

Série d'exercices sur : Primitives de fonctions continues

**EXERCICE 1 :**

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble des primitives :

1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$; $g(x) = x^2 + 5x + 4$

2. $f(x) = \sin 2x - 2\cos 2x$; $g(x) = \sin 3x$;
 $h(x) = \cos 2x$

3. $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$; $g(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x + 3$

4. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$; $g(x) = \frac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$

5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $g(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

6. $f(x) = \sin x \cos^3 x$;

7. $g(x) = (2x-3)(x^2-3x+5)^5$

8. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $g(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$

EXERCICE 2:

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distincts de -2 et 2 :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2. En déduire la primitive de f vérifiant $F(0) = 1$.

B/ On donne la fonction :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$$

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $I =]2; +\infty[$.

EXERCICE 3 :

A/ On considère la fonction f telle que :

$$f(x) = a \cos x + b \cos^3 x, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels.}$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Comparer $f(x)$ et $f''(x)$. En déduire les primitives de f .

B/- soit la fonction $h(x) = 2\sin^2 x \cos^2 x$.

Déterminer la primitive H de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$

$$\text{vérifiant } H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

1. On donne $f(x) = \cos^4 x$ et $g(x) = \sin^4 x$.
Montrer que $f(x) - g(x) = \cos 2x$

Montrer que $f(x) + g(x) + h(x) = 1$

2. Montrer que $f(x) = \frac{1 + \cos 2x - h(x)}{2}$

3. Déterminer l'ensemble des primitives de $f(x)$.

4. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

5. Montrer que $g(x) = \frac{1 - \cos 2x - h(x)}{2}$

Déterminer la primitive G de $g(x)$ vérifiant $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

EXERCICE 4 :

A. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x \sin 3x$ et $g(x) = \sin x \cos 3x$

1. Vérifier que la fonction $f - g$ s'écrit sous la forme $\sin(u)$ où u est une fonction que l'on précisera. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f - g$.

2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f + g$.

3. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de f et g .

B. Soit $h(x) = \sin^2 x \cos^3 x$

1. Montrer que $h(x) = (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x$

$\cos x$

2. En déduire une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$$

On appelle C sa courbe représentative.

1. a. Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$
b. Montrer que C admet une droite asymptote.
2. Soit F la primitive de f sur $[0 ; +\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne recherche pas à exprimer $F(x)$
a. Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0 ; +\infty[$?
b. Quelles sont les variations de F sur $[0 ; +\infty[$?
3. On définit sur $[0 ; +\infty[$ les fonctions H et K par : $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$
a. Etudier, sur $[0 ; +\infty[$, les variations de H et K .
b. En déduire que, pour tous $x \geq 0$; On a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.
c. En déduire la limite de F en $+\infty$
- 4.a. Démontrer que l'équation $f(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0 ; +\infty[$.
b. Montrer que l'on peut préciser $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

EXERCICE 6 :

On donne $f(x) = 2\sin 3x + 6\cos x - 3\cos 2x$

1. Montrer que $f'(x) = 12\cos x (\cos 2x + \sin x)$
2. En déduire le signe $f'(x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
3. Trouver une primitive $F(x)$ de $f(x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
4. En déduire la primitive de $f(x)$ s'annulant en $\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 7 :

1. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- a- Démontrer que f n'est pas continue en 0.

- b- Démontrer que la fonction F définie par
- $$\begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$
- est une primitive de f .

2. Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1, & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- a- Démontrer que g n'est pas continue en 0.
b- On suppose que g admet une primitive G sur $\mathbb{R}$.
c- Démontrer que G est constante sur $]-\infty; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 8 :

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes:

$$F(x) = -2(-2x + 1)^5; \quad g(x) = x^3(x^4 - 1)^2$$

$$h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}; \quad k(x) = \frac{3x^2+4x-2}{x^4},$$

$$l(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}, \quad m(x) = (2x-3)(x^2-3x-6)^2$$

$$u(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}; \quad v(x) = \frac{3}{(3x+4)^3}$$

$$s(x) = \frac{6x-9}{(x^2-3x+2)^4};$$

$$t(x) = \frac{1}{3}(5x^4+1)\sin(x^5+x)$$

$$P(x) = \sin(3x + \frac{3\pi}{2}); \quad q(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$A(x) = \sin^4 x \cos^5 x; \quad b(x) = \sqrt{1-x}$$

$$r(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}; \quad n(x) = \sin x \cos^2 x$$

$$2. \text{ On donne : } f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$$

a- Déterminer trois réels, a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

b- En déduire les primitives de f sur $]2 ; +\infty[$