Inspection d'Académie de Matam	**Année Scolaire 2024-2025**
Lycée Danthiady	**Durée :** 3 heures
Cellules de Mathématiques	**Classes :** $T^{\text{le}}S1$

CONTROLE CONTINU N^{o}1 DU PREMIER SEMESTRE

=====================

✍**EXERCICE 1** :**(3 points)**

1. Énoncer clairement les théorèmes suivants
   (a) Théorème de la bijection continue
   (b) Théorème des valeurs intermédiaires
2. Énoncer clairement le théorème de l'inégalité des accroissement finis (TIAF)puis prouvez-le en utilisant le théorème des accroissement finis (TAF)

=====================

✍**EXERCICE 2** :**(5 points)**

On se proposer d'étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha_n\right) - \frac{\pi}{2n\alpha_n} = 0$

Soit n un entier naturel non nul. Soit f_n la fonction définie sur $]0;1[$ par $f_n(x) = tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}$

1. Montrer que f_n est dérivable sur $]0;1[$ et dresser le tableau de variations de f_n
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0;1[$.
3. (a) Montrer que,$\forall x \in]0;1[$,$f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge
   (c) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi\alpha_n}{2tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha_n\right)}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\alpha_n$

=====================

✍**PROBLEME** :**(12 points)**

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2-2x+2})^3}$
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser
3. Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
   Unité graphique : $2cm$
4. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $]-1;1[$ et on a :
   $\forall x \in]-1;1[, \quad f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ Indication : $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$
5. Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} dans le même repère.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = sinx + f^{-1}(sinx) - tanx$

1. Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\quad ,g(x) = 1 + sinx$
2. Montrer que g réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $]0;2[$
3. Montrer que $\forall x \in]0;2[, \quad (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

=====================

Tournez la page

PARTIE C

Soit h la fonction définie sur $]0;2[$ par $h(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}(2-x)$

1. Montrer que h est dérivable sur $]0;2[$ puis calculer $h'(x)$
2. Montrer que $\forall x \in]0;2[\quad , g^{-1}(x) + g^{-1}(2-x) = 0$
   Interpréter géométriquement le résultat
3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + g^{-1}\left(\frac{2k+1}{k+1}\right) \right]$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est parfaitement définie
   (b) Vérifier que $h\left(\frac{2k+1}{k+1}\right) = g^{-1}\left(\frac{2k+1}{k+1}\right) + g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)$
   (c) En déduire que $u_n = -g^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$
   (d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

BON TRAVAIL ! ! !