DEVOIR 2 DE MATHEMATIQUES DU 1er SEMESTRE
DUREE: 3 HEURES

EXERCICE 1 : (8 points)

I. 1) Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis sur les valeurs absolues. ***(0,5 pt)***

2) On considère la fonction définie sur IR_+^* par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$.

a) Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{3};\ +\infty[$, $f'(x) < \frac{1}{2}$. ***(1 pt)***

b) En déduire que $x \in [\sqrt{3};\ +\infty[$, $\sqrt{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x + \sqrt{3})$. ***(1 pt)***

II. 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admette une primitive sur un intervalle I. ***(0,5 pt)***

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$

a) Justifier que f admet des primitives sur $I =]-\infty;\ 1[$. ***(0,5 pt)***

b) Déterminer les réels $a, b\ et\ c$ tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$. ***(1 pt)***

c) Déterminer les primitives de f sur I. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0. ***(1,5 pt)***

3) On considère la fonction $g(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ définie sur IR.

Montrer que g est dérivable sur IR puis que $g'(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. ***(0,5 pt)***

4) Soit la fonction $h(x) = \frac{12}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

Montrer que $h(x) = \frac{12(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})^3}$ puis en déduire une primitive H de h. ***(1,5 pt)***

PROBLEME : (12 points)

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité :1 cm)

1) a) Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f. ***(0,5 pt)***

b) Etudier la continuité de f en 0. ***(0,5 pt)***

c) Ecrire f sans la valeur absolue. ***(0,5 pt)***

d) Etudier la dérivabilité de f en $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Interpréter les résultats. ***(0,5 pt)***

e) Montrer que f est dérivable sur IR \ $\{0; 1\}$ et calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable. ***(1,5 pt)***

f) Résoudre dans $]0; 1[$ l'inéquation : $2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \leq 0$. ***(1 pt)***

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; 1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles. ***(1,5 pt)***

g) Dresser le tableau de variation de f. ***(1 pt)***

2) a) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$. Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]1;+\infty[$. ***(1 pt)***

b) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$. Etudier la position relative de (C_f) et (D) sur $]-\infty;0[$. ***(1 pt)***

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Montrer que g définie une bijection de $I =]1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. ***(0,5 pt)***

b) La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$. ***(1 pt)***

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$. ***(0,5 pt)***

4) Construire (C_f), ainsi que $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. ***(1 pt)***

BONNE CHANCE !