

2. Propriétés

$\forall$ *les reels a et b et n un entier , on a :*

- $e^{b} \times e^{b} = e^{a+b}$
- $\frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$
- $(e^{a})^{n} = e^{na}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $4e^{2x+1} - 1 = 0$
b) $2e^{2x} - 3e^{x} - 5 = 0$
c) $2e^{x} - 3e^{-x} - 5 = 0$

Solution

a)

$$4e^{2x+1} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4e^{2x+1} = 1$$
$$\Leftrightarrow e^{2x+1} = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 = \ln\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 = -\ln 4$$
$$x = \frac{-\ln 4 - 1}{2}$$
$$\boldsymbol{S} = \left\{\frac{-\ln 4 - 1}{2}\right\}$$

b)

$$2e^{2x} - 3e^{x} - 5 = 0$$
$$Posons\ X = e^{x}, l'\acute{e}quation\ devient$$
$$2X^{2} - 3X - 5 = 0$$
$$X = -1 \quad ; X = \frac{5}{2}$$
$$X = -1 \Rightarrow e^{x} = -1 \ impossible$$
$$X = \frac{5}{2} \Rightarrow e^{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{5}{2}$$
$$\boldsymbol{S} = \left\{\ln\frac{5}{2}\right\}$$

c) $2e^{x} - 3e^{-x} - 5 = 0$

$$2e^{x} - \frac{3}{e^{x}} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{2x} - 3 - 5e^{x}}{e^{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{2x} - 5e^{x} - 3}{e^{x}} = 0$$
$$2e^{2x} - 5e^{x} - 3 = 0$$
$$Posons\ X = e^{x}\ \ l'equation\ devient$$
$$2X^{2} - 5X - 3 = 0$$

$$X = -\frac{1}{2} \quad ; \quad X = 3$$

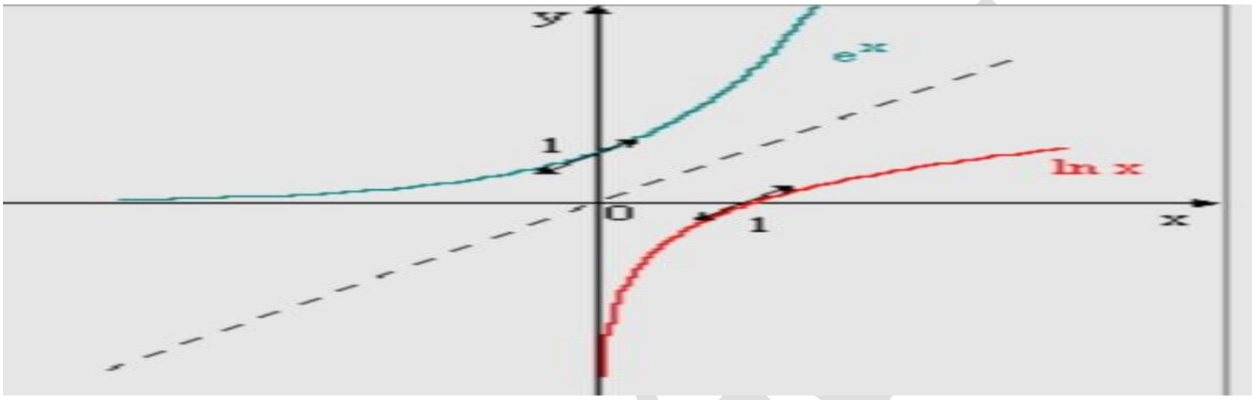
$$X = -\frac{1}{2} \Rightarrow e^x = -\frac{1}{2} \quad impossible$$

$$X = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

$$S = \{\ln 3\}$$

Représentation

Comme les fonctions $x \longrightarrow \ln x \ \ et\ x \longrightarrow e^x$ sont réciproques alors leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice .



3. Limites aux bornes et limites usuelles

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

4. Croissance comparée

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \ \ (\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

II. Etude des fonctions de la forme $e^{u(x)}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$$

Preuve

On sait que la fonction $\ln x$ admet une bijection réciproque de $]0; +\infty[\ vers\ \mathbb{R}$ .De plus $\ln x$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ donc sa bijection réciproque e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$Posons\ f(x) = \ln x$$

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y$$

$$(e^y)' = \frac{1}{f'(e^y)} = \frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$$

$$\boldsymbol{donc\ (e^x)' = e^x}$$

Conséquence

$\forall\, x \in D_u$, si u est dérivable alors :$\left[\boldsymbol{e^{u(x)}}\right]' = \boldsymbol{u'(x)e^{u(x)}}$

Exemple :

Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = e^{\frac{2x-3}{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x-3)}{(x+1)^2} e^{\frac{2x-3}{x+1}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} e^{\frac{2x-3}{x+1}}}$$

III. Exponentielle a base a($\boldsymbol{a > 0}$)

$$\forall\, a > 0\ ; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\ln a^r = r \ln a \Leftrightarrow e^{\ln a^r} = e^{r\ln a}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow a^r = e^{r\ln a}}$$

1. Définition

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ et notée $exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ est appelée fonction exponentielle de base a

2. Propriétés

Soit a un réel strictement positif ,$l\ et\ l'$ des réels , on a :

- $a^l \times a^{l'} = a^{l+l'}$
- $\frac{a^l}{a^{l'}} = a^{l-l'}$
- $\frac{1}{a^l} = a^{-l}$
- $(a^l)^n = a^{nl}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $9^x + 3^x - 12 = 0$

Solution

$$9^x + 3^x - 12 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x + 3^x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 12 = 0$$

Posons $X = 3^x$ $\quad , l'équation\ devient \quad X^2 + X - 12 = 0$

$$X=-4 \;\; ; X=3$$

$$X=-4 \Rightarrow 3^x=-4$$

$$X=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow e^{xln\,3}=3 \Leftrightarrow xln\,3=\ln 3 \Rightarrow x=\frac{\ln 3}{\ln 3}=1$$

$$S=\{1\}$$

3. Dérivée

Par définition,$\exp_a(x)=a^x=e^{xln\,a}$

$$(\exp_a(x))'=(a^x)'=\left(e^{xln\,a}\right)'=(xln\,a)'e^{xln\,a}=\ln a\times a^x$$

IV. Fonctions puissances

1. Définition

On appelle fonction puissance α la fonction

$$f_\alpha:]0;+\infty[\;\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x\rightarrow x^\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

On peut écrire aussi $x^\alpha=e^{\alpha lnx}$

2. Propriétés

$$\forall\, x>0\,, \alpha\; et\; \beta\; des\; reels$$

- $x^\alpha\times x^\beta=x^{\alpha+\beta}$
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$
- $\frac{1}{x^{-\beta}}=x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}$

3. Dérivée de la fonction f_α

f_α est dérivable sur $]0;+\infty[\;;f'_\alpha(x)=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=(\alpha\ln x)'e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$

$$\boldsymbol{f'_\alpha(x)=\alpha x^{\alpha-1}}$$

4. Etude la fonction $f_\alpha(x)$

Limites aux bornes :

$$Si\;\alpha>0\;alors$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$$

$$Si\;\alpha<0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=e^{\alpha\ln x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}=+\infty$$

Etudes des branches infinies si $\alpha>0$:

On sait que $\alpha>0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x}$

$$Si\ \alpha > 1\ alors\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1} = +\infty$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (oy)

$$Si\ \alpha < 1\ alors\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = 0$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (ox)

CHAPITRE 5 : LES NOMBRES COMPLEXES

OBJECTIFS :

- Connaitre les différentes formes d'un nombre complexe et leurs notations .
- Connaitre et utiliser les propriétés du conjugué d'un nombre complexe .
- Connaitre et utiliser les propriétés du module et d'un argument d'un nombre complexe .
- Connaitre et utiliser les formules d'Euler et la formule de Moivre .
- Déterminer les racines n^{ieme} d'un nombre complexe .
- Déterminer les racines n^{ieme} $de\ l'unité$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré à coefficients réels et complexes.

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. L' ensemble $\mathbb{C}$

Activité : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 1 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

Solution

b) $x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$ Impossible
$S = \emptyset$

b) $x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$
$S = \emptyset$

1. Définition

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$
- Dans $\mathbb{C}$, on definit une addition et une multiplication qui suivent les memes règles que dans $\mathbb{R}$
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = a + ib \quad avec\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$

Exemples: $2i$, $5, 2 + 4i$ $sont\ des\ nombres\ complexes$

Résoudre dans $\mathbb{C}$

a) $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x^2 = i$

$x = i\ ou\ x = -i$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad et\ \ x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

2. Forme algébrique

L'écriture d'un nombre complexe $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z $(a\ et\ b\ des\ reels)$.

- Le nombre a est appelé partie réelle et le nombre b représente la partie imaginaire .
  On note $Re(z) = a \quad et\ Im(z) = b$

Propriétés

Soit z le nombre complexe défini par $z = a + ib\ avec\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$

- z est réel si $b = Im(z) = 0$
- z est imaginaire pur si $a = Re(z) = 0$
  Soient z et z' deux nombres complexes
- $z = z'\ ssi\ Re(z) = Re(z')\ et\ Im(z) = Im(z')$
- $z\ est\ nul(\ z = 0)\ ssi\ \ Re(z) = Im(z) = 0$
  Le nombre 0 est appelé complexe nul.

Exemple :

1) Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

$z_1 = (3-2i)(-1+5i)$ $\qquad$ $z_2 = (2+3i)^2$ $\qquad$ $z_3 = \frac{1+i}{2-i}$

2) Soit $Z = z^2 + 2z - 3$.Determiner z pour que Z soit un réel

Solution

1) $z_1 = (3-2i)(-1+5i) = -3+15i+2i+10 = 7+17i$

$$\boldsymbol{z_1 = 7 + 17i}$$

$$z_2 = (2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$$

$$\boldsymbol{z_2 = -5 + 12i}$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4-i^2} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\boldsymbol{z_3 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i}$$

2) $Z = z^2 + 2z - 3$
$z = a + ib$

$$Z = (a+ib)^2 + 2(a+ib) - 3 = a^2 + 2abi - b^2 + 2a + 2bi - 3$$
$$Z = a^2 - b^2 + 2a - 3 + i(2ab + 2b)$$
$$Z\ est\ reel\ ssi\ Im(Z) = 0 \Rightarrow 2ab + 2b = 0$$
$$2b(a+1) = 0 \Leftrightarrow 2b = 0\ ou\ a + 1 = 0$$

$$b = 0 \quad ou\ a = -1$$

$$\boldsymbol{Z \in \mathbb{R}\ ssi\ z = -1 + ib\ ou\ z = a \quad (a\ et\ b\ des\ reels\,)}$$

3. Représentation dans le plan complexe

Dans toute la suite , on muni le plan d'un repère orthonormé $(0\,, \vec{u}, \vec{v})$

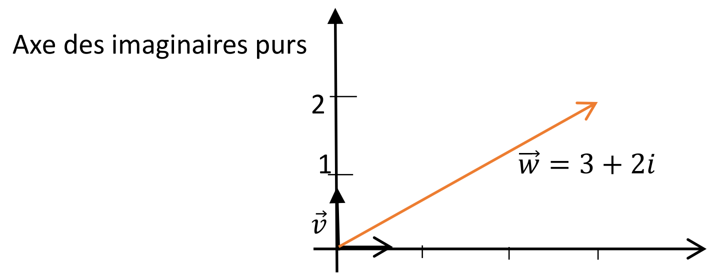
a. Définition

Soient $a\ et\ b\ des\ réels.$

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point $M(a,b)$ et le vecteur $\vec{w}(a,b)$
- A tout point $M(a,b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a,b)$ on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M et de vecteur $\vec{w}$.On note $M(z)$; $\vec{w}(z)$

Exemple :

Le point M (3 ; 2) a pour affixe $z = 3 + 2i$ de même que le vecteur $\vec{w}(3 + 2i)$



O $\vec{u}$ 1 2 3 axe des réels

b. Propriétés

Soient $M(z_M)$ *et* $N(z_M)$ *deux points du plan* , $\vec{u}(z)$ *et* $\vec{v}(z')$ *deux vecteurs*

- Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$
- $Le\ vecteur\ \vec{u} + \vec{v}\ a\ pour\ affixe\ z + z'$
- $Le\ vecteur\ k\vec{u}\ a\ pour\ affixe\ kz$

4. Nombres complexes conjugués

a. Définition

Soit $z = a + ib\ un\ complexe$ .On appelle nombre complexe conjugué de z le complexe $a - ib$ noté $\bar{z}$.

$$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$$

Exemple :

$$Si\ z = 5 - 4i\ alors\ \bar{z} = 5 + 4i$$

b. Propriétés

Soient $z\ et\ z'$ deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $\bar{\bar{z}} = z$

Soit $z = a + ib\ un\ complexe$

- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2ib$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $z\ est\ reel\ ssi\ z = \bar{z}$
- $z\ est\ imaginaire\ pur\ si\ z = -\bar{z}$
- L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$

Exemple 1 : Calculer

$$a = \overline{\overline{3 + 2i}} \qquad b = (-3 + 2i)(\overline{-3 + 2i})$$

Solution

$$a = \overline{\overline{3 + 2i}} = 3 + 2i$$

$$b = (-3 + 2i)(\overline{-3 + 2i}) = (-3 + 2i)(-3 - 2i) = (-3)^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 15$$

Exemple 2 :

Soit $Z = \frac{2z-4}{z-i} \qquad avec\ z \neq i$

1) Déterminer l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit réel
2) Déterminer l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit imaginaire pur

Solution

1) Déterminons l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit réel

Première méthode

$$\text{Z est réel ssi} \quad \overline{Z} = Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\overline{z}-4}{\overline{z}+i} = \frac{2z-4}{z-i}$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z} - 2i\overline{z} - 4z + 4i = 2\overline{z}z + 2iz - 4\overline{z} - 4i$$

$$\Leftrightarrow 2iz + 2i\overline{z} + 4z - 4\overline{z} - 4i - 4i = 0$$

$$2i(z+\overline{z}) + 4(z-\overline{z}) - 8i = 0$$

$$or\ z = x + iy\ avec\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$z + \overline{z} = 2x\ \ et\ z - \overline{z} = 2iy$$

$$On\ aura: \quad 2i(2x) + 4(2iy) - 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow i(4x + 8y - 8) = 0\ \ or\ i \neq 0\ donc\ 4x + 8y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

L'ensemble des points M pour que Z soit réel est la droite d'équation $x + 2y - 2$=0 privé du point $A(i)$

Deuxième méthode :

$$Z = \frac{2z-4}{z-i} \quad avec\ z \neq i$$

On a :$z = x + iy$

$$Z = \frac{2(x+iy)-4}{x+iy-i} = \frac{2x+2iy-4}{x+i(y-1)} = \frac{(2x+2iy-4)(x-iy+i)}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]}$$

$$Z = \frac{2x^2 - 2ixy + +2ix + 2ixy + 2y^2 - 2y - 4x + 4iy - 4i}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$Z = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{i(2x+4y-4)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$Z\ est\ reel\ ssi\ 2x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

L'ensemble des points M pour que Z soit réel est la droite d'équation $x + 2y - 2$=0 privé du point $A(i)$

2) Déterminons l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit imaginaire pur

Première méthode

$$Z\ est\ imaginaire\ pur\ si\ Z = -\overline{Z}$$

$$\frac{2z-4}{z-i} = -\frac{2\overline{z}-4}{\overline{z}+i}$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z} + 2iz - 4\overline{z} - 4i = -2z\overline{z} + 2i\overline{z} + 4z - 4i$$

$$\Leftrightarrow 4z\overline{z} + 2i(z - \overline{z}) - 4(z + \overline{z}) = 0$$

$$z = x + iy\ donc\ z\overline{z} = x^2 + y^2\ \ ; z - \overline{z} = 2iy \quad et\ z + \overline{z} = 2x$$

$$On\ aura\ \ 4(x^2+y^2)+2i(2iy)-4(2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4y-8x=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x)+4(y^2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M pour que Z soit imaginaire pur est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(1;\frac{1}{2})$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{5}}{2}\ privé\ du\ point\ A(i)$

<u>Deuxième méthode</u>

$$Z=\frac{2x^2+2y^2-4x-2y}{x^2+(y-1)^2}+\frac{i(2x+4y-4)}{x^2+(y-1)^2}$$

Z est imaginaire pur ssi

$$2x^2+2y^2-4x-2y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M pour que Z soit imaginaire pur est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(1;\frac{1}{2})$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{5}}{2}\ privé\ du\ point\ A(i)$

c. Conséquences

Si un nombre complexe z est une racine d'un polynôme à coefficients réels alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi racine de ce polynôme.

5. Module d'un nombre complexe

a. Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z=a+ib$ le nombre positif noté $|z|$ défini par :

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}$$

<u>Exemple</u> : Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

$$z_1=3-4i\quad ;z_2=-4\quad ;z_3=2i$$

<u>Solution</u>

$$z_1=3-4i$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$z_2 = -4$$

$$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

$$z_3 = 2i$$

$$|z_3| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$

Remarque :

- $Si\ z = a \in \mathbb{R}\ alors\ |z| = |a|$
- $Si\ z = bi\ avec\ b \in \mathbb{R}\ alors\ |z| = |b|$
- $Si\ z = 0\ alors\ |z| = 0$
- $Si\ |z| = \sqrt{z\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = \frac{1}{z}$

Conséquence : Un nombre complexe z est de module 1 ssi $\bar{z} = \frac{1}{z}$

b. Propriétés

Soient z_1 et z_2 deux complexes et $n \in \mathbb{N}^*$

- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$
- $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|} \quad (z_1 \neq 0)$
- $|{z_1}^n| = |z_1|^n$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Exemple :

1) Calculer les modules de z_1 et z_2 : $z_1 = (1-i)^4$; $z_2 = \frac{2-i}{4-3i}$
2) $Z = \frac{z-4-i}{z-i}$ $avec\ z \neq i$ .Déterminer l'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$

Solution

1) $$z_1 = (1-i)^4$$

$$|z_1| = |(1-i)|^4 = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$$

$$z_2 = \frac{2-i}{4-3i}$$

$$|z_2| = \left|\frac{2-i}{4-3i}\right| = \frac{|2-i|}{|4-3i|} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2) $Z = \frac{z-4-i}{z-i}$ $avec\ z \neq i$ .Déterminons l'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$
Soient $M(z)\ ,A(i)\ \ et\ B(4+i)$

$$Z = \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$$

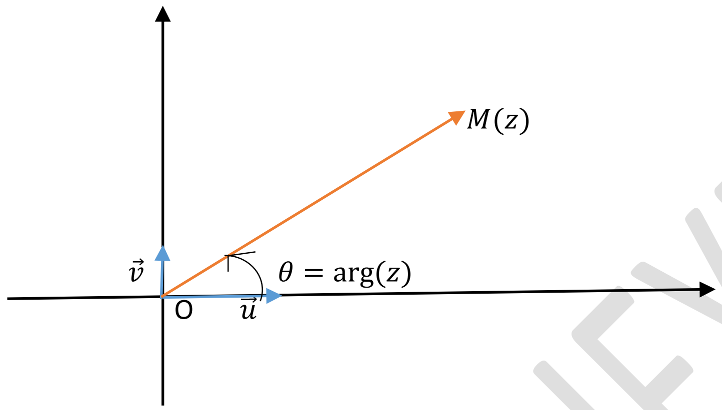
$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$$

Donc l'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$ est la médiatrice de $[AB]$

II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Argument d'une forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe d'image M avec $z \neq 0$.On appelle argument de z noté $arg(z)$, une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$



On a : $z = x + iy$

$$\cos\theta = \frac{x}{OM} \Rightarrow x = OM\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{OM} \Rightarrow y = OM\cos\theta$$

Donc $z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{Im\,(z)}{|z|}$$

Remarque :

$$Si\ z = 0\ alors\ \arg(z) = 0[2\pi]$$

Cas particuliers :

- $Si\ z \in \mathbb{R}^*{}_+\ alors\ \arg(z) = 0[2\pi]$
- $Si\ z \in \mathbb{R}^*{}_-\ alors\ \arg(z) = \pi[2\pi]$
- $Si\ z \in i\mathbb{R}^*{}_+\ alors\ \arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $Si\ z \in i\mathbb{R}^*{}_-\ alors\ \arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2. Définition

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe l'écriture

$$z = |\boldsymbol{z}|(\cos\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\theta})\ \ \boldsymbol{avec\ z \neq 0}\ \textbf{et}\ \boldsymbol{\theta\ un\ argument\ de\ z}$$

Exemple :

Donner l'écriture trigonométriques des complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Solution

$$z_1 = 1 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

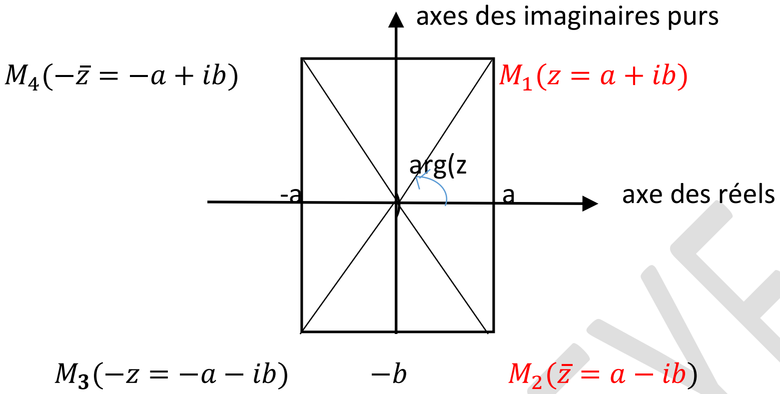
$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

Conséquences :



- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$

3. Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux complexes nos nuls et $n \in \mathbb{N}^*$

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$

Règle :

- Pour multiplier deux nombres complexes non nuls , on multiplie leurs modules et on additionne leurs arguments
- Pour diviser deux nombres complexes non nuls , on divise leurs modules et on fait la différence de leurs arguments

Exemple :

1) Soient $z_1 = 3\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ et $z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{5} + isin\ \frac{2\pi}{5}\right]$.Ecrire sous forme trigonométrique $z_1 \times z_2$
2) Soit $z = \frac{2(\sqrt{3}-i)^3}{(-1+i)^2}$ $Mettre\ z_3\ sous\ forme\ trigonometrique$

Solution

1) Soient $z_1 = 3\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ et $z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + isin\ \frac{2\pi}{3}\right]$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2 \times 3$$

$$\arg(z_1) \times \arg(z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\boldsymbol{z_1 \times z_2 = 6(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})}$$

2) Soit $z = \frac{2(\sqrt{3}-i)^3}{(-1+i)^2}$ $Mettons\ \ z_3\ sous\ forme\ trigonometrique$

$$|2(\sqrt{3}-i)^3| = 2\left|\sqrt{3}-i\right|^3 = 2\left(\sqrt{3+1}^3\right) = 16$$
$$|(-1+i)^2| = |-1+i|^2 = (\sqrt{1+1})^2 = 2$$
$$|z| = \frac{16}{2} = 8$$

$$\arg(z) = \arg\left[\frac{2(\sqrt{3}-i)^3}{(-1+i)^2}\right] = \arg\left[2(\sqrt{3}-i)^3\right] - arg[(-1+i)^2]$$

$$\arg(z) = \arg(2) + \arg(\sqrt{3}-i)^3 - 2\arg(-1+i))$$

$$\arg(z) = 0 + 3\arg\left(\sqrt{3}-i\right) - 2\arg(-1+i)$$

$$Soit\ \theta_1 = \arg\left(\sqrt{3}-i\right) \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$Soit\ \theta_2 = \arg(-1+i) \begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arg(z) = 3(-\frac{\pi}{6}) - 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2\pi = 0[2\pi]$$

$$\boldsymbol{z = 8(\cos 0 + i\sin 0)}$$

4. **Interprétation de :$\boldsymbol{arg(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C})}$**

<u>Théorème :</u>

Soient A, B , C et D des points du complexes d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D tels que :

$$z_A \neq z_B\ et\ z_c \neq z_D. On\ a:$$

$$\boldsymbol{arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})[2\pi]}$$

<u>Preuve</u>

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = arg(z_B - z_A) - arg(z_D - z_C)$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{CD})$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CD}; \vec{u})$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$$

<u>Conséquences</u>

Parallélisme de deux droites

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} et\ \overrightarrow{CD}\ sont\ colineaires\ \Rightarrow (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB}) = 0[\pi]$$

$$Donc\ arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$$

$$\boldsymbol{(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = k} \in \mathbb{R}^*$$

Perpendicularité de deux droites

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\boldsymbol{(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = ib\ avec\ b} \in \mathbb{R}^*$$

Alignement de trois points deux à deux distinctes

A,B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

A,B et C sont alignés $\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k} \in \mathbb{R}^*$

Triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib\ \ avec\ b} \in \mathbb{R}^*$$

Dans le cas où $|b| = 1$ alors le triangle est rectangle et isocèle en A

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |ib| = |b| = 1\ d'où\ AB = AC$$

Cocyclicité

A, B , C et D sont cocycliques ssi $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}) + k\pi$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) - arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}{\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}}\right) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}{\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{A, B, C\ et\ D\ cocycliques} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{z_C - z_A}}{\boldsymbol{z_B - z_A}} \times \frac{\boldsymbol{z_B - z_D}}{\boldsymbol{z_C - z_D}} \in \mathbb{R}$$

III. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Définition et propriétés

Pour tout réel θ , $on\ a : e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarque : $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

Exemple :

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme:

$$z == re^{i\theta}$$

Propriétés :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}, \theta\ et\ \theta'\ des\ reels\ on\ a:$$

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{\theta}}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Remarque :Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$

Exemple :Mettre sous la forme exponentielle le complexe $z = (1-\sqrt{2})(-1-i)$

Solution

$$|-1-i| = \sqrt{2} \quad et \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{z = \sqrt{2}(1-\sqrt{2})e^{-i\frac{3\pi}{4}} = (\sqrt{2}-1)e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$$

2. Formule de Moivre

<u>Théorème :</u> $\forall\, \theta \in \mathbb{R}\; et\; n \in \mathbb{N}^*$

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$

<u>Preuve</u>

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$
- $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (e^{-i\theta})^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$

<u>Usage que l'on peut faire</u>

Ecrire $\cos nx\; et\; \sin nx$ sous la forme d'une puissance de $\cos x\; et\; \sin x$

<u>Exemple 1</u> :

Ecrire $\cos 3x\;$ $en\; fonction\; de\; \cos x\; et\; \sin 3x\; en\; fonction\; de\; \sin x$

<u>Solution</u>

Posons A=$cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3$

$$A = cos^3x + 3cos^2x\, i\sin x + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3$$

$$A = cos\,^3x + 3(1-sin^2x)isinx + 3\cos x(-sin^2x) - i\,sin^3x$$

$$A = cos^3x + 3isin\,x - 3i\,sin^3x - 3\cos x(1-cos\,^2x) - isin^3\,x$$

$$A = cos^3x + 3isin\,x - 4i\,sin^3x - 3\cos x + 3cos^3x$$

$$A = \boldsymbol{4cos^3x - 3\cos x + i\,(-4sin^3x + 3\sin x)}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires $\begin{cases} \cos 3x = 4cos^3x - 3\cos x \\ \sin 3x = -\,4sin^3x + 3\sin x \end{cases}$

<u>Exemple 2</u> :

1) Ecrire sous forme trigonométrique $\sqrt{3} - i$
2) En déduire une écriture algébrique $de\; z = (\sqrt{3}-i)^8$

<u>Solution</u>

1) Ecrivons sous forme trigonométrique $\sqrt{3} - i$

$$\left|\sqrt{3}-i\right| = 2$$

$$Soit\;\theta\; un\; argument\; de \sqrt{3}-i \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{3} - i = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)}$$

2) Déduisons en une écriture algébrique de $z = (\sqrt{3} - i)^8$

$$z = (\sqrt{3} - i)^8 = \left[2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))\right]^8$$

$$z = 2^8\left[\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})\right]$$

$$z = 256(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\boldsymbol{z = -128 + 128i\sqrt{3}}$$

3. Formule d'Euler

Théorème :Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Preuve

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

En faisant la somme membre à membre on a :$2\cos\theta = e^{-\theta} + e^{-i\theta}$

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

On a aussi :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

En faisant la différence membre à membre , on obtient $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Usage que l'on peut faire : linéariser

Exemple : linéariser $sin^3x \ et \ cos^4x$

Solution

$$sin^3x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$sin^3x = \frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right)$$

$$sin^3x = \frac{1}{8i}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$sin^3x = \frac{1}{-8i}[2isin\,3x - 3(2isin\,x)]$$

$$\boldsymbol{sin^3x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x}$$

$$cos^4x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$cos^4x = \frac{1}{16}\left[(e^{ix})^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3(e^{-ix}) + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2 + 4\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^3 + (e^{-ix})^4\right]$$

$$cos^4x = \frac{1}{16}(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-i4x})$$

$$cos^4x = \frac{1}{16}\left[e^{i4x} + e^{-i4x} + 4(e^{i2x} + e^{-2x}) + 6\right]$$

$$cos^4x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$

$$\boldsymbol{cos^4x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}}$$

IV. Résolution d'équations

1. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

a. Définition

Soit a un nombre complexe et n un entier naturel $(n \geq 2)$ .On appelle racine n-ieme de a toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$

<u>Exemple</u> :

Les racines carrées de 1 sont : 1 et -1

Les racines carrées de -1 sont : i et $-i$

b. Résolution de l' équation $z^n = a$

- $\boldsymbol{1^{er} cas\ a = 0}$

On a :$z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$

- $\boldsymbol{2^{eme} cas\ a \neq 0}$

0 n'est pas solution de l'équation $z^n = a$ .Toute solution z de l'équation $z^n = a$ peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta} de\ meme\ a = |a|e^{i\alpha}$

Dans ce cas

$$z^n = a \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^n = |a|e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = |a|e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = |a| \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

<u>Théorème</u> :

Soit $a = |a|e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel $(n \geq 2)$,a admet n racines n-ieme, ce sont les nombres :

$$\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\ k \in \{0,1,2 \ldots\ldots;n-1\}}$$

Exemple :

Déterminer les racines cubiques de :$4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

Solution

Les racines cubiques de $z = 4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$ sont de la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3})}\ k \in \{0,1,2\}$$

$$|z| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32+32} = \sqrt{64} = 8$$

$$Soit\ \alpha\ un\ argument\ de\ z$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}\ k \in \{0,1,2\}$$

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}\ k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Les racines cubiques de $z = 4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\ sont\ z_0\ ,z_1\ et\ z_2$

Remarque : La somme des racines n-iemes d'un nombre complexe est nulle

Preuve

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\ k \in \{0,1,2 \ldots\ldots;n-1\}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \cdots \ldots + z_{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\alpha}{n}} + \sqrt[n]{|a|}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n})} + \cdots \ldots\ldots + \sqrt[n]{|a|}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)}{n})}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sqrt[n]{|a|}\,e^{i(\frac{\alpha}{n})}\left[1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2 + \cdots \ldots\ldots + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1}\right]$$

$or\ 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2 + \cdots \ldots \ldots + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1}$est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2 + \cdots \ldots \ldots + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1} = \frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \times 0 = 0$$

c. Racines nièmes de l'unité

Définition :Les racines n-iemes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1\ (n \geq 2)$

Théorème :Le nombre complexe 1 admet n racines n-iemes qui sont les nombres

$$\boldsymbol{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad , k \in \{0, 1, 2 \ldots., n-1\}}$$

Remarque :

- Si $a = |a|e^{i\alpha}\ alors\ z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\alpha}{n}}$ est une solution de l'équation $z^n = a$
- Si z_0 est une solution de l'équation $z^n = a$ alors les solution sont :$z_k = z_o e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1, \ldots n-1\}$

Exemple :

Déterminer les racines cubiques et les racines quatrièmes de l'unité

Solution

Déterminons les racines cubiques de 1

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad , k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les racines cubiques l'unité sont : 1 ;$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ et\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Déterminons les racines quatrièmes de l'unité

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}} \quad , k \in \{0,1,2,3\}$$

$$z_0 = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Les racines quatrièmes de l'unité sont :$1; -1; i\ et -i$

<u>Exercice d'application</u>

On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1) Donner une écriture trigonométrique de z_0
2) Montrer que ${z_0}^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}\ l'equation\ z^4 = 1$
4) En déduire les solutions de $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

<u>Solution</u>

$$z_0 = 1 - i\sqrt{3}$$

1) Donnons une écriture trigonométrique de z_0

$$|z_0| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$Soit\ \theta\ un\ argument\ de\ z_0$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{z_0 = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]}$$

2) Montrons que ${z_0}^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

$${z_0}^4 = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]^4$$

$$z_0 = 16\left[\cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})\right]$$

$$z_0 = 16\left[\cos(\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3})\right]$$

$$z_0 = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\boldsymbol{z_0 = -8 + 8i\sqrt{3}}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}\ l'equation\ z^4 = 1$

Les solutions de l'équation $z^4 = 1$ sont les racines quatrièmes de l'unité qui sont de la forme :

$$z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}} \quad , k \in \{0,1,2,3\}$$

$$S = \{1; -1; i; -i\}$$

4) Déduisons en les solutions de $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$

$$z^4 = -8 + 8i\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{z^4}{-8 + 8i\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^4}{(1 - i\sqrt{3})^4} = \left(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$$

Posons $Z = \frac{z}{1-i\sqrt{3}}\ l'équation\ devient\ Z^4 = 1$

$$Z = 1\ ; Z = -1\ ; Z = i\ \ ; Z = i$$

$$Z = 1 \Rightarrow \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow z = 1 - i\sqrt{3}$$
$$Z = -1 \Rightarrow \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = -1 \Leftrightarrow z = -1 + i\sqrt{3}$$
$$Z = i \Rightarrow \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = i \Leftrightarrow z = \sqrt{3} + i$$
$$Z = -i \Rightarrow \frac{z}{1-i\sqrt{3}} = -i \Leftrightarrow z = -\sqrt{3} - i$$
$$S = \{1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\,; \sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\}$$

V. Equation du second degré

1. Méthode algébrique de recherche des racines carrées d'un nombre complexe non nul

Soient a, b , x et y des réels , z et Z des $nombres$ $complexes$

Posons $z = x + iy$ et $Z = a + ib$

$$\text{On a : } z^2 = Z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a + ib$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$$
$$\text{De plus } |z|^2 = |Z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

- Si $b = 0$ et $a > 0$, les $racines$ $carrées$ $sont$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $b = 0$ et $a < 0$, les $racines$ $carrées$ $sont$ $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$
- Si $b \neq 0$ $alors$ x et y $sont$ de $meme$ $signe$ si $b > 0$ et de $signes$ $contraires$ si $b < 0$

<u>Exemple</u> :

Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$

<u>Solution</u>

$$Posons\ \ z = x + iy\ \ avec\ x\ et\ y\ des\ reels$$

$$z^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = -12 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2)$\Rightarrow$ $2x^2 = 18 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

(1)−(2)$\Rightarrow$ $2y^2 = 8 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

(3)$\Rightarrow$ x et y $sont$ de $signes$ $contraires$

Les racines carrées de $5 - 12i$ $sont$: $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

2. Résolution

Définition

Soient $a, b\ et\ c\ des\ \ nombres\ complexes\ \ tel\ que\ a \neq 0$.Toute équation de la forme

$az^2 + bz + c = 0$ est appelée équation du second degré à une inconnue z

Propriété :

Soit $(E): az^2 + bz + c = 0\ avec\ a\ b\ et\ c\ des\ nombres\ complexes\ (a \neq 0)$.On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ une racine carrée dans $\mathbb{C}\ de\ \Delta$.

- $Si\ \Delta = 0\ donc\ (E)\ admet\ une\ solution\ double : z_0 = -\frac{b}{2a}$
- $Si\ \Delta \neq 0\ alors\ (E)\ admet\ deux\ solutions\ distincts :$

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad et\ z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

Cas particulier

Considérons le cas où a, b et c sont des réels $(a \neq 0)$. $Dans\ ce\ cas\ \Delta\ est\ un\ reel$.

- $Si\ \Delta \geq 0\ alors\ l'équation\ az^2 + bz + c = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad et\ z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $Si\ \Delta < 0\ alors\ ses\ racines\ carrées\ dans\ \mathbb{C}\ sont: i\sqrt{-\Delta}\ et - i\sqrt{\Delta}$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions $\mathbb{C}$ qui sont des conjugués

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + (2+i)z + 2 - 2i = 0$
b) $z^2 + z + 1 = 0$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + (2+i)z + 2 - 2i = 0$

$\Delta = (2+i)^2 - 4(2-2i)$

$\Delta = 4 + 4i - 1 - 8 + 8i$

$\Delta = -5 + 12i$

Cherchons les racines carrées de Δ

Soit $\delta = x + iy\ une\ racine\ carée\ de\ \Delta$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ 2xy = 12 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\ ou\ x = -2$

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 18\ \Leftrightarrow y = 3\ ou\ y = -3$

$(3) \Rightarrow x\ et\ y\ sont\ de\ meme\ signe$

Donc les racines carrées de $\Delta\ sont : 2 + 3i\ et - 2 - 3i$

$$z_1 = \frac{-2-i-2-3i}{2} \qquad et\ z_2 = \frac{-2-i+2+3i}{2}$$
$$z_1 = -2-2i \quad ; \quad z_2 = i$$
$$S = \{-2-2i\,;i\}$$

b) $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$
$$S = \left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Recherche de solutions particulières :factorisation par $z - z_0$

Les propriétés énoncées en classe de 1^{ere} sur les polynômes à coefficients réels restent valables pour les polynômes à coefficients complexes.

Exemple 1 :

Soit $(E): z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution réelle
2) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exemple 2 :

Soit $(E): z^3 - (2-2i)z^2 + (5-4i)z + 10i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur
2) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Solution

Exemple 1 :

Soit $(E): z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$

1) Montrons que (E) admet une solution réelle
   Soit a cette solution réelle

$$a^3 - (3+4i)a^2 - 4(1-3i)a + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 4a^2 i - 4a + 12ai + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 4a + 12 + (-4a^2 + 12a)i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a^2 - 4a + 12 = 0 \\ -4a^2 + 12 = 0 \end{cases}$$
$$-4a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow a = 0\ ou\ a = 3$$
$$\boldsymbol{a = 3}$$

Donc la solution réelle de (E) est $z_0 = 3$

2) Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$

	1	$-3-4i$	$-4+12i$	12
3		3	$-12i$	-12
	1	$-4i$	-4	0

$$z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0=(z-3)(z^2-4iz-4)$$

$$Posons\ z^2-4iz-4=0$$

$$\Delta=-16+16=0$$

$$z_0=\frac{4i}{2}=2i$$

$$S=\{3;2i\}$$

<u>Exemple 2</u> :

Soit $(E): z^3-(2-2i)z^2+(5-4i)z+10i=0$

1) Montrons que (E) admet une solution imaginaire

$$Soit\ ib\ la\ solution\ imaginaire\ pur$$

$$(ib)^3-(2-2i)(ib)^2+(5-4i)(ib)+10i=0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3+2b^2-2ib^2+5ib+4b+10i=0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+4b+(-b^3-2b^2+5b+10)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+4b=0 \\ -b^3-2b^2+5b+10=0 \end{cases}$$

$$2b^2+4b=0 \Leftrightarrow b=0\ ou\ b=-2$$

Donc la solution imaginaire pur est $z_0=-2i$

2) Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$

	1	$-2+2i$	$5-4i$	$10i$
$-2i$		$-2i$	$4i$	$-10i$
	1	-2	5	0

$$z^3-(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=(z+2i)(z^2-2z+5)$$

$$Posons\ z^2-2z+5=0$$

$$\Delta=4-20=-16=(4i)^2$$

$$z_1=\frac{2-4i}{2}=1-2i \quad ; \quad z_2=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

$$S=\{-2i;1-2i;1+2i\}$$

CHAPITRE 6 : TRANSFORMATIONS ET NOMBRES COMPLEXES

OBJECTIFS :

- Reconnaitre une translation , une rotation , une homothétie par son écriture complexe
- Connaitre et utiliser l'écriture complexe d'une translation , d'une rotation et d'une homothétie
- Utiliser ces transformation dans des démonstrations, des problèmes de construction , de la détermination des lieux géométriques .
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie.
- Déterminer les éléments caractéristique d'une similitude plane directe

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$

I. Ecriture complexe d'une transformation du plan

1. Définition

Une transformation F du plan transforme chaque point $M\ d'affixe\ \ z$ en un point M' d'affixe z'.L'écriture complexe de la transformation F est la relation $z' = f(z)$ où f est la fonction de $\mathbb{C}\ dans\ \mathbb{C}$ qui à tout $z\ associe\ z'$

<u>Remarque :</u>

On dit que : $F\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont associées

$M(z) \to M'(z')$ $\quad$ $z \to z'$

-$M(z)$ est invariaant par F $\Leftrightarrow z\ est\ invariant\ par\ f \Leftrightarrow z = f(z) \quad car\ z' = z$

2. Exemple d'écriture complexe

a. Translation

<u>Définition</u> :

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$t_{\vec{u}}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \longrightarrow M'$$

<u>Ecriture complexe</u>

Soient t une translation de vecteur $\vec{u}, z\ , z'et\ b\ les\ affixes\ respectifs\ de\ M, M'\ et\ \vec{u}.$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow z' - z = b$$
$$\Leftrightarrow z' = z + b$$

L'écriture complexe d'une translation de $vecteur\ \vec{u}\ d'affixe\ b\ est$:

$$\boldsymbol{z' = z + b}$$

b. Homothétie

<u>Définition</u>

Soit M un point du plan $et\ k\ \in \mathbb{R}^*$.On appelle homothétie de centre $\Omega\ et\ de\ rapport\ k$,la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$$h(\Omega, k) \quad : \quad \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \to M' \qquad tq \quad \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$$

Ecriture complexe :

Soient h l'homothétie de centre Ω et de rapport k , z , z' et ω les affixes respectifs de M, M' et Ω

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

L'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k est :

$$\boldsymbol{z' - \omega = k(z - w)}$$

c. Rotation

Soit Ω un point du plan et θ $un\ reel$.La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si M=M' alors M=Ω
- Si $M \neq M' alors$ $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$

Ecriture complexe

Soient r la rotation de centre Ω er d'angle $\theta, z, z' et\ \omega$ les affixes respectifs de M, M' et Ω

$$Si\ M \neq \Omega, r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg(\frac{z' - \omega}{z - \omega}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg(\frac{z' - \omega}{z - \omega}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$$

L'écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est :

$$\boldsymbol{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$$

Exemple :

A est un point du plan d'affixe $z_A = -2 + 3i$

1) Déterminer l'affixe du point B, image de A par la translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 2i$
2) Déterminer l'affixe du point C , image de A par l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et de rapport $k = -\frac{3}{2}$
3) Déterminer l'affixe du point D , image de A par le rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solution

1) Déterminons l'affixe du point B, image de A par la translation du vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1-2i$

$$t_{\vec{u}}(A) = B \Leftrightarrow z_B = z_A + z_{\vec{u}}$$
$$\Leftrightarrow z_B = -2+3i+1-2i$$
$$\boldsymbol{z_B = -1+i}$$

2) Déterminons l'affixe du point C , image de A par l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = 1+i$ et de rapport $k = -\frac{3}{2}$

$$h(A) = C \Leftrightarrow z_C - \omega = k(z_A - \omega)$$

$$z_C - (1+i) = -\frac{3}{2}(-2+3i-1-i)$$

$$z_C = 3 - \frac{9}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + 1 + i$$

$$\boldsymbol{z_C = \frac{11}{2} - 2i}$$

4) Déterminons l'affixe du point D , image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$r(A) = D \Leftrightarrow z_D - \omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - \omega)$$

$$z_D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-2+3i-1-i) + (1+i)$$

$$\boldsymbol{z_D = \left(1 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

II. Similitude directe plane

1. Définition

Une transformation S du plan est une similitude direct s'il existe un réel $k > 0$ $et\ un\ reel\ \theta$ tels que pour tout points M et N d'images respectives M' et N'par S , on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{kMN} \\ (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta[2\pi] \quad (M \neq N) \end{cases}$$

Le réel k est appelé rapport de similitude et le réel θ l'angle de similitude

Propriétés caractéristiques

Une transformation S du plan est une similitude directe si son écriture complexe est :

$$\boldsymbol{z' = az + b} \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \ et\ b \in \mathbb{C}$$

Le rapport de similitude est $k = |a|\ et\ son\ angle\ est\ \arg a$

Exemple :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$.On considère la transformation S d'écriture complexe :$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$

1) Déterminer la nature de S et donner son rapport et son angle
2) Déterminer l'affixe du point C image de A $(2 - i\sqrt{3})\ par\ S$

3) Déterminer l' affixe du point B tel que $S(B) = 0$
4) Donner l'écriture complexe de S^{-1}

Solution

1) Déterminons la nature de S et donner son rapport et son angle
   S est une similitude directe
   Son rapport est $k = |1 - i\sqrt{3}| = 2$ *et son angle est* $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$
2) Déterminons l'affixe du point C image de A $(2 - i\sqrt{3})$ *par* S

$$z_C = (1 - i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) + 2$$

$$z_C = 2 - i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} - 3 + 2$$

$$\boldsymbol{z_C = 1 - 3i\sqrt{3}}$$

3) Déterminons l' affixe du point B tel que $S(B) = 0$

$$(1 - i\sqrt{3})z_B + 2 = 0 \Leftrightarrow z_B = \frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{z_B = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4) Donner l'écriture complexe de S^{-1}

$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{z'-2}{1-i\sqrt{3}}$

$$\boldsymbol{z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}z' - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$D'où\ S^{-1}: z' = \boldsymbol{\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Remarque :

La réciproque d'une similitude direct de rapport k *et d'angle* θ est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ *et d'angle* $-\theta$

2. Forme réduite d'une similitude directe

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$

$$M(z)\ est\ invarainat\ par\ S \Leftrightarrow S(M) = M$$

$$\Leftrightarrow z = az + b$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)z = b$$

- $Si\ 1 - a = 0\ c-à-d\ a = 1$, S *est la translation de vecteur d'affixe* b
- $Si\ 1 - a \neq 0\ c-à-d\ a \neq 1\ alors\ z = \frac{b}{1-a}$. *S admet un unique point invariant* Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

Propriété

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$

- $Si\ a = 1$ *donc S est une translation de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* b

- $Si\ a \neq 1\ donc\ S\ admet\ un\ unique\ point\ invariant\ \Omega\ d'affixe\ \omega = \frac{b}{1-a}$
- L'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = |a|$
- La rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)[2\pi]$

L'écriture complexe est alors :

$$\boldsymbol{z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)}$$

Vocabulaire

•Ω est appelé centre de la similitude

•Une similitude directe S qui n'est pas une translation est déterminée par son centre , son rapport et son angle appelés éléments caractéristiques de cette similitude

Cas particulier

Soit S l'écriture complexe $z' = az + b$

- $Si\ a = 1\ , S\ est\ une\ translation$
- $Si\ |a| = 1\ et\ a \neq 1\ alors\ S\ est\ une\ rotation$
- $Si\ a \in \mathbb{R}^*\{1\}, S\ est\ une\ homothetie$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient $A(1+2i), B(3i)$, $C(-2+3i)$

Donner l' écriture complexe qui transforme A en B et B en C puis préciser ses éléments caractéristiques

Solution

$$z' = az + b$$

$$S(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \qquad (1)$$

$$S(B) = C \Leftrightarrow z_C = az_B + b \qquad (2)$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{3i + 2 - 3i}{1 + 2i - 3i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i$$

$$(2) \Rightarrow b = z_C - az_B = -2 + 3i - 3i(1+i) = -2 + 3i - 3i + 3 = 1$$

$$(\boldsymbol{S}): \boldsymbol{z' = (1 + i)z + 1}$$

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad et \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad et\ \frac{1}{1-(1+i)} = i$$

Donc S est une similitude directe de centre $\omega(i)$ $de\ rapport\ k = \sqrt{2} \quad et\ d'angle\ \theta = \frac{\pi}{4}$

CHAPITRE 7 : DENOMBREMENT

Pré requis :

- Connaitre la notion d'ensemble
- Déterminer l'union et l'intersection de deux ensemble

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre le vocabulaire suivant :ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini, produit cartésien- listes , arrangement ,permutation , combinaison , anagramme
- Utiliser les représentation pour dénombrer
- Connaitre et utiliser les formules des p-listes , arrangement , combinaison
- Connaitre les notations $n!$
- Modéliser les situations concrètes pour résoudre des problèmes de dénombrement
- Utiliser la formule du Binôme de Newton

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara (http://sunudaara.com)

Plan :(voir cours)

Déroulement Possible

I. Théorie des ensembles

1. Ensemble fini et cardinal

a. Cardinal d'un ensemble fini

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble .Il est noté $card\ (E)$

<u>Exemple :</u>

A=$\{a; x\ 1\ ; 2\}$ $\quad card(A) = 4$

B=$\{a; z\}$ $\quad card(B) = 2$

Card$(\emptyset) = 0$

b. Cardinal de la réunion ou l'intersection de deux ensembles

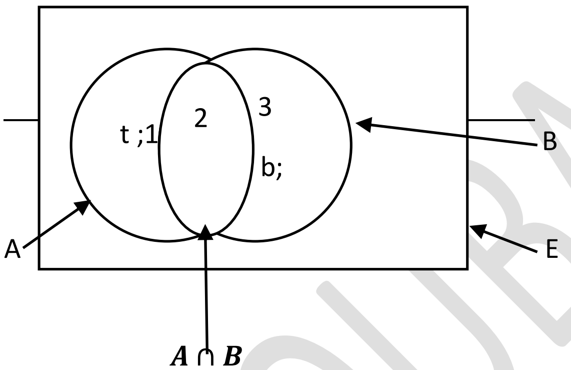
Soient A et B deux ensembles finis contenus dans un ensemble E , $(A \subset E\ et\ B \subset E)$

$$x\ \in A \cup B = \{x \in E\ \ / x \in A\ ou\ x \in B\}$$
$$x \in A \cap B = \{x \in E\ /x \in A\ et\ x \in B\}$$

Propriétés :

Soient A et B deux ensembles finis on a

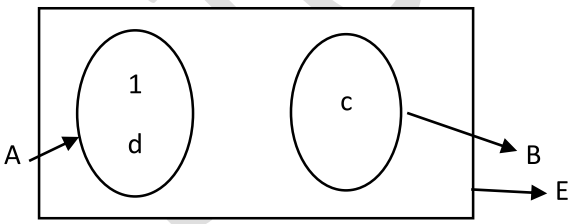
Card$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{Card}\ (\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$



Card (A)=3 ; Card (B)=4 Card$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{1}$

$Card(E) = Card(A \cup B) = 3 + 4 - 1 = 6$

Si A et B sont disjoints alors $A \cap B = \emptyset\ \ on\ a: (A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

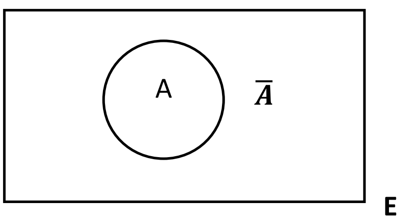


$Card(A) = 2\quad Card\ (B) = 1\quad Car(A \cap B) = 0$

$Card(E) = Card(A \cup B) = 2 + 1 = 3$

c. Cardinal du complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie de E , le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments qui sont dans E et non dans A.Il est noté $\bar{A}$ ou E\ A



on a $\boldsymbol{A} \cup \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{A} \cap \bar{\boldsymbol{A}} = \emptyset$

$$Card(A \cup \bar{A}) = Card(A) + Card(\overline{A}) \quad ; Card(E) = Card(A) + Card(\bar{A});$$

$$\boldsymbol{Card(A) = Card(E) - Card(\bar{A})}$$

Remarque :$A \subset A \cup B \quad ; \quad B \subset A \cup B \quad ; A \cap B \subset A \cup B$

Propriétés :

$$\forall \boldsymbol{A, B, C \text{ des ensembles de } E, \text{on } a}:$$

- $A \cup B = B \cup A \quad ; A \cap B = B \cap A \quad ; \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad ; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \quad ; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Card$\boldsymbol{(A \cup B \cup C) = car(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$

Exemple :

Dans une classe de 42 élèves , 25 pratiquent le football ; 30 pratiquent le basket et 20 pratiquent les deux.

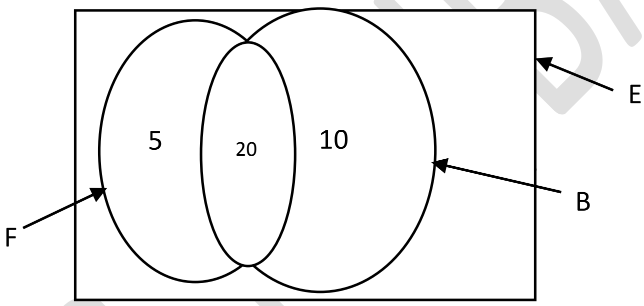
a) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football
b) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket
c) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent ni le football ni le basket

Solution

Soit E l'ensembles des élèves de cette classe $card\ (E) = 42$

F : l'ensemble ses élèves qui pratiquent le football, $card(F) = 25$

B :L'ensemble des élèves qui pratiquent le basket , $card\ (B) = 30$



a)Le nombre d'élèves qui font uniquement le foot est 5

b) Le nombre d'élèves qui font uniquement le basket est 10

Autre méthode

$a) \quad card(F \setminus B) = card(F) - card(F \cap B) = 25 - 20 = 5$

$b) \quad card(B \setminus F) = card(B) - card(B \cap F) = 30 - 20 = 10$

$Card(\overline{F \cup B}) = card(E) - card(F \cup B) = 42 - (25 + 30 - 20) = 7$

Donc il y a 7 élèves qui ne pratiquent ni le foot Ball ni le basket.

d. Produit cartésien

Définition :

Soient A et B deux ensembles finis .On appelle le produit cartésien de A par B noté A$\times B$, l'ensemble des couples (a,b) tel que $a \in A \text{ et } b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \, ; a \in A \, , b \in B\}$$

Propriété :

Soit A et B deux ensembles finis :card(A$\times B) = card(A) \times card(B)$

Exemple :

Fatou dispose de 5 foulards , 4 bodys et 3 pantalons .Le nombre de façon possibles qu'elle peut les porter est :$4\times 3 \times 5 = 60$

II. Modélisation

1. P-listes ou P-uplets

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p$\in \mathbb{N}^*$; $E = \{x_1, x_2, \dots \dots x_n\}$.On appelle p-liste d'éléments de E ,toute liste $(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ de E distinct ou non.

Exemple : Les mots : maths ,chimie ,compo sont des 5 listes des 26 lettres de l'alphabet français.

Remarque :

Dans une $p - liste$,l'ordre des éléments est important et la répétition est permise.
Dans un tirage , on utilise l'outil $p - liste$ si le tirage st successif avec remise

b. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel. Le nombre de p- liste dans E est $\boldsymbol{n^p}$

Exemple 1 :

1)Le nombre de codes de 4 chiffres qu'on peut former avec les 10 chiffres est :$10^4 = 10000$

2) Le nombre de mots de 3 lettres (ayant un sens ou non) qu'on peut former est :

$$26^3 = 17576$$

1) Le nombre de codes de 2 lettres suivis de 2 chiffres qu'on peut former est :$26^2 \times 10^2 = 67600$

Exemple 2 :

Une urne contient 2 boules rouges , 3 noires et 1 blanches .On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne .

1) Déterminer le nombre de tirages possibles
2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :
   A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire »
   B : « un tirage unicolore »
   C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges »

Solution

1) Le nombre de tirages possibles :$6^3 = 216$
2) Les cardinaux des ensembles suivants
3) A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire »
   $Card(A)= 2^2 \times 3^1 = 12$
   B : « un tirage unicolore »
   $Card(B) =2^3 + 3^3 + 1^3 = 36$
   C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges »
   $Card(C) = 4^3 = 64$

2. P -listes éléments distincts : Arrangement

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.On appelle arrangement de p-éléments parmi n éléments , toute p -liste d'éléments de E deux à deux distincts.
Autrement dit , un arrangement est une p- liste dans laquelle il n'y a pas de répétition.

Remarque :

Dans un arrangement , l'ordre est important et la répétition n'est pas permise .
Dans un tirage , on utilise l'outil arrangement si le tirage est successif sans remise

b. Propriétés

Le nombre d'arrangement de p- éléments pris dans un ensemble à n éléments est noté A_n^p et définie par :$A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \times (n-p+1)$

Exemple : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

c. Notation factorielle

Soit n un entier , on appelle factorielle n le réel noté n ! défini par :

$$n! = \begin{cases} 0 \; si \; n = 0 \\ n(n-1)(n-2) \dots \dots .\times 3 \times 2 \times 1 \quad si \; n \neq 0 \end{cases}$$

Remarque : $\boldsymbol{n! = n(n-1)!}$

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots \dots .(n-p+1) \quad \times (n-p) \times \dots \dots \dots .3 \times 2 \times 1}{(n-p) \times \dots \dots .\times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple : $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 20$

Propriété :

$$A_n^0 = 1 \quad ; A_n^1 = n \quad ; A_n^n = n!$$

Permutation :

Une permutation est un arrangement de n éléments parmi n éléments. Le nombre de permutation de n éléments est $A_n^n = n!$

Exemple :

Le nombre de permutations possibles avec les lettres du mot Touba est $A_5^5 = 5! = 120$

Anagramme :

Une anagramme est une permutation de deux éléments distincts ou non

Le nombre d'anagramme du mot chimie est : $\frac{6!}{2!}$=360

Le nombre d'anagramme du mot PAPA est : $\frac{4!}{2! \times 2!}$=6

Exemple :

Dans une classe de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles, on veut élire un comité comprenant : un président , un vice-président et un trésorier(pas de cumul de poste) .

1) Déterminer le nombre de comités qu' on peut former
2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants

   A « un comité comprenant que des filles »

   B « un comité comprenant des personnes de même sexe »

   C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon »

   D « le président est un garçon »

   E « un comité comprenant au moins une fille »

   F « un comité comprenant au plus une fille »

Solution :

1)Le nombre de comités qu'on peut former est $A_{20}^3 = 6840$

2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :

A « un comité comprenant que des filles »

$$card(A) = A_8^3 = 336$$

B « un comité comprenant des personnes de même sexe »

$$card(B) = A_8^3 + A_{12}^3 = 1656$$

C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon »

$$card(C) = A_8^2 \times A_{12}^1 \times \frac{(2+1)!}{2! \times 1!} = 2016$$

D « le président est un garçon »

$$Card(D) = A_{12}^1 \times A_{19}^2 = 4104$$

E « un comité comprenant au moins une fille »

Première méthode :

On a 1 fille ou 2 filles ou 3 filles

$$card(E) = A_8^1 \times A_{12}^2 \times 3 + A_8^2 \times A_{12}^1 \times 3 + A_8^3 = 5520$$

Deuxième méthode :

Le complémentarité de E est $\bar{E}$: " $Ne\ pas\ obtenir\ de\ fille\ dans\ le\ comité$"

$$card(\bar{E}) = A_{12}^3 = 1320$$
$$card(E) = 6840 - card(\bar{E}) = 6840 - 1320 = 5520$$

F « un comité comprenant au plus une fille »

$$card(F) = A_8^1 \times A_{12}^2 \times 3 + A_{12}^3 = 4488$$

3. Combinaison

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.Une combinaison de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est une partie ou un sous ensemble de E.

Exemple :

$$A = \{0; 1; 2; 3; \dots \dots \dots .9\}$$

(1 ;2 ;3) ;(4 ;5 ;6) ;(9 ;0 ;1) sont des parties de 3 éléments de A.

Remarque :

Dans une combinaison , l'ordre n'est pas important et la répétition n'est pas permise.
Dans un tirage , on utilise l'outil combinaison si le tirage est simultané

b. Propriétés :

Le nombre de p-combinaison pris dans un ensemble à n éléments est noté C_n^p et est défini par :

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Exemple :

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$$

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1 \quad ; C_n^1 = n \quad ; C_n^n = 1 \quad ; C_n^{n-1} = n \quad ; C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

On a :

$$\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$$

Preuve

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

$$\boldsymbol{C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

Preuve

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}$$

Or $\boldsymbol{(n-p+1)! = (n-p)! \times (n-p+1) \quad et \quad p! = (p-1)! \times p}$

Donc $\boldsymbol{(n-p)! = \frac{(n-p+1)!}{(n-p+1)}} \qquad \boldsymbol{et \quad (p-1)! = \frac{p!}{p}}$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = n!\frac{n+1-p}{p!\,(n-p+1)!} + n!\frac{p}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{(n+1)!}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$\boldsymbol{C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

Exemple :

Une urne contient 3 boules rouges , 2 boules noires et 4 boules blanches .On tire simultanément 3 boules .

1) Déterminer le nombre de tirages possibles
2) Dénombrer les cardinaux des ensembles suivants :

   A : « obtenir 2 boules rouges et une boules noire »

   B : « obtenir un tirage unicolore »

   C : « obtenir un tirage tricolore »

Solution :

1)Le nombre de tirage possible :$C_{11}^3 = 165$

2) Les cardinaux des ensembles suivants :

A : « obtenir 2 boules rouges et une boule noire »

$$card(A) = C_3^2 \times C_2^1 = 6$$

B : « obtenir un tirage unicolore »

$$card(B) = C_3^3 + C_4^3 = 5$$

C : « obtenir un tirage tricolore »

$$card(C) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24$$

Formule du binôme de Newton :

Soient a et b des réels et n un entier naturel on a :

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}}$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^k b^{2-k} = C_2^0 a^0 b^{2-0} + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^{2-2} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^k b^{3-k} = C_3^0 a^0 b^{3-0} + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^2 a^2 b^1 + C_3^1 a^3 b^0$$

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$$

Triangle de Pascal :

La relation de Pascal nous permet de calculer les coefficients binomiaux :

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	2	35	35	21	7	1

CHAPITRE 8 : PROBABILITE

OBJECTIFS :

- Connaitre le vocabulaire probabiliste.
- Calculer la probabilité d'un évènement.
- Connaitre et utiliser les formules des probabilités au programme.
- Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement.
- Montrer que deux évènements sont indépendants.
- Utiliser la formule des probabilités totales pour résoudre des problèmes.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Calculer l'Esperance mathématique , la variance et l'écart type d'une variable aléatoire .
- Déterminer et représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire .
- Connaitre la formule de la loi binomiale et l'utiliser pour résoudre des problèmes.

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)

Plan : (Voir cours

Déroulement Possible

I. Expérience et évènement

1. Expérience

Le calcul des probabilités s'appuie sur des expériences aléatoires .Une expérience est dite aléatoire ssi :

- On ne peut pas prédire le résultat avec certitude
- On peut décrire l'ensemble des résultats possibles

Exemple : le jet d'un dé, la lancée d'une pièce de monnaie ……

2. Evènements et univers

En générale , on note $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ les résultats possibles d'une expérience aléatoire. L'ensemble de ses résultats ou éventualités est appelé l'univers .On note $\Omega = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_n\}$.

Un évènement A est un sous ensemble ou une partie de Ω

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé numéroté de 1 à 6 une fois donc $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}$ est un évènement

Evènement élémentaire : Tout évènement réduit à un singleton est un évènement élémentaire

Evènement contraire : L'évènement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω .Il est noté $\bar{A}$

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ et } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Evènement $<< \boldsymbol{A \text{ ou } B} >>: c'est\ l'evenement\ A \cup B$

Evènement $<< \boldsymbol{A \text{ et } B} >>$ **:** c'est l'évènement $A \cap B$

Evènement impossible :C'est l'ensemble vide $\emptyset$

Exemple :Obtenir 8 après avoir lancé un dé

Ω est l'évènement certain

II. Calcul de probabilité

Des évènements sont dits équiprobables s'ils ont la même chance d'être réalisés, c'est à dire la même probabilité

1. Règles et méthodes

Dans l'expérience qui consiste à lancer un dé à 6 faces numérotés de 1 à 6, on a l'univers

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $et\ card\ (\Omega) = 6$

- Si le dé est équilibré , non pipé , non truqué alors chaque évènement élémentaire à une chance sur 6 d'être réalisé
- La probabilité d'un évènement élémentaire est $\frac{1}{car(\Omega)}$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

La probabilité d'un évènement A est notée P(A) et est définie par :

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

2. Propriétés

Soient A et B deux évènements de Ω

- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1 \text{ et } P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 1

On veut choisir un jury de 5 membres parmi 15 professeurs : 7 de français , 2 de philosophie et 6 d'anglais .Les chances d'être choisies sont égales.

Calculer la probabilité des évènements suivants.

A : « Choisir 2 professeurs d'anglais et 3 de français »

B : « Choisir des professeurs de même discipline »

C : « Choisir autant de professeurs d'anglais que de français »

D « Choisir au moins un professeur de philosophie »

E : « Choisir au plus un professeurs de philosophie »

Solution

Calculons la probabilité des évènements suivants.

A : « Choisir 2 professeurs d'anglais et 3 de français »

$$P(A) = \frac{C_6^2 \times C_7^3}{C_{15}^5} = \frac{25}{143}$$

B : « Choisir des professeurs de même discipline »

$$P(B) = \frac{C_7^5 + C_6^5}{C_{15}^5} = \frac{9}{1001}$$

C : « Choisir autant de professeurs d'anglais que de français »

$$P(C) = \frac{C_7^2 \times C_6^2 \times C_2^1}{C_{15}^5} = \frac{30}{143}$$

D « Choisir au moins un professeur de philosophie »

Première méthode

$$P(D) = \frac{C_2^1 \times C_{13}^4 + C_2^2 \times C_{13}^3}{C_{15}^5} = \frac{4}{7}$$

Deuxième méthode

L'évènement contraire de D est $\overline{D}$: "$Ne\ pas\ choisir\ de\ professeur\ de\ philosophie$ "

$$P(\overline{D}) = \frac{C_{13}^5}{C_{15}^5} = \frac{3}{7}$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

E : « Choisir au plus un professeur de philosophie »

$$\frac{C_2^1 \times C_{13}^4 + C_{13}^5}{C_{15}^5} = \frac{19}{21}$$

Exemple 2

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6.O n tire au hasard un jeton de l'urne et on note $p_i, i \in \{1; 2; 2; 4; 5; 6\}$ la probabilité de tirer le jeton numéroté i.On suppose que les nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$

1) Calculer $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

2) Calculer la probabilité de P : « tirer un jeton numéro pair »

Solution

1) Calculons $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

On a : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$p_1 + (p_1 + \frac{1}{30}) + (p_1 + \frac{2}{30}) + (p_1 + \frac{3}{30}) + (p_1 + \frac{4}{30}) + p_1 + \frac{5}{30} = 1$

$6p_1 + \frac{1}{2} = 1$

$p_1 = \frac{1}{12}$

$p_2 = p_1 + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}$

De même : $p_3 = p_2 + \frac{1}{30} = \frac{3}{20}$, $p_4 = p_3 + \frac{1}{30} = \frac{11}{60}$; $p_5 = p_4 + \frac{1}{30} = \frac{13}{60}$; $p_6 = p_5 + \frac{1}{30} = \frac{1}{4}$

2) Calculer la probabilité de P : « tirer un jeton numéro pair »

$$p(P) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{7}{60} + \frac{13}{60} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

III. Probabilité conditionnelle

Exemple introductif

Dans une classe de 22 élèves, il y'a 14 garçons dont 4 qui aiment les maths et 8 filles dont 3 qui aiment les maths .On choisit au hasard un élève dans cette classe.

On note G : « l'élève choisi est un garçon »

F : « l'élève choisi est une fille »

M : « l'élève choisi aime les maths »

$\overline{M}$: « L'élève choisi n'aime pas les maths

On peut résumer la situation dans un tableau

X	G	F	TOTAUX
M	4	3	7
$\overline{M}$	10	5	15
TOTAUX	14	8	22

$P(G) = \frac{14}{22}$; $P(F) = \frac{8}{22}$; $P(G \cap M) = \frac{4}{22}$; $P(G \cap \overline{M}) = \frac{10}{22}$; $P(F \cap M) = \frac{3}{22}$; $P(F \cap \overline{M}) = \frac{5}{22}$

Maintenant sachant que l'élève choisi est un garçon , la probabilité pour qu'il aime les maths est $\frac{4}{14}$

Sachant que l'élève choisi est une fille , la probabilité pour qu'elle n'aime pas les maths est $\frac{5}{8}$

1. Définition

Soit B un évènement de probabilité non nul. On dit que la probabilité de A sachant que B est réalisée , notée par $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ et définie par :

$$P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$$

Remarque : Dans le cas d'une équiprobabilité on a :

$$P(A/B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$$

2. Définition

Soient A, B et C trois évènements , on a :

- $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$ avec $P(A) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 0$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A/B) \times P(B) + P(A/\bar{B}) \times P(\bar{B})$ avec $P(B) \neq 0$ *et* $P(\bar{B}) \neq 0$
- $P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$

Preuve

$$B \cup \bar{B} = \Omega \text{ et } B \cap \bar{B} = \emptyset$$

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$\text{donc } \boldsymbol{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A/B) \times P(B) + P(A/\bar{B}) \times P(\bar{B})}$$

Exemple :

Une urne contient 3 jetons rouges et 2 jetons verts .On tire successivement et sans remise 2 jetons de l'urne . On note

R_1 : « Tirer un jeton rouge au premier tirage »

R_2 : « Tirer un jeton rouge au second tirage»

V_1 : « Tirer un jeton vert au premier tirage »

V_2 : « Tirer un jeton vert au second tirage »

1) Déterminer P(R_1), $P(V_1)$, $P(R_2 / R_1)$; $P(V_2 /V_1)$; $P(V_2/V_1)$; $P(R_2/V_1)$
2) Quelle est la probabilité de tirer un jeton rouge au premier tirage et un jeton vert au second tirage
3) Calculer $P(R_2)$ *et* $P(V_2)$

Solution

1) $P(R_1) = \frac{3}{5}$, $P(V_1) = \frac{2}{5}$
   Si le jeton tiré au premier tirage est rouge donc l'urne va contenir :2 jetons rouges et 2 jetons verts d'où : $(R_2/R_1) = \frac{1}{2}$; $P(V_2/ R_1) = \frac{1}{2}$
   Si le jeton tiré au premier tirage est vert donc l'urne va contenir :3 jetons rouges et 1 jeton vert d'où $P(V_2/V_1) = \frac{1}{4}$; $P(R_2/V_1) = \frac{3}{4}$
2) La probabilité de tirer un jeton rouge au premier tirage et un jeton vert au second tirage
$$\boldsymbol{P(V_2 \cap R_1) = P(V_2/R_1) \times P(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}}$$
3) Calculer $P(R_2)$ *et* $P(V_2)$
$$P(R_2) = P(R_2/R_1) \times P(R_1) + P(R_2/V_1) \times P(V_1)$$
$$\boldsymbol{P(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}}$$
$$P(V_2) = P(V_2/R_1) \times P(R_1) + P(V_2/V_1) \times P(V_1)$$
$$\boldsymbol{P(V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}}$$

3. Evènements indépendants

a. Définition

Deux évènements sont indépendants si la probabilité de l'un n'est pas modifié par la réalisation de l'autre.

Autrement dit , A et B sont des évènements indépendants si :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ ou encore } P(A/B) = P(A) \text{ avec} P(B) \neq 0}$$

Remarque :

Si deux évènements A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$ independants .

b. Partition d'un ensemble

$B_1, B_2, \ldots \ldots \ldots . B_n$ forment une partition signifie que :

- $B_1, B_2, \ldots \ldots \ldots . B_n$ sont disjoints deux à deux
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \ldots \ldots \cup B_n = \Omega$

Formule des probabilités totales

Propriété : Si $B_1, B_2, \ldots \ldots \ldots . B_n$ forment une partition de Ω alors

- Pour tout évènement A , $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) =$
  $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$
- Pour tout i , $P(A \cap B_i) = P(A/B_i) \times P(B_i)$
  On en déduit que :

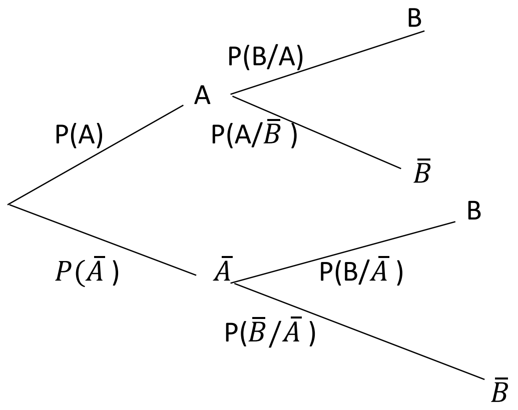
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i)$$

Arbre pondéré

Lorsqu'on enchaine des expériences aléatoires , l'élaboration d'un arbre est la méthode la plus simple et la plus sure .

Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant les probabilités conditionnelles .

- ✓ La pondération de la branche allant de l'origine vers le sommet A est P(A)
- ✓ La pondération de la branche allant du sommet A vers le sommet B est $P(B/A)$
- ✓ La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ces branches(et on obtient la probabilité de l'intersection qui sont sur ces branches)
- ✓ La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.



<u>Exemple</u> :

Dans un lycée ,40% des élèves sont des garçons et les 60% sont des filles . Parmi les garçons , 30% des élèves font la série S et le reste fait la série L. Parmi les filles 20% font la série S et le reste fait la série L. On choisit un élève au hasard et on note :

G : « l'élève choisi est un garçon »

F : « L'élève choisi est une fille »

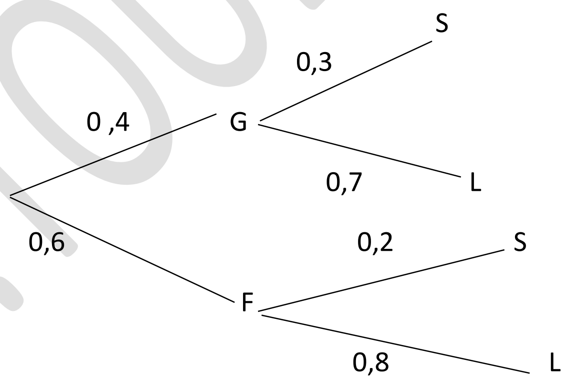
S : « l'élève choisit fait la série S »

L « l'élève choisit fait la série L »

1) Représenter ces données sur un arbre
2) Calculer P(S) et P(L)
3) Sachant que l' élève choisit fait la série S , calculer la probabilité pour qu'il soit un garçon

<u>Solution</u>

1) Représenter ces données sur un arbre



$P(G) = 0{,}4\,;\quad P(F) = 0{,}6\,;\quad P(S/G) = 0{,}3\quad ;\quad P(L/G) = 0{,}7;\quad P(S/F) = 0{,}2\quad P(L/F) = 0{,}8$

2) Calculons P(S) et P(L)

$P(S) = P(S/G) \times P(G) + P(S/F) \times P(F)$

$P(S) = 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}24$

$$\boldsymbol{P(S) = 0{,}24}$$

$P(L) = P(L/G) \times P(G) + P(L/\mathrm{F})\times\mathrm{P(F)}$

$P(L) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}76$

$$\boldsymbol{P(L) = 0,76}$$

3) Sachant que l' élève choisit fait la série S , calculons la probabilité pour qu'il soit un garçon

$$P(G/S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S/G) \times P(G)}{P(S)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4}{0{,}24} = 0{,}5$$

$$\boldsymbol{P(G/S) = 0,5}$$

IV. Variable aléatoires

1. Définition et Notation

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité .On appelle variable aléatoire définie sur Ω , toute application de Ω dans ℝ.

Soit Ω=$\{\omega_1, \omega_1 \dots \dots . \omega_P\}$

- On note souvent les variables aléatoires par X et par $x_1, x_2, \dots., x_n$ les valeurs prises par X
- $X = \{x_1, x_2, \dots., x_n\}$ est l'univers image .

Pour tout élément x , l'ensemble des éventualités de Ω qui ont pour image par X est noté $(X = x)$

2. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction qui à chaque x_i prise par X associe la probabilité p_i de l' évènement $(X = x_i)$

Remarque :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peur représentée par un tableau .

Valeurs prises par X (x_i)	x_1	x_2	…………………	x_n
$P(X = x_i)$ P_i	P_1	P_2	…………………	P_n

NB :Il faut toujours vérifier que la somme des probabilité vaut 1

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

3. Fonction de répartition

Notation :Pour tout réel x , l'ensemble des éventualités de Ω qui ont une image par X inférieur ou égal à x est noté $(X \leq x)$

Définition : On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X , l'application

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$$

$$x \longrightarrow P(X \leq x)$$

Remarque

- Pour $x < x_1, F(x) = 0$

- Pour $x \geq x_n \quad F(x) = 0$
- Pour $x_i \leq x < x_{i+1}, F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$
- F est une fonction croissante en escalier

Exemple :

Un porte-monnaie contient 4 pièces de 500FCFA et 6 pièces de 200FCFA.Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500FCFA figurant parmi les 3 pièces tirées

1) Déterminer la loi de probabilité de X

2) Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement

Solution

1) La loi de probabilité

Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ;2 ;3

$$P(x=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

$$P(x=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$$

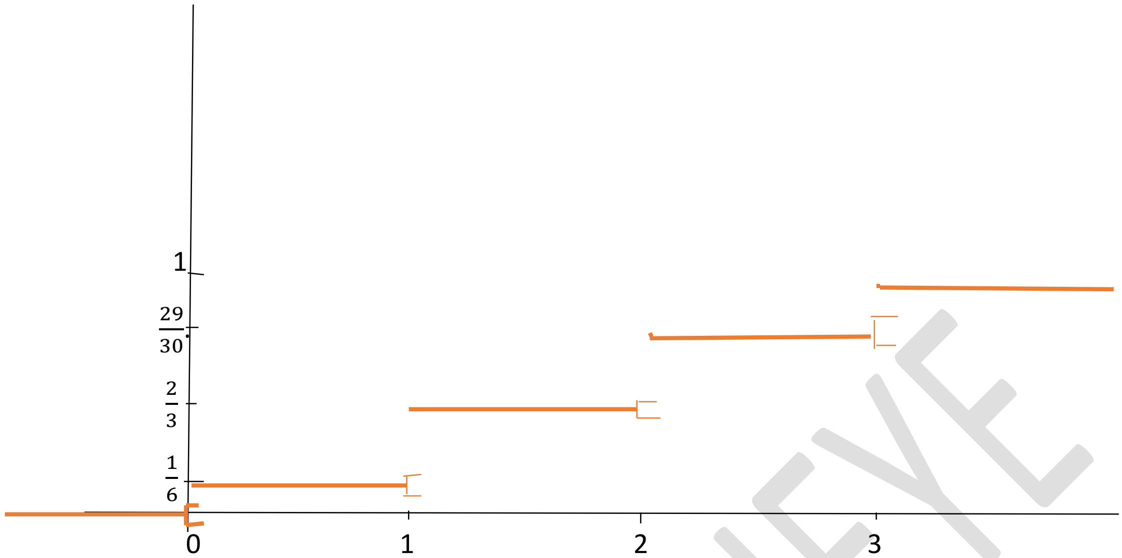
$$P(x=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2) La fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{6} & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & si\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{29}{30} & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$



4. Esperance mathématique , variance et écart –type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots p_n$.,

- On appelle espérance mathématique de X , le nombre réel noté E(X) défini par :

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots \ldots + p_nx_n}$$

- On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) et définie par :

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i{x_i}^2 - [E(X)]^2}$$

- On appelle écart type de X , le réel positif noté $\delta(X)$ *et definie par* :

$$\boldsymbol{\delta(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Dans l'exemple précèdent

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = \left(0 \times \frac{1}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3 \times \frac{1}{30}\right) = \frac{6}{5} = 1,2}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i{x_i}^2 - [E(X)]^2 = \left[\left(0^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2^2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{30}\right)\right] - \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{14}{25}}$$

$$\boldsymbol{\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{14}{25}} \approx 0,748}$$

V. Epreuve de Bernoulli-loi Binomiale

1. Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve aléatoire qui ne conduit qu'a deux éventualités dont l'une est appelée succès et l'autre échec. La probabilité P du succès est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

On appelle schéma de Bernoulli , la répétition d'une épreuve de Bernoulli c'est-à-dire une suite d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

2. Loi Binomiale

Un schéma de Bernoulli suit une loi Binomiale notée $\mathcal{B}$ et paramètre n(nombre d'épreuve de Bernoulli) et p(la probabilité du succés).On peut aussi noter $\mathcal{B}(n, p)$.

La loi de probabilité est définie par :

$$\boldsymbol{p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}$$

L'Esperance mathématique de cette loi est $\boldsymbol{E(X)=np}$

La variance est $\boldsymbol{V(X)=np(1-p)}$

L'écart type est $\boldsymbol{\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{np(1-p)}}$

<u>Exemple</u> :

Une urne contient 3 boules rouges , 2 boules blanches et 5 boules noires .Un enfant tire simultanément trois boules de l'urne

1) Calculer la probabilité de l'évènement A : « tirer des boules de même couleurs »
2) L'enfant répète 5 fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois boules tirées avant de procéder au tirage suivant

a) Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise 3 fois à l'issue des cinq tirages ?

b) Quelle la probabilité que l'évènement A se réalise au moins une fois à l'issue des cinq tirages ?

<u>Solution</u>

1) Calculons la probabilité de l'évènement A : « tirer des boules de même couleurs »

$$\boldsymbol{p(A)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}}$$

2) L'enfant répète 5 fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois boules tirées avant de procéder au tirage suivant

a) La probabilité que l'évènement A se réalise 3 fois à l'issue des cinq tirages ?

Nous avons un schéma de Bernoulli de paramètre 5 et $\frac{11}{120}$

$$p(X=3)=\boldsymbol{C_5^3(\frac{11}{120})^3(1-\frac{11}{120})^2 \approx 6,35.10^{-3}}$$

b) La probabilité que l'évènement A se réalise au moins une fois à l'issue des cinq tirages ?

On utilise la probabilité de l'évènement contraire

$$p(X \geq 1)=1-\boldsymbol{C_5^0\left(\frac{11}{120}\right)^0\left(1-\frac{11}{120}\right)^5 \approx 0,38}$$

CHAPITRE 9 : CALCUL INTEGRAL

OBJECTIFS :

- Connaitre et utiliser les propriétés de l'intégrale.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive , d'une intégration parties ou d'un changement de variable.
- Calculer les aires planes et des volume du type $V = \int_a^b S(z)dz$

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)

Plan : (Voir cours

Déroulement Possible

I. Intégral d'une fonction continue

1. Notion d'intégrale

a. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant $a\ et\ b$.L'intégrale de a à $b\ de\ f$ est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$Avec\ F(x)\ ,une\ primitive\ de\ f\ sur\ [a;b]$$

<u>Vocabulaire</u>

- $\int_a^b f(x)dx\ se\ lit$: « intégrale de a à b de $f(x)dx$
- $[F(x)]_a^b\ se\ lit\ F(x)\ prise\ entre\ a\ et\ b$
- $a\ et\ b\ sont\ les\ bornes\ de\ l'integrale$

<u>Exemple</u>

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx$; $\int_0^1 x^2 dx$; $\int_1^e \frac{dt}{t}$

<u>Solution</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

2. Propriétés

<u>Propriétés 1 :</u>

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions ayant des primitives sur I ,$(a, b\ , c) \in I^3\ et\ \alpha\ un\ réel$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
- $\int_a^b (f+g)xdx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

<u>Exemple :</u>

Calculer

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx \quad ;J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}cos^2x\,dx \qquad ;K=\int_{1}^{x}-\frac{1}{t^2}dt$$

Solution

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx$$

$$On\ a: |\sin x|=\begin{cases}\sin x & sin\ x\ \in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\\ -\sin x & si\ x\ \in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]\end{cases}$$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\sin x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

$$I=[\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\left[\cos 0-\cos(-\frac{\pi}{2})+\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]\right]$$

$$I=1-0-0+1=2$$

$$\boldsymbol{I=2}$$

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}cos^{\,2}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\ \ dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{J=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$$

$$K=\int_{1}^{x}-\frac{1}{t^2}dt=\left[\frac{1}{t}\right]_{1}^{x}=\frac{1}{x}-1$$

$$\boldsymbol{K=\frac{1}{x}-1}$$

Propriété 2 (Comparaison) :

Soient f et g deux fonctions continues sur I , a et b des éléments de $I(a\le b)$

- $Si\ \forall\ x\ \in[a\,;b]\ f(x)\ge 0\ alors\ \int_a^b f(x)dx\ge 0$
- $Si\ \forall\ x\ \in[a;b]\ on\ a: f(x)\le g(x)\ \ alors\ \int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

Exemple

$$Demontrer\ que\ \forall\ x\ \in[1;+\infty[\ \ln x<x-1$$

Solution

$$\forall\ t\ \in[1;+\infty[\ \ ,on\ a\ t>1\ et\ \frac{1}{t}<1$$

$$Les\ fonctions\ t\to\frac{1}{t}\quad et\ t\to 1\ sont\ continues\ sur\ [1;+\infty[$$

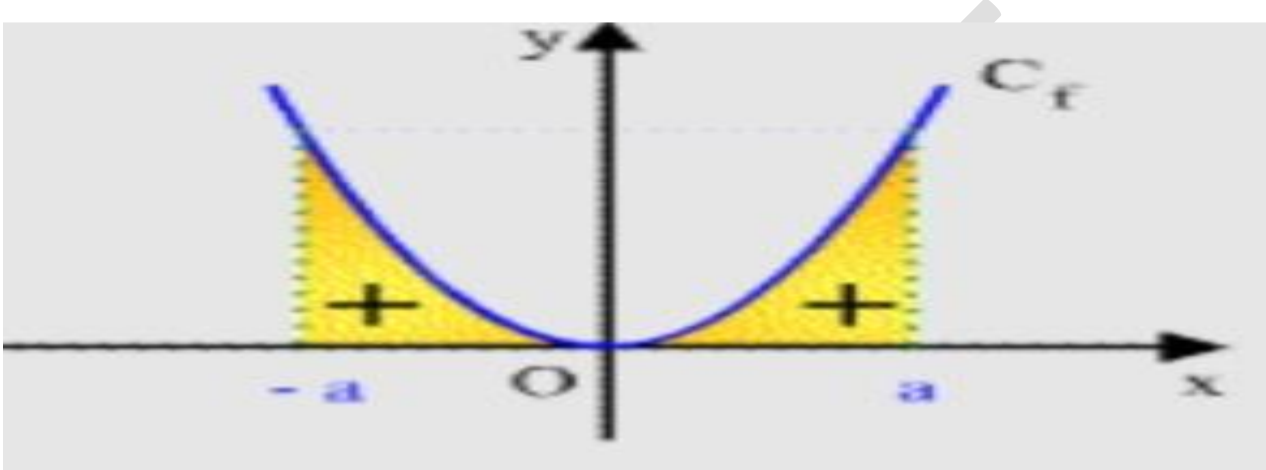
$$\frac{1}{t} < 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}dt < \int_1^x tdt \Leftrightarrow [\ln t]_1^x < [t]_1^x$$

$$\mathbf{\ln x < x - 1}$$

Propriétés 3

Soit f une fonction qui a une primitive sur I et a $\in I$

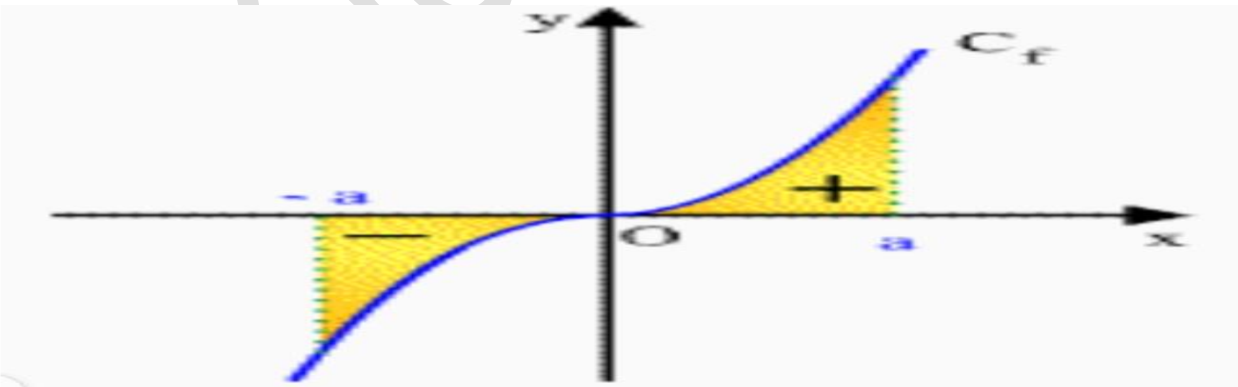
- $Si\ f\ est\ paire\ alors\ \int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)dx} = \mathbf{2}\int_{0}^{a} \boldsymbol{f(x)dx}$



Exemple

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_0^2 x^2 = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}\ Ua$$

- $Si\ f\ est\ impaire\ alors\ \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



Exemple :

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi) = 0$$

- $Si\ f\ est\ peridique\ de\ p\hat{e}riode\ k\ alors\ \int_{a}^{a+k} f(x)dx = \int_{0}^{k} f(x)dx$

Exemple :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \cos x = [sinx]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

Théorème de la moyenne

Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, $\exists$ *au moins un réel* $c \in [a;b]$ *tel que*:

$$\boldsymbol{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Le réel $f(c)$ est appelé valeur moyenne de f *sur* $[a;b]$

Exemple :

Calculer la valeur moyenne sur $[e-2; e^2-2]$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Solution

$$\bar{f} = \frac{1}{e^2-e}\int_{e-2}^{e^2-2} \frac{1}{x+2}dx = [\ln|x+2|]_{e-2}^{e^2-2} = \frac{1}{e^2-e}$$

Propriété de l'inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ *on a*:

$$\boldsymbol{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Inégalité de la moyenne

- Soit f une fonction continue sur I contenant a et b tel que $a \leq b$. *Si m et M des reels*
  $$\boldsymbol{\forall\, x \in [a;b]; m \leq f(x) \leq M \quad alors\; m(b-a) \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$$

Preuve :

$$\forall\, x \in [a;b] \;\; m \leq f(x) \leq M$$

$$donc \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

$$[mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$$

$$mb - ma \leq \int_a^b f(x)dx \leq Mb - Ma$$

$$\boldsymbol{D'\text{où}\; m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$$

- $\boldsymbol{Si\; |f(x)| \leq M (M \geq 0)\; sur\; [a;b]\; alors\; \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)}$

Exemple :

Montrer que $\forall\, n \geq 1$; $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

Solution

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad et\ I = [n; n+1]\ avec\ f\ continue\ sur\ I\ donc\ on\ a$:

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$$

$$\boldsymbol{d'o\grave{u}\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}}$$

II. Technique de calcul d'intégral

Pour un calcul d'intégral , on peut utiliser une de ces 3 techniques :utilisation des primitives usuelles , intégration par parties , changement de variable .

1. Utilisation des primitives usuelles

Exemple : Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

Solution

$$\frac{x^2+3x+1}{x+1} = x + 2 - \frac{1}{x+1}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \int_0^1 x + 2 - \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 2 - ln2 - 0$$

$$\boldsymbol{I = \frac{5}{2} - \ln 2}$$

2. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I tels que u' *et* v' continues sur I avec a *et* b des éléments de I.

$$\int_a^b (u \times v)' = \int_a^b u'v + v'u$$

$$\Longrightarrow [uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b v'u$$

$$D'o\grave{u} \quad \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b v'u$$

Exemple : Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t\, dt \quad ; J = \int_1^e \ln x\, dx \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx$$

$$L = \int_1^2 x^2 e^x ;\ \ M = \int_0^{\pi} (x+1)\cos x dx\ ; N = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

Solution

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t$$

$$Posons\ u'=\sin t \quad et\ v=t$$

$$u=-\cos t \quad et \quad v'=1$$

$$I=[-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos t dt=[-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t=1}$$

$$J=\int_1^e \ln x\,dx$$

$$posons\ u'=1\ \ et\ v=\ln x$$

$$u=x\ \ et\ v'=\frac{1}{x}$$

$$J=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=e-(e-1)=1$$

$$\boldsymbol{J=\int_1^e \ln x\,dx=1}$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$$

$$Posons\ u'=\cos 2x \quad et \quad v=x$$

$$u=\frac{1}{2}\sin 2x \quad et \quad v'=1$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{0}}\frac{1}{2}\sin 2x dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_1^2 x^2e^x$$

$$posons\ u'=e^x \quad ;v=x^2$$

$$u=e^x \qquad v'=2x$$

$$L=\int_1^2 x^2e^x=[x^2e^x]_1^2-2\int_1^2 xe^x$$

Intégrons une deuxième fois par parties

$$Soit\ S = \int_1^2 xe^x$$

$$Posons\ u' = e^x \qquad et \qquad v = x$$

$$u = e^x \qquad et\ v' = 1$$

$$S = \int_1^2 xe^x = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x = [xe^x]_1^2 - [e^x]_1^2$$

En remplaçant cette expression par sa valeur dans L ,on obtient

$$L = \int_1^2 x^2e^x = [x^2e^x]_1^2 - 2[xe^x]_1^2 + 2[e^x]_1^2 = 2e^2 - e$$

$$\boldsymbol{L = \int_1^2 x^2e^x = 2e^2 - e}$$

$$M = \int_0^\pi (x+1)\cos x dx$$

$$posons\ u' = \cos x \quad et\ v = x + 1$$

$$u = \sin x \quad et\ v' = 1$$

$$M = \int_0^\pi (x+1)\cos x\, dx = [(x+1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi sinxdx = [(x+1)\sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi = -2$$

$$\boldsymbol{M = \int_0^\pi (x+1)\cos x = -2}$$

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$Posons\ u' = e^x \quad et\ v = \sin x$$

$$u = e^x \quad et\ v' = \cos x$$

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x cosx\, dx$$

Intégrons une deuxième fois par parties

$$Soit\ A = \int_0^\pi e^x cosx\, dx$$

$$posons\ u' = e^x \quad et \quad v = \cos x$$

$$u = e^x \quad et \quad v' = -\sin x$$

$$A = \int_0^\pi e^x cosx\, dx = [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \sin x dx = [e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

En remplaçant cette expression par sa valeur dans N, on obtient :

$$N=\int_0^\pi e^x\sin x dx=[e^x\sin x]_0^\pi-[e^x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\sin x dx$$

$$2\int_0^\pi e^x\sin x dx=[e^x\sin x]_0^\pi-[e^x\cos x]_0^\pi$$

$$N=\int_0^\pi e^x\sin x=\frac{[e^x\sin x]_0^\pi-[e^x\cos x]_0^\pi}{2}=\frac{e^\pi+1}{2}$$

$$\boldsymbol{N=\int_0^\pi e^x\sin x=\frac{e^\pi+1}{2}}$$

3. Changement de variable

Pour calculer l'intégrale suivante , on peut procéder à un changement de variable

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)dx$$

$$Posons\ u=\alpha x+\beta \Rightarrow du=\alpha dx\quad d'où\ dx=\frac{1}{\alpha}du$$

$$Si\ x=a\ alors\ u=\alpha a+\beta\quad et\ si\ x=b\ alors\ u=\alpha b+\beta$$

$$\int_a^b f(\alpha x+b)dx=\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)\times\frac{1}{\alpha}du$$

<u>Exemple :</u> Calculer

$$A=\int_{-1}^0\frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt$$

<u>Solution</u>

$$A=\int_{-1}^0\frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt$$

$$Posons\ u=2t+3\Rightarrow du=2dt\ \Rightarrow dt=\tfrac{1}{2}du\quad et\ aussi\ t=\tfrac{u-3}{2}$$

$$Si\ t=0\ alors\ u=3\ et\ si\ t=-1\ alors\ u=1$$

$$A=\int_{-1}^0\frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt=\int_1^3\frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt u}\times\frac12 du=\frac14\int_1^3\frac{u}{\sqrt u}-\frac{3}{\sqrt u}du=\frac14\int_1^3\sqrt u-\frac{3}{\sqrt u}du$$

$$A=\frac14\left[\frac23\sqrt u-6\sqrt u\right]_1^3=\frac43-\sqrt3$$

$$\boldsymbol{A=\frac43-\sqrt3}$$

<u>Exercice d'application</u>

<u>Exercice 1</u>

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xdx \qquad et\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} cos^2 xdx$$

a) Calculer $I + 2J \quad et\ 2J - I$

b) En déduire les valeurs de $I\ et\ J$

Exercice 2

On considère la suite d'intégrale suivante :

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} \quad et\ I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1) a) Calculer $I_1\ et\ I_0 + I_1. En\ déduire\ I_0$

b) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $calculer\ I_n + I_{n+1}$

2) a) Prouver que pour tout élément $x\ de [0; 1]$ on a :

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}$$

b)En déduire un encadrement de I_n

c) Déterminer la limite de I_n

Solution

Exercice 1

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xdx \qquad et\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} cos^2 xdx$$

a) Calculons $I + 2J\ et\ 2J - I$

$$I + 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xdx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x + cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{1}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{I + 2J = \frac{\pi}{2}}$$

$$2J - I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} cos^2 xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x - sin^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\boldsymbol{2J - I = 0}$$

b) Déduisons en les valeurs de $I\ et\ J$

$$\begin{cases} I + 2J = \frac{\pi}{2} \\ -I + 2j = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4} \quad et\ J = \frac{\pi}{8}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{\pi}{4} \quad et\ J = \frac{\pi}{8}}$$

Exercice 2:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} \; et \; I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1)

a) Calculons $I_1 \; et \; I_0 + I_1$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

Déduisons en I_0

$$I_0 + I_1 = 1 \Leftrightarrow I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

b) Calculons $I_n + I_{n+1}$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \frac{e^{x(n+1)}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \frac{e^{nx}\times e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}dx$$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 e^{nx}dx = \frac{1}{n}[e^{nx}]_0^1 = \frac{1}{n}(e^n - 1)$$

$$\boldsymbol{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}(e^n - 1)}$$

2)

a) Prouvons que pour tout élément x de $[0;1]$ $on\ a$:

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

On a $\forall\, x \in [0;1]$ $\qquad 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx} \quad (car\ e^{nx} > 0)$$

$$Donc\ \forall\, x \in [0;1] \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

b)Déduisons un encadrement I_n

$$\forall\, x \in [0;1] \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \int_0^1 \frac{1}{2}e^{nx}$$

$$\boldsymbol{\frac{e^n - 1}{n(e+1)} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}}$$

3)Déterminons la limite de I_n

On a $\frac{e^n-1}{n(e+1)} \leq I_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-1}{n(e+1)} = +\infty$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$

Interprétation graphique de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ *et* C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o;\vec{i};\vec{j})$

$\int_a^b f(x)dx$ *est l'aire* $\mathcal{A}$*(en unité d'aire) du plan délimité par la courbe* C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$.

On note , aire du domaine défini par :

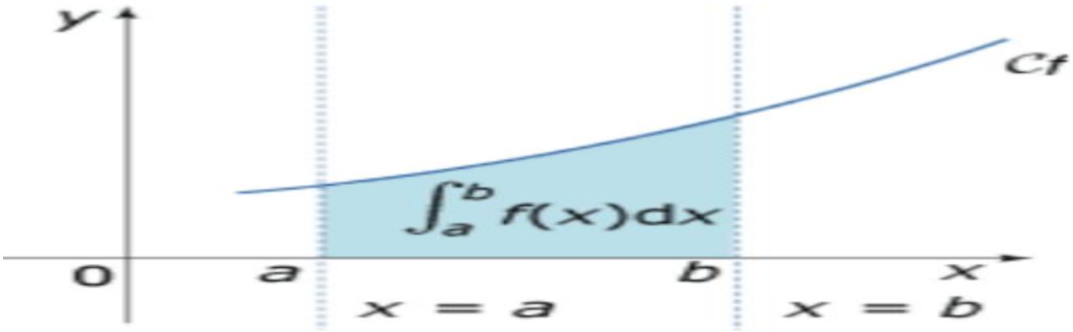
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad U_a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

III. Calcul d'aire et de volume

1. Calcul d'aire

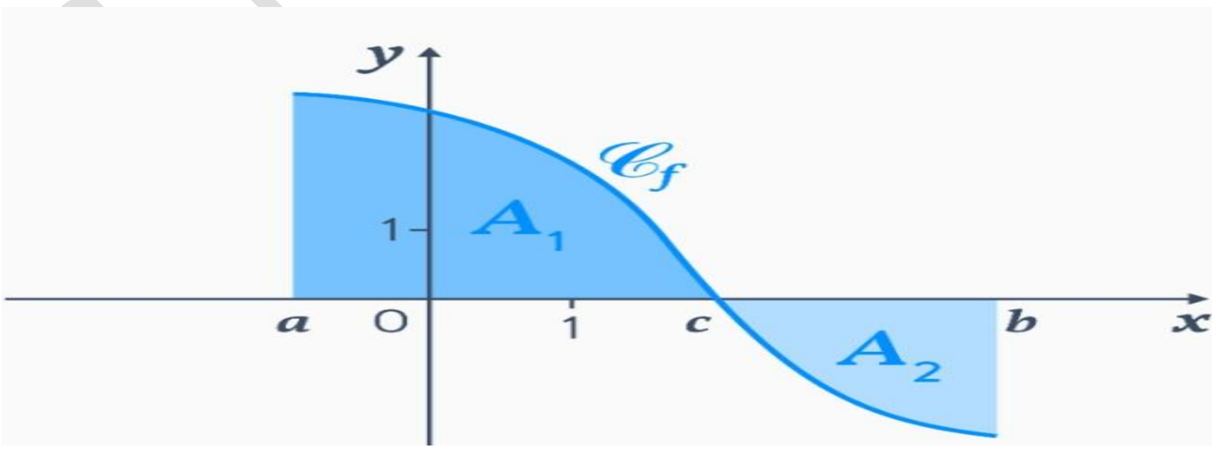
a. Calcul de l'aire d'un domaine délimité par une courbe et l'axe des abscisses

Soient f *une* fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ *avec* C_f *sa* courbe représentative



L'aire delimitée par les droites $x = a$, $x = b$, la courbe et l'axe des abscisses est :

$$A = \int_a^b f(x)dx \times Ua$$

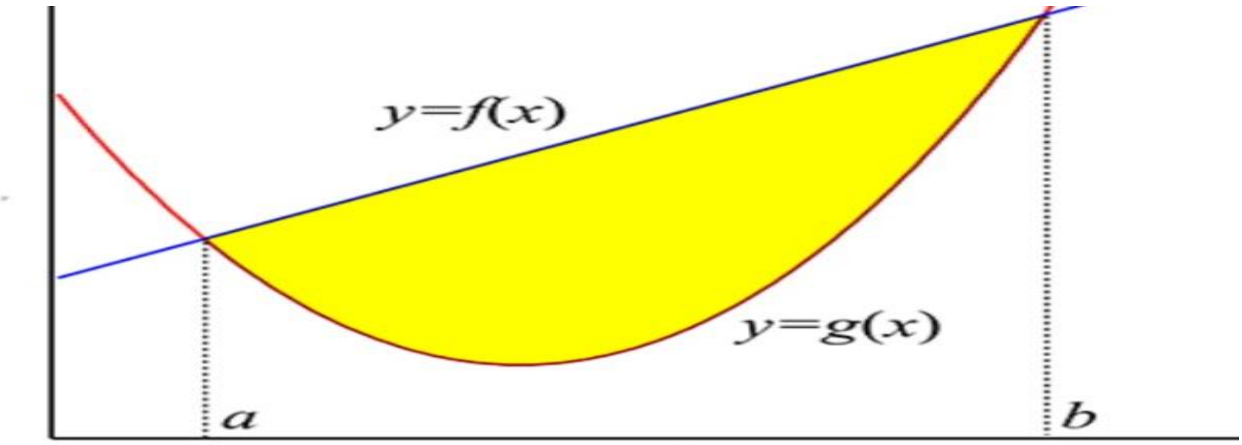


L'aire délimitée par les droites $x = a$; $x = b$, la Courbe et l'axe des abscisses est:

$$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \times Ua$$

b. Calcul d'aire d'un domaine délimité par deux courbes

Soient f et g $deux$ fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ $avec$ $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes représentatives $(f(x) \geq g(x))$.



$L'aire\ du\ domaine\ delimité\ par\ les\ coubes\ (\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_g)\ et\ les\ droites\ x = a\ et\ x = b\ est :$

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx \times Ua$$

2. Calcul de volume

a. Volume d'un solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses

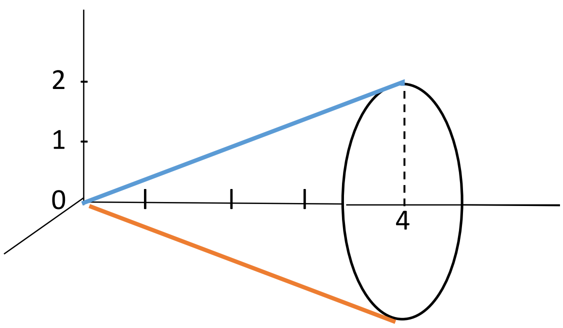
L'espace est muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. $Le\ volume\ du\ solide\ de\ révolution\ engendré\ par$ la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $[a; b]$à $un\ tour\ complet$ autour de l'axe des abscisses est :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \times U_v$$

$U_v = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\|$ (Unité de volume)

Exemple :

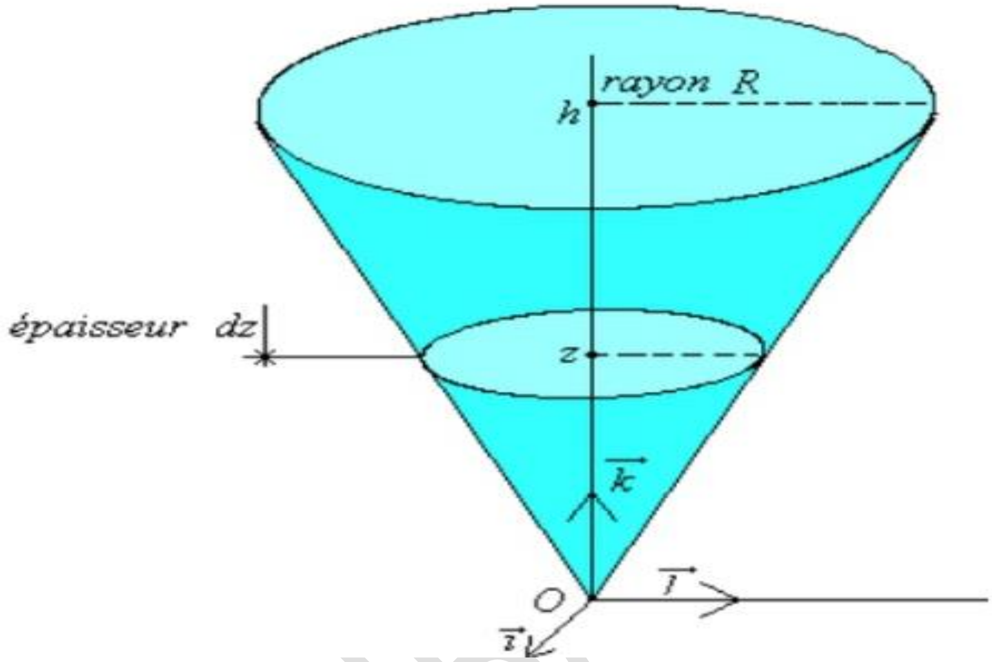
Calculons le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ $de\ la\ fonction\ f(x) = \frac{1}{2}x\ sur$ $[0; 4]$ à un tour complet au tour de l'axe des abscisses .



$$V = \pi \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 dx \times U_v = \pi \left[\frac{1}{12} x^3\right]_0^4 = \frac{16\pi}{3} cm^3$$

b. Volume d'un cône de révolution

Considérons le cône de révolution de hauteur h et de rayon de base r .La section de ce cône par le plan de côté z est un cercle de rayon r



D'après le théorème de Thales :$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Leftrightarrow r = \frac{R}{h} z$

On en déduit l'aire $S(z)$ du disque de rayon r en fonction de z :

$$S(z) = \pi r^2 = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$$

Le volume du disque d'épaisseur infinitésimale dz et de coté z :

$$V(z) = S(z)dz = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

Le cône de sommet O , de hauteur h et de rayon R est la somme infinie des disques d'épaisseur infinitésimale dz et de coté z donc

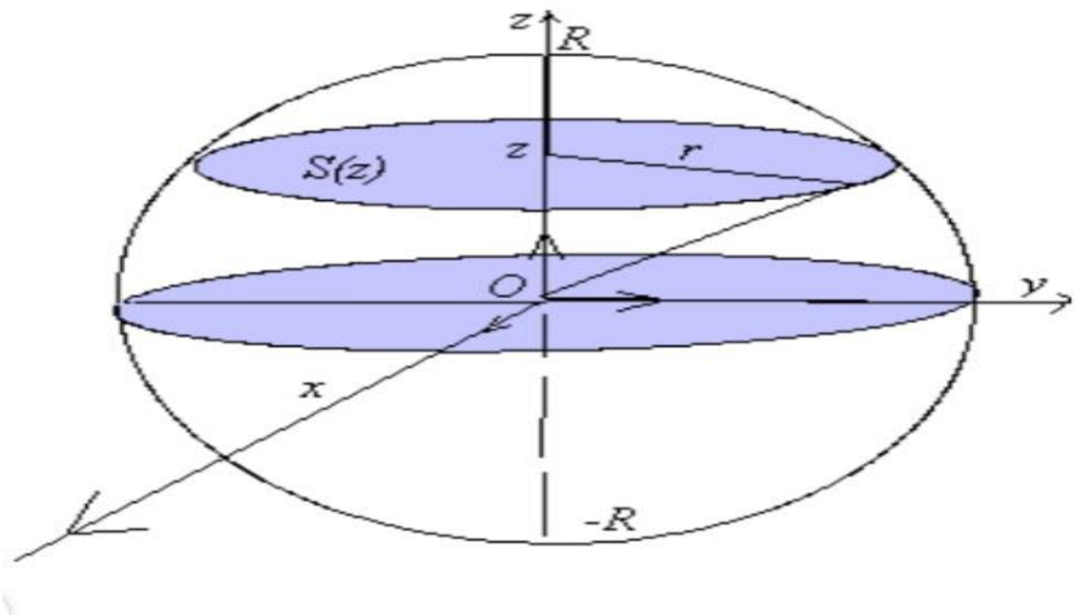
$$V = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} \times \frac{1}{3} h^3 = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\boldsymbol{V_{cone} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{Aire\ de\ base \times h}{3}}$$

Remarque :La formule et la démonstration sont identiques pour le volume d'une pyramide

c. Volume d'une sphère

Considérons une sphère de rayon R et de centre O .La section de la sphère par le plan de coté z est un disque de rayon r .



L'aire de ce disque est $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

Le volume de la sphère est :

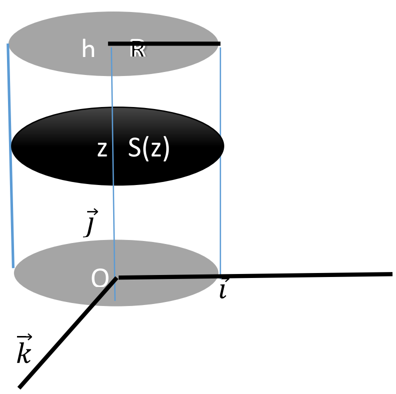
$$V = \int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)dz = \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}$$

$$V = \pi \left[\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - (R^3 + \frac{1}{3}R^3)\right] = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 - R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$\boldsymbol{V_{sphère} = \frac{4\pi}{3}R^3}$$

d. Volume d'un cylindre

Considérons un cylindre de hauteur de hauteur h .La section de ce cylindre par rotation est un disque de rayon z



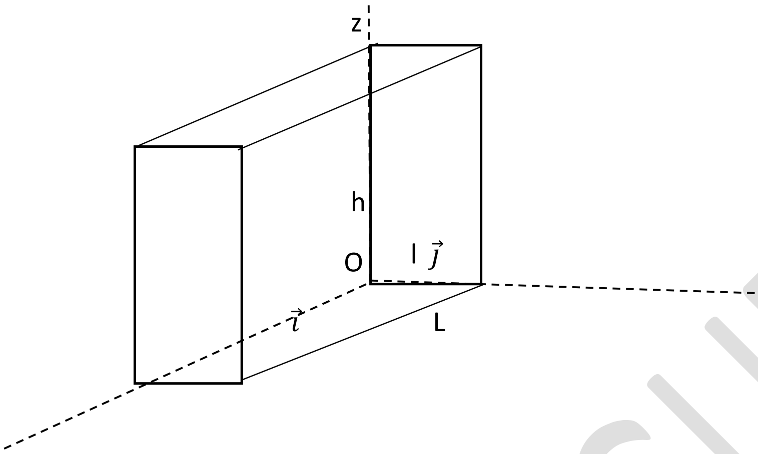
Le volume du cylindre est :

$$V = \int_0^h S(z)dz = \int_0^h \pi R^2 dz = \pi R^2 [z]_0^h = \pi R^2 h$$

$$\boldsymbol{V_{cylindre=}\pi R^2 h}$$

e. Volume parallélépipède rectangle

Considérons un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur l et de hauteur h.



$$V = \int_0^h A_R dz = \int_0^h lLdz = [lLz]_0^h = L \times l \times h$$

$$\boldsymbol{V_{Parallélépipéde} = L \times l \times h}$$

CHAPITRE 10 : EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE

OBJECTIFS :

- Connaitre la notion d'équation différentielle.
- Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du premier et du second ordre à coefficients constants .
- Résoudre les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants avec second membre.

Sources

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)

Plan : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. Généralités

1. Définition

Une équation différentielle est une relation qui relie une fonction inconnue et ses dérivées. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'' … … …

Exemple : $2y' + 3y = 0$; $2y'' - y' + 2y = x + 1$

2. Vocabulaire

- Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n. Ainsi $3y'' - 2y' + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.
- Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle I est appellée solution Sur I de cette équation différentielle.
- Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle sur un intervalle I c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation .

Exemple :

1)Résolvons dans $\mathbb{R}$, $l'équation\ (E_1): y' = 2x$

La fonction $x \to x^2 + c$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to 2x$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ $de\ (E_1)$ sont les fonctions $x \to x^2 + c\ (c \in \mathbb{R})$

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E_2): y'' = \cos x$

$$y'' = \cos x \Leftrightarrow y' = sinx + c \Leftrightarrow y = -\cos x + cx + k \quad ; (c; k) \in \mathbb{R}^2$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ $de\ (E_2)$ sont les fonctions $x \to -cosx + cx + k \quad (c; k) \in \mathbb{R}^2$

II. Equation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 , à coefficients constants est une équation de la forme :

$ay' + by = g(x) \quad (avec\ second\ membre\ )$

$ay' + by = 0\ (sans\ second\ membre\ ou\ équation\ homogène)$

1. Recherche de solution générale de l'équation homogène

$$Soit\ (E'): ay' + by = 0\ alors\ ay' = -by$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\frac{b}{a}x+c}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^c \times e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$y = ke^{-\frac{b}{a}x} \text{ où k est une constante}$$

Propriété 1 :

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E): ay' + by = 0$ sont les fonctions $f_k: x \to ke^{-\frac{b}{a}x}$

Propriété 2

Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de réels, l'équation différentielle $(E): ay' + by = 0$ admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en $x_0(f(x_0) = y_0)$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_1): 5y' + y = 0 \quad (E_2): 2y' - 3y = 0 \qquad (E_3): q' + \frac{1}{RC}q = 0(décharge\ d'un\ condensateur\ )$$

Solution

$$(E_1): 5y' + y = 0$$

$$Les\ solutions\ \ de\ (E_1)\ sont\ les\ fonctions\ f_k: x \to ke^{-\frac{1}{5}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(E_2): 2y' - 3y = 0$$

$$Les\ solutions\ \ de\ (E_2)\ sont\ les\ fonctions\ f_k: x \to ke^{\frac{3}{2}x}\ (k \in \mathbb{R})$$

$$(E_3): q' + \frac{1}{RC}q = 0$$

$$Les\ solutions\ \ de\ (E_1)sont\ les\ fonctions\ Uc_k: x \to ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (k \in \mathbb{R})$$

2. **Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre 1 avec second membre**

$$Soit\ (E'): ay' + by = g(x)$$

- Une fonction f_1 est une solution de (E) si elle est dérivable et si elle vérifie (E) .
  $$af'_1(x) + bf_2(x) = g(x)$$
- Si $g(x)$ est un polynôme de degré n alors $f\ _1$est aussi un polynôme de degré n
- Si $g(x)$ est de la forme $a\cos\beta x + b\sin\beta x\ alors\ f_1$ sera de la forme $A\cos\beta x + B\sin\beta x$

3. **Solution générale**

Une solution générale $y(x)\ de\ (E)$ est donnée par :

$$y(x) = f_2(x) + f_1(x)$$

Où $f_1(x)$ est une solution particulière de (E) $et\ f_2(x)\ une\ solution\ genrale\ de\ (E')$

Exercice d'application :

On considère l'équation différentielle (E)

$$(E): 2y' - 3y = x^2 + 5$$

1) Montrer qu'il existe un polynôme du second degré noté $f(x)\ solution\ de\ (E)$

2) Résoudre l'équation $(E'): 2y' - 3y = 0$
3) Déterminer la solution générale $\varphi(x)$ de (E) dont la dérivée s'annule en 0

Solution

On considère l'équation différentielle (E)

$$(E): 2y' - 3y = x^2 + 5$$

1) Montrons qu'il existe un polynôme du second degré noté $f(x)$ $solution\ de$ (E)

$$f\ est\ solution\ de\ (E) \Leftrightarrow 2f'(x) - 3f(x) = x^2 + 5$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$
$$2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 5$$
$$\Leftrightarrow 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c = x^2 + 5$$
$$\Leftrightarrow -3ax^2 + (4a - 3b)x + 2b - 3c = x^2 + 5$$
$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 4a - 3b = 0 \\ 2b - 3c = 5 \end{cases}$$
$$a = -\frac{1}{3} \quad ; b = -\frac{4}{9} \quad ; c = -\frac{53}{27}$$
$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$,l'équation $(E'): 2y' - 3y = 0$

$$Les\ solutions\ de\ (E')\ sont\ les\ fonctions\ de\ la\ forme\ g(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$$

3) Déterminons la solution générale $\varphi(x)$ de (E) dont la dérivée s'annule en 0

L'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27} + ke^{\frac{3}{2}x}$$
$$\varphi'(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{9} + \frac{3}{2}ke^{\frac{3}{2}x}$$
$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{9} + \frac{3}{2}k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{8}{27}$$
$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{53}{27} + \frac{8}{27}e^{\frac{3}{2}x}$$

III. Equation du second ordre

1. Définition

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$, toute équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du 2^{nd}ordre à coefficients constants .

Toute équation de la forme $ay'' + by' + cy = g(x)$ est appelée équation différentielle linéaire du 2^{nd}ordre à coefficients constants avec second membre .

Remarque :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $l'équation\ ay'' + by' + cy = 0$,c'est déterminer l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ $tels\ que$: $\forall\, x \in \mathbb{R}, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$

2. Equation caractéristique

Considérons l'équation $(E): ay'' + by' + cy = 0$

$$Soit\ r\ un\ réel\ et\ f\ une\ fonction\ definie\ par\ f(x) = e^{rx}$$

$$f \text{ est deux fois dérivables sur } \mathbb{R} \text{ , } f'(x) = re^{rx} \text{ et } f''(x) = r^2e^{rx}$$

$$f \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Définition :

Soit l'équation $(E): ay'' + by' + cy = 0$ $tels\ que\ a, b\ et\ c\ des\ reels\ avec\ a \neq 0$.On appelle équation caractéristique de (E), $l'équation\ du\ second\ degré\ \ ar^2 + br + c = 0$

Propriété 1 :

Soit l'équation $(E): ay'' + by' + cy = 0\ d'équation\ caracteriqtique : ar^2 + br + c = 0\ (E_c)$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow (E_c)$ admet deux solutions réelles distincts $r_1\ et\ r_2$ alors les solutions sur $\mathbb{R}\ de\ (E)$ sont les fonctions $f\ de\ la\ forme\ f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}\ ; (A, B) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow (E_c)\ admet\ une\ solution\ double\ \ reelle\ r_0 = -\frac{b}{2a}$ alors les solutions sur $\mathbb{R}\ \ de\ (E)$ sont les fonctions $f\ de\ la\ forme\ f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$
- $Si\ \Delta < 0 \Longrightarrow (E_c)\ admet\ deux\ solutions\ imaginaires\ conjuguées\ \alpha + i\beta\ et\ \alpha - i\beta$.Dans ce cas , les solutions sur $\mathbb{R}\ de\ f\ sont\ les\ fonctions\ de\ la\ forme$
$$f(x) = (Acos\beta x + Bsin\beta x)e^{\alpha x}$$

Solution de $(E_c): ar^2 + br + c = 0$	Solution de $(E): ay'' + by' + cy = 0$
Deux solutions réelles $r_1\ et\ r_2$	les fonctions $f\ de\ la\ forme$ $f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}\ ; (A; B) \in \mathbb{R}^2$
Une solution double $r_0 = -\frac{b}{2a}$	les fonctions $f\ de\ la\ forme$ $f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}; (A; B) \in \mathbb{R}^2$
$deux\ solutions\ imaginaires\ conjuguées$ $\alpha + i\beta\ et\ \alpha - i\beta$	$Les\ fonctions\ \ f\ de\ la\ forme$ $f(x) = (Acos\beta x + Bsin\beta x)e^{\alpha x}; (A; B) \in \mathbb{R}^2$

Propriété 2

Pour tout triplet $(x_0; y_0; z_0)$ des réels , l'équation différentielle $(E): ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}\ telle\ que\ y(x_0) = y_0\ et\ y'(x_0) = z_0$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_1): 2y'' - 3y + y = 0\ \ ; \qquad (E_2): y'' + y' + y = 0\ ; (E_3) = y'' + 2y' + y = 0$$

$$(E_4): \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ (équation\ differentielle\ d'un\ mouvement\ harmonique\ )$$

Solution

$$(E_1): 2y'' - 3y + y = 0$$

Son équation caractéristique est : $2r^2 - 3r + 1 = 0$

$$\Delta = 1$$

$$r_1 = 1 \quad et\ r_2 = \frac{1}{2}$$

Les solutions de (E_1) sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x}$; $(A;B) \in \mathbb{R}^2$

$$(E_2): y'' + y' + y = 0$$

Son équation caractéristique est :$r^2 + r + 1 = 0$

$$\Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions f de la forme

$$f(x) = \left[Acos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Bsin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right]e^{-\frac{1}{2}x} ; (A;B) \in \mathbb{R}^2$$

$$(E_3) = y'' + 2y' + y = 0$$

Son équation caractéristique est :$r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Delta = 0$$
$$r_0 = -1$$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions f de la forme $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$

$$(E_4): \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ (équation\ differentielle\ d'un\ mouvement\ harmonique\ )$$

Son équation caractéristique est :$r^2 + \frac{k}{m} = 0$

$$r^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow r = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ou\ r = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les solutions de (E_4) sont les fonctions f de la forme $f(t) = Acos\sqrt{\frac{k}{m}}t + Bsin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

En physique on reconnait la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc on aura

$$f(t) = Acos\ \omega t + Bsin\omega t\ (qui\ peut\ aussi\ s'ecrire\ sous\ la\ forme\ X_m\cos(\omega t + \varphi)$$

<u>Propriété 3 :</u>

La solution générale de (E): $ay'' + by' + cy = g(x)$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

$$y_G = y_p + y_H$$

Exercice d'application :

1) Soit l'équation différentielle $(E): y'' + 4y' + 4y = 0$
Déterminer les solutions h de (E) $definies$ sur $\mathbb{R}$
2) On considère l'équation différentielle $(F): y'' + 4y' + 4y = -4x$
   a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de (F)
   b) Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E)
   c) En déduire toutes les solutions f de (F)
   d) Déterminer la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

Solution

1) Soit l'équation différentielle $(E): y'' + 4y' + 4y = 0$
Déterminons les solutions h de (E) $definies$ sur $\mathbb{R}$
L'équation caractéristique est :$r^2 + 4r + 4 = 0$

$$\Delta = 0 \ et \ r_0 = -2$$

Les solutions h de (E) sont $h(x) = (Ax + B)e^{-2x}$ $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

2) On considère l'équation différentielle $(F): y'' + 4y' + 4y = -4x$

a) Déterminons les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de (F)

$$g \ est \ solution \ de \ (E) \Leftrightarrow g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = -4x$$

$$g(x) = ax + b \quad ; \quad g'(x) = a \quad et \quad g''(x) = 0$$

$$4a + +4(ax + b) = -4x$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4ax + 4b = -4x$$

$$\Leftrightarrow 4ax + 4(a + b) = -4x$$

$$\begin{cases} 4a = -4 \\ 4(a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = -x + 1$$

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E)

$$f \ est \ solution \ de \ (F) \Leftrightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f = -4x$$

$$or g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = -4x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

$$Donc \ f"(x) + 4f'(x) + 4f(x) = g''(x) + 4g'(x) + 4g(x)$$

$$f"(x) - g''(x) + 4f'(x) - 4g'(x) + 4f(x) - 4g(x) = 0$$

$$(f - g)''(x) + 4(f - g)'(x) + 4(f - g)(x) = 0$$

$$donc \ f - g \ est \ solution \ de \ (E)$$

c) Déduisons-en toutes les solutions f de (F)

$$f(x) = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1 \quad (A; B) \in \mathbb{R}^2$$

d) Déterminons la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

$$f'(x) = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} - 1$$

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow A - 2B - 1 = -2$$
$$f(0) = 2 \Leftrightarrow B + 1 = 2 \Leftrightarrow B = 1$$
$$A = 2B - 1 = 1$$
$$f(x) = (x+1)e^{-2x} - x + 1$$

CHAPITRE 11 : STATISTIQUE A DEUX VARIABLES

OBJECTIFS

- Connaitre les notions :moyenne, variance ,écarts type, covariance , coefficient de corrélation et les utiliser
- Déterminer les droites de régression
- Utiliser les droites de régressions pour faire des provisions
- Savoir utiliser les séries conditionnelles et marginales

SOURCES

- Collection Hachettes
- CIAM
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal) –Année 2006
- Cours des collègues
- Internet
- Le site sunudaara(https://sunudaara.com)
- Livre de Akhlou Tothie

PLAN : (Voir cours)

Déroulement Possible

I. Série statistique double

Il arrive qu' on étudie simultanément deux caractères X et Y sur les individus d'une population donnée. Dans ce cas , l'ensemble des couples $(x_i; y_i)$ est appelée série statistique double .

1. Tableau à double entrée

Exemple :

Une enquête effectuée sur un personnel portant sur le nombre d'années d'exercices X et le nombre de jours d'absence Y a donné les résultats suivants

Y \ X	2	4	5	6	7	TOTAUX
0	1	2	4	3	0	10
1	0	5	2	3	4	14
2	0	0	5	2	1	8
TOTAUX	1	7	11	8	5	32

(Tableau A)

Exemple de lecture :

Il y a 5 personnes qui ont une ancienneté de 4 ans avec 1 jours d'absence.
Il y a 2 personnes qui ont une ancienneté de 6 ans avec 2 jours d'absences
Il y a 5 personnes qui ont une ancienneté de 7ans .
Il y'a 8 personnes qui ont 2 jours d'absence
32 personnes sont concernées par l'étude .

Remarque :

Dans certains cas , il n'est pas nécessaire d'avoir un tableau à double entrée pour organiser les données.

Exemple :(série injective)

Le tableau suivant donne pour 7 entreprises donne l'investissement X(en millions) et le bénéfice Y(en millions).

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	6 ,3	6,4	6,7	6,9	7,2	7,4	7,5

2. Séries marginales

A partir d'une série double , on peut extraire deux séries marginales X et Y

Exemple :Dans le tableau (A), les séries marginales sont :

X	2	4	5	6	7
Effectifs	1	7	11	8	5

Y	0	1	2
Effectifs	10	14	8

3. Séries conditionnelles

On peut déterminer la distribution suivant un aspect d' une des deux variables .Une telle distribution est dite conditionnelle .

Exemple :

La distribution de X sachant que Y=1 est appelé série conditionnelle définie par le tableau suivant

L'effectif de la modalité est 0 alors le tableau peut être sous cette forme

X/Y=1	4	5	6	7

Effectifs	5	2	3	4

Ce tableau correspond à la distribution des personnes qui ont 1 jour d'absence

4. Nuages de points

Dans toute la suite on travaillera sur l'exemple (S)

Exemple (S) :

Une entreprise fabrique et vend 8 lots de pompes à injection. Le tableau ci-dessous donne le % Y de pompe d'un lot qui a une pompe au cours de X années.

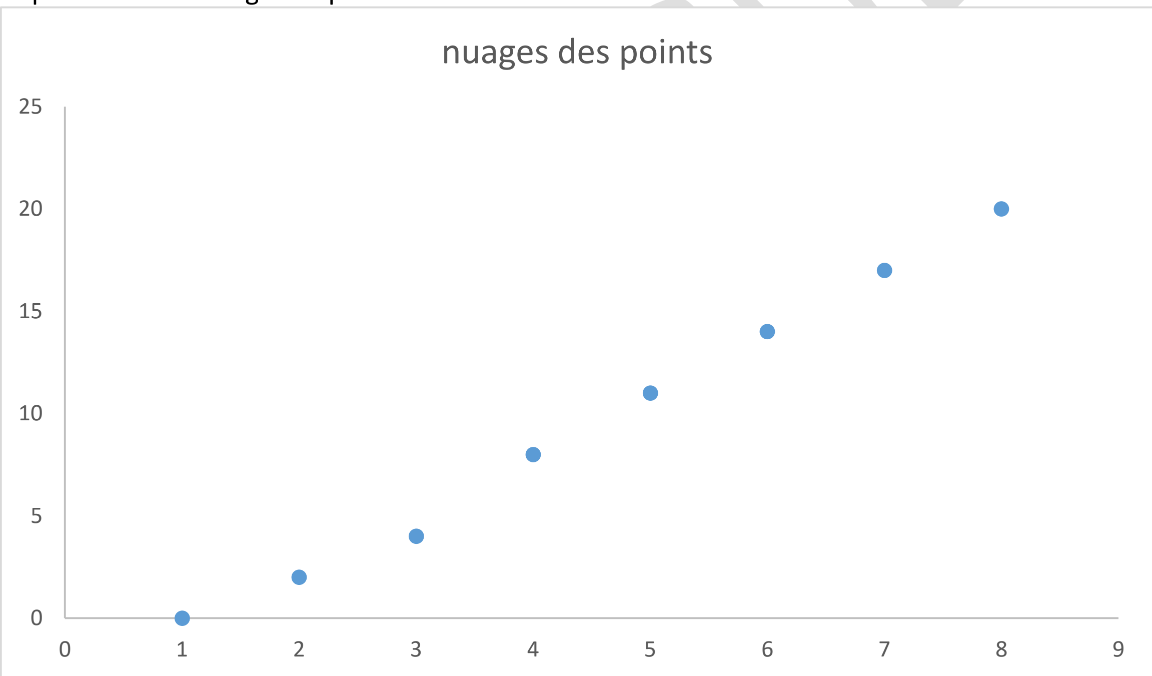
X(années)	1	2	3	4	5	6	7	8
Y(pourcentage)	0	2	4	8	11	14	17	20

De manière général

X	x_1	x_2	…………………	x_n
Y	y_1	y_2	………………	y_n

Dans le plan muni d'un repère ortho normal$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'ensemble des points M$\binom{x_i}{y_i}$ est appelé nuages de points .

Représentons le nuage des points .



5. Moyenne de X et Y

L'effectif total n est le nombre d'individus de la population. Dans l'exemple (S) n=8

La moyenne de X notée $\bar{X}$ est définie par :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots..+x_n}{n}$$

La moyenne de Y notée $\bar{Y}$ est définie par :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{y_1 + x_2 + \cdots..+y_n}{n}$$

Dans l'exemple (S) :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$$

$$\bar{X} = 4{,}5$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{0+2+4+8+11+14+17+20}{8} = 9{,}5$$

$$\bar{Y} = 9{,}5$$

6. Point moyen

On appelle point moyen le point $G(\bar{X},\bar{Y})$
Dans l'exemple (S)

$$G(4{,}5; 9{,}5)$$

7. Variance et écart type de X et Y

La variance est la mesure de dispersion des échantillons autour de la moyenne ,autrement dit c'est la moyenne des carrées des écarts entre les modalités et la moyenne .La variance de X est le réel positif noté V(X) et définie par :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots..+{x_n}^2}{n} - \bar{x}^2$$

La variance de Y est le réel positif noté V(Y) et définie par :

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \bar{y}^2 = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots..+{y_n}^2}{n} - \bar{y}^2$$

Dans l'exemple (S) :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2}{8} - (4{,}5)^2$$

V(X)=5,25

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \bar{y}^2 = \frac{0^2+2^2+4^2+8^2+11^2+14^2+17^2+20^2}{8} - (9{,}5)^2$$

V(Y)=46

L'écart type est l'écart moyen entre les modalités et la moyenne. Autrement dit , l'écart type est la racine carrée de la variance .
L'écart type de X noté $\sigma(X)$ est le réel positif défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart type de Y noté $\sigma(Y)$ est le réel positif défini par :

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

Dans l'exemple (S) :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}25} = \mathbf{2,29}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{46} = \mathbf{6,78}$$

8. Covariance de X et Y

La covariance permet d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives.
La covariance d'un couple (X,Y) est le réel noté $cov(X,Y)$ et défini par :

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{X}\bar{Y}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots.+x_ny_n}{n}-\bar{X}\bar{Y}$$

Dans l'exemple (S) :

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{X}\bar{Y}$$
$$=\frac{1\times 0+2\times 2+3\times 4+4\times 8+5\times 4+6\times 14+7\times 17+8\times 20}{8}-(4{,}5\times 9{,}5)$$

$$\boldsymbol{Cov(X,Y)=15,5}$$

9. Coefficient de corrélation linéaire (CCL)

Le coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Y) noté r est défini par :

$$r=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} \qquad -1\leq r\leq 1$$

Le CCL nous renseigne sur l'existence ou non d'une dépendance ou d'une corrélation entre les deux caractères étudiés.

- SI r est voisin de 1 ou -1 , on dit qu'il y'a une forte corrélation entre X et Y
- Si $|r|=1$, on dit qu'il y a une corrélation parfaite (tous les points du nuage sont alignés)
- Si r est voisin de 0 alors il y'a une faible corrélation
- Si r=0 alors il y'a pas de corrélation

NB :On dit qu'il y'a une une bonne corrélation si $|r|\geq 0{,}86$

Dans l'exemple (S) $r=\frac{15{,}5}{2{,}29\times 6{,}78}=0{,}99$ donc il y'a une bonne corrélation

II. Ajustement linéaire

Ajuster de manière linéaire un nuage c'est trouver une droite qui est plus proche de tous les points du nuages .

1. Ajustement par la méthode des moindres carrées

Ici la droite recherchée est appelée droite de régression.

a. Droite de régression de Y en X

La droite de régression de Y en X notée$D_{Y/X}$ s'écrit sous la forme :

$$Y=aX+b$$
$$a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)} \qquad b=\bar{Y}-a\bar{X}$$

Dans l'exemple (S) :

$$a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}=\frac{15{,}5}{5{,}25}=2{,}95;\ b=\bar{Y}-a\bar{X}=9{,}5-2{,}95\times 4{,}5=-3{,}775$$

$$\boldsymbol{Y=2,95X-3,775}$$

b. Droite de régression de X en Y

La droite de régression de Y en X notée$D_{Y/X}$ s'écrit sous la forme :

$$X=a'Y+b'$$
$$\boldsymbol{a'=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}} \qquad \boldsymbol{b'=\bar{X}-a\bar{Y}}$$

2. Ajustement par la méthode de Mayer

Dans l'exemple (S) :

X	2	3	4
Y	2	4	8

Le point moyen est $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$

X	5	6	7	8
Y	11	14	17	20

Le point moyen est $G_2(6{,}5\,;15{,}5)$

La droite recherchée passe par $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$ et $G_2(6{,}5\,;15{,}5)$

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{15{,}5 - 3{,}5}{6{,}5 - 2{,}5} = 3$$

Y=3X+b et comme $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$ passe par cette droite donc on a :

3,5=3(2,5)+b donc b=-4

Y=3X-4