

1er DEVOIR HARMONISE DE MATHEMATIQUES DU 1er SEMESTRE

DUREE: 3 HEURES

EXERCICE 1 : (5 points)

A) Recopie et complète les propositions suivantes : (7× 0,5 pt)

1) Pour tout réel α positif et pour nombre réel x on a

$$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

2) Pour tous réels a et b on a :

$$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$$

$$a^3 - b^3 = \dots\dots\dots$$

3) Pour tous réels x et y on a :

$$d(x; y) = \dots\dots\dots$$

4) Si A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors

$$5) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

B) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan et x et y deux réels. (2× 0,75 pt)

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

2) Rappeler deux propriétés sur la distance entre deux réels x et y .

EXERCICE 2 : (6 points)

I. Soient a un réel strictement positif, A et B deux réels tels que :

$$A = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} \text{ et } B = a^2 \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{8} + a^2 \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{8}$$

1. Montrer que A est un entier. (1 pt)

2. Montrer que $B = 2a^2$. (1 pt)

II. Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes : (4× 1 pt)

$$a) |x - 3| = 5 ; b) |2x + 1| = -x + 2 ; c) |1 + 2x| \leq 5 ; d) |-4x - 5| > 1$$

EXERCICE 3 : (6,5 points)

Soit ABC un triangle et I milieu de $[AB]$.

Soient les points J et K définis par $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Faire une figure. (1 pt)

2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. (1 pt)

3) Montrer que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. (1 pt)

4) En déduire des questions précédentes que les points I, J et K sont alignés. (1 pt)

Soit L le point défini par $\overrightarrow{IL} = 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

5) Compléter la figure en construisant le point L . (0,5 pt)

a) Exprimer $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (1 pt)

b) Montrer que J est le milieu de $[IL]$. (1 pt)

EXERCICE 4 : (3,5 point)

Soit ABC un triangle et x un nombre réel. On considère les points I et J tels que

$$\overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure pour $x = \frac{1}{3}$ **(1 pt)**
2. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \left(x + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{CB}$. En déduire que (IJ) et (CB) sont parallèles. **(1 pt)**
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on
 - a) I et J confondus. **(0,5 pt)**
 - b) $IJBC$ parallélogramme. **(0,5 pt)**
 - c) $IJ = CB$. **(0,5 pt)**

BONNE CHANCE !