

Devoir n°2 de mathématiques du 1^{er} Semestre

Exercice 1:(06,50points)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation suivantes : (2 × 2pts)
- a) $\sqrt{x^2 - x - 2} = (x + 1)\sqrt{x - \frac{11}{4}}$
- b) $5 - x - 4\sqrt{x - 1} \leq 0.$
2. Résoudre et discuter suivant m l'équation suivante: $\sqrt{m - x} = x + 2.$ (2,5pts)

Exercice 2:(06points)

- 1) a. Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 tel que : (1,5pts)
- le coefficient du monôme de degré 4 vaut 1.
 - $P(x)$ est divisible par $x^2 + x + 1.$
 - le reste de la division $P(x)$ par $x^2 - 1$ est $-3x + 9.$
- b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) > 0.$ (0,75pt)
- 2) On considère le polynôme $f_k(x)$ de degré $k + 1$ tel que :
- $$f_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_k(x) - f_k(x - 1) = x^k$$
- a. Démontrer que $f_k(x)$ est divisible par $x^2 + x.$ (0,75pt)
- b. Déterminer $f_1(x)$ et $f_2(x).$ (1pt×2)
- c. En déduire les sommes suivantes : (0,5pt×2)
- $$S_n^1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \text{et} \quad S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Exercice 3: (07,50 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4a$, $AC = 3a$ et $BC = 5a$ avec $a > 0.$ Soit I le milieu $[BC].$

1. Préciser la nature du triangle $ABC.$ (0,75pt)
2. Soit l'application g définie par $g(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2,$ pour tout point M du plan.
- a) Montrer que $g(M) = 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AI} + AB^2 + AC^2.$ (1pt)
- b) Déterminer et représenter l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $g(M) = 25a^2.$ (1pt)
3. Soit l'application f définie par $f(M) = -MA^2 + MB^2 + MC^2,$ pour tout point M du plan et G le barycentre des points pondérés $(A, -1), (B, 1)$ et $(C, 1).$
- a) Montrer que G appartient à la médiane issue de A du triangle $ABC.$ (0,75pt)
- b) Montrer que $f(M) = MG^2 + f(G).$ (1pt)
- c) Calculer $f(A).$ (0,5pt)
- d) Montrer que $f(G) = 0.$ (0,75pt)
- e) Déterminer et construire l'ensemble (C) points M du plan tels que $f(M) = 25a^2.$ (1pt)
- f) Vérifier que $A \in (C).$ (0,25pt)
4. Montrer que (Δ) et (C) sont tangents au point $A.$ (0,5pt)

Bonne Chance