RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL
Un Peuple – Un But – Une Foi
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
INSPECTION D'ACADEMIE DE RUFISQUE

BAC BLANC **NIVEAU : TERMINALE S1** **Année : 2022/2023**

Epreuve : Mathématiques **Coeff : 8** **Durée : 04H**

EXERCICE 1 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit I le symétrique de A par rapport à O milieu du segment $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
 a) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de S_1. **1pt**
 b) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1. **1pt**

2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.
 a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2. **1pt**
 b) Soient M un point de (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont distincts de I.
 Montrer que les points A, M, I et M' sont cocycliques. **1pt**

EXERCICE 2 (3 points)

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) :$11x + 8y = 79$.
 a) Justifier que l'équation admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$, **0,5pt**
 b) Montrer que si le couple (x, y) est solution de (E), alors $y \equiv 3[11]$. **0,5pt**
 c) Résoudre alors l'équation (E). **1pt**

2. Le prix total de 41 piéces détachées réparties en trois lots est de 48 000 F, le prix d'une pièce du premier lot est 4 800 F, le prix d'une pièce du deuxième lot est 3 600 F et le prix d'une pièce du troisième lot est 400 F.
 Quel est le nombre de pièces de chaque lot ? **1pt**

EXERCICE 3 (3 points)

Soit (I_n) la suite définie sur IN par : $I_n = \frac{1}{2^{n+1} \times n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$.

1. Calculer I_0. **0,5pt**

2. Démontrer que $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} \times (n+1)!}$. **0,75pt**

3. Montrer que $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots\dots + \frac{1}{2^n \times n!} + I_n$. **0,5pt**

4. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{n! \times 2^n}$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. **0,25+0,5pt**

5. Déduire de ce qui précède que :
 $\sqrt{e} = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{2^n \times n!})$. **0,5pt**

PROBLEME : (10 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A (4,75 points)

1. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. **1+0,25pt**

2. Déterminer les branches infinies de (C) puis tracer (C). **0,5+1pt**

3. Montrer que f est une bijection de IR vers un intervalle à préciser. **0,25pt**

4. Expliciter f^{-1} la fonction réciproque de f. **0,5pt**

5. Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$. **0,25pt**

6. Soit λ un réel strictement négatif.

a. Calculer l'aire A(λ) du domaine délimité par la courbe (**C**), l'axe des ordonnées et les droites d'équation respectives : x = λ et x = 0. **0,5pt**

b. Calculer la limite de A(λ) lorsque A(λ) tend vers $-\infty$ puis interpréter ce résultat. **0,25+0,25pt**

PARTIE B (2,75 points)

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x négatif, on pose : $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1. Calculer $F_1(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x)$. **0,5pt**
2. Calculer la limite de F_2 en $-\infty$. **0,25pt**
3. Montrer que F_n pour tout entier naturel n non nul on a :
   $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$ **0,5pt**
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $F_n(x)$ tend vers une limite R_n quand x tend vers $-\infty$. **0,5pt**
5. a. Vérifier que pour tout réel $t \le 0$, $2e^t \le 1 + e^t \le 2$. **0,25pt**

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \ge 2$ et pour tout réel $x \le 0$, on a :
   $\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \le F_n(x) \le \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x})$. **0,5pt**

   a) En déduire un encadrement de R_n pour $n \ge 2$. **0,25pt**

PARITE C (2,5 points)

Pour tout réel x négatif et pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt.$$

1. Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$. **0,5+0,5pt**
2. Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \ldots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$. **0,5pt**

3. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

a) Montrer que $U_n = -\ln 2 + (-1)^n R_{n+1}$. **0,5pt**

b) Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite. **0,5pt**