Le programme de Mathématiques de la première L comporte trois parties : l'algèbre, l'analyse et l'organisation des données.

L'algèbre comporte deux thèmes suivants :

- **Systèmes d'équations et d'inéquations ;**
- **Polynômes.**

L'analyse comprend deux thèmes :

- **Fonctions numériques ;**
- **Suites numériques.**

L'organisation des données comprend deux thèmes :

- **Statistique ;**
- **Dénombrement.**

Le cours se fait en 3 h dans la semaine :

Soit une séance de 2h le mardi de 12h 30 à 14h 30 et une séance d'une heure le jeudi de 14h 30 à 15h 30 à la salle 18 pour la $1^{ère}$ L'.

Soit une séance d'une heure le mercredi de 14h 30 à 15h 30 à la salle 16 et une séance de 2h le jeudi de 8h à 10h à la salle 16 pour la $1^{ère}$ L2 A .

**Chapitre 1 : Systèmes d'équations et d'inéquations**

**Durée : 4h**

**Objectifs spécifiques :**

- ✓ Résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues avec la méthode du pivot de Gauss.
- ✓ Résoudre un système de deux inéquations à deux inconnues.

**Pré requis :**

- ✓ Système d'équations et d'inéquations.
- ✓ Méthode par substitution pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

**Matériels et supports didactiques :**

- ✓ Élève : Règle et équerre

- ✓ Professeur : Règle et équerre.

**Ressources pédagogiques :**

- ✓ Collection Hachettes classiques $1^{ère}$ $A_1$ et B.
- ✓ CIAM littéraire $1^{ère}$.

**Plan de la leçon**

**I. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues**

**1. Exemple**

**2. Résolution avec la méthode du pivot de Gauss**

**II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues**

**1. Systèmes de deux inéquations à deux inconnues**

**2. Systèmes de trois inéquations à deux inconnues**

**Déroulement de la leçon**

## I. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

### 1. Exemple

Le système $\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -\mathrm{x}+y+z=-3 \end{cases}$ est formé de trois équations. Chacune d'elle contient trois inconnues x ; y et z avec des exposants tous égaux à 1. On dit qu'on a un système de trois équations linéaires à trois inconnues x ; y et z.

Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets $(x, y, z)$ de nombres réels qui vérifient les trois équations du système.

**Question orale :** Qui peut résoudre ce système ?

**Réponse orale :** Nous allons voir une méthode permettant de résoudre un tel système : la méthode du pivot de Gauss.

### 2. Résolution avec la méthode du pivot de Gauss

#### a. Exemple 1

**Résolvons le système suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss**

$$\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -\mathrm{x}+y+z=-3 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on commence par désigner les 3 équations respectivement par $L_1; L_2\ et\ L_3$

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ -x+y+z = -3 & (L_3) \end{cases}$$

**1**ère **étape :** On fixe l'équation $(L_1)$ puis on élimine l'inconnue x dans $(L_2)$ en considérant le sous-système $-2\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ 2x - y + 2z = 2 & (L_2) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} -2x - 20y + 6z = -10 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ ainsi on a :

$-21\text{y} + 8\text{z} = -8\ (L_2{}')$

**2**ème **étape :** On fixe l'équation $(L_1)$ puis on élimine l'inconnue x dans $(L_3)$ en considérant le sous-système $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -x + y + z = -3 & (L_3) \end{cases}$ d'où ainsi on a :

$11\text{y} - 2\text{z} = 2\ (L_3{}')$

Ainsi, on obtient le système équivalent suivant : $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ -21y + 8z = -8 & (L_2{}') \\ 11y\text{-}2z = -3 & (L_3{}') \end{cases}$

**3**ème **étape :** On fixe $(L_2{}')$ puis on élimine y dans $(L_3{}')$ en considérant le sous-système

$\begin{cases} -21y + 8z = -8 & (L_2{}') \\ 11y - 2z = 2 & (L_3{}') \end{cases}$ Ainsi on a $46z = -46\ (L_3{}'')$

On obtient le système équivalent suivant dit système triangulaire

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (L_1) \\ \quad -21y + 8z = -8 & (L_2{}') \\ \qquad\quad 46z = -46 & (L_3{}'') \end{cases}$$

**4**ème **étape :** Pour terminer la résolution, on détermine z dans $(L_3{}'')$, puis on remplace z par cette valeur dans $(L_2{}')$, on obtient la valeur de y puis on obtient celle de x, en substituant à y et z par leurs valeurs respectives dans $(L_1{}')$.

Ainsi on a : $S = \{(2; 0; -1)\}$

### b. Exemple 2

**Résolvons le système suivant par la méthode du pivot de Gauss**

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

c. **Exercice d'application**

**Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss**

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

## II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

### 1. Inéquations linéaires à deux inconnues

#### a. Exemple

$2x + y - 5 > 0$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y.

#### b. Résolution graphique

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $2x + y - 5 > 0$, on représente la droite (D) d'équation $2x + y - 5 = 0$ dans un repère orthononormé (O,I,J)

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 5 | 3 |

Ensuite, on choisit un point qui n'est pas sur (D) et dont ses coordonnées sont connues. Par exemple : le point $O\binom{0}{0}$ puis on remplace dans l'inéquation x et y respectivement par les coordonnées de O. Ainsi, on a $2(0) + 0 - 5 > 0$ $c'est$ à $dire$ $-5 > 0$ faux donc les coordonnées de O ne vérifie pas l'inéquation. On barre donc le demi-plan de frontière (D) contenant $O$.

### 2. Systèmes de deux inéquations à deux inconnues

#### a. Exemple

$\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y

#### b. Résolution graphique

Résolvons graphiquement le système $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$

On commence par représenter graphiquement les droites $(D_1)$ $d'équation\ x - 2y + 1 = 0$ et $(D_2)$ d'équation $2x + y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

| | | |
|---|---|---|
| x | -1 | 1 |
| y | 0 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 3 | 1 |

Puis on choisit un point qui n'est ni sur$(D_1)$, ni sur $(D_2)$ et dont les coordonnées sont connues. Par exemple le point $O\binom{0}{0}$.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O dans l'inéquation 1, on a : $0 - 2(0) + 1 \geq 0$ $c'est$à $dire$ $1 \geq 0$ vrai donc les cordonnées de $O$ vérifie l'inéquation 1. On barre donc le demi-plan de frontière $(D_1)$ ne contenant pas O.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O, dans l'inéquation 2, on a : $2(0) + 0 - 3 < 0$ $c'est$ à $dire - 3 < 0$ vrai donc les coordonnées de $O$ vérifie l'inéquation 2. On barre donc le demi-plan de frontière $(D_2)$ ne contenant pas O.

NB : le 3. Sera donné comme exercice à faire

### 3. Systèmes de trois inéquations à deux inconnues

#### a. Exemple

$\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$ est un système de trois inéquations à deux inconnues x et y.

#### b. Résolution graphique

**Exercice : Résoudre graphiquement le système** $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$

## Chapitre 2 : LES POLYNOMES

**Durée : 5h**

**Objectifs spécifiques :**

- ✓ Factoriser un polynôme en utilisant la division euclidienne.
- ✓ Factoriser un polynôme en utilisant l'identification des coefficients.
- ✓ Résoudre une équation en utilisant la factorisation d'un polynôme.

- ✓ Utiliser le tableau des signes pour résoudre une inéquation de degré n $(n \leq 4)$.

**Pré requis :**

- ✓ Calcul dans $\mathbb{R}$.
- ✓ Trinôme du second degré.

**Matériels et supports didactiques :**

- ✓ Élève :
- ✓ Professeur :

**Ressources pédagogiques :**

- ✓ Collection Hachettes classiques $1^{ère}$ $A_1$ et B.
- ✓ CIAM littéraire $1^{ère}$.

**Plan de la leçon**

**I.** Généralités

- **1.** Monômes
  - **a.** Définition et vocabulaire
  - **b.** Exemple
  - **c.** Remarques
- **2.** Polynômes
  - **a.** Définition
  - **b.** Exemples
  - **c.** Remarques

**II.** Trinômes du second degré

- **1.** Définition et exemple
- **2.** Factorisation
- **3.** Signe d'un trinôme du second degré

**III.** Théorème fondamentale

- **1.** Racine d'un polynôme
  - a. Définition
  - b. Exemple
- **2.** Théorème fondamental
- **3.** Détermination de Q(x) par la division euclidienne

4. Détermination de Q(x) par l'identification des coefficients
    a. Exemple
    b. Exercice d'application
5. Détermination de Q(x) par la méthode du tableau de Horner
    a. Exemple
    b. Exercice d'application

**IV.** Factorisation d'un polynôme de degré $n \geq 3$

1. Exemple 1
2. Exemple 2

**Déroulement de la leçon**

# I. Généralités

## 1. Monômes

### a. Définition et vocabulaire

On appelle monôme de la variable x, toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^n$ où a est un réel constant et n est un entier naturel.

- Le réel a est dit coefficient du monôme $ax^n$.
- Si le coefficient a est différent de 0 alors l'entier naturel n est dit degré du monôme $ax^n$et on note $deg(ax^n) = n..$

### b. Exemples

✓ L'expression $-2x^3$ est un monôme de la variable x de coefficient $-2$ et de degré 3. On écrit $deg(-2x^3) = 3$

✓ L'expression $\frac{1}{2}x$ est un monôme de la variable x de coefficient $\frac{1}{2}$ et de degré 1. On écrit $deg\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

### c. Remarque

✓ Le plus souvent, lorsqu'on a un monôme de la variable x, on dit monôme tout court au lieu de monôme de la variable x.

✓ Tout réel constant non nul est un monôme dit monôme constant. Son coefficient est lui-même et son degré est 0. Par exemple $-2$ est un monôme de coefficient $-1$ et de degré 0.

✓ Le nombre réel 0 est un monôme de coefficient 0 mais il n'a pas de degré. Il est dit monôme nul.

### 2. Polynômes

#### a. Définition

On appelle polynôme de la variable x, toute expression qui peut s'écrire comme somme de monômes de la variable x.

#### b. Exemple

- ✓ L'expression $-2x + 4x^3 + 1$ est un polynôme car il s'écrit comme la somme des monômes $-2x$ ; $4x^3$ et 1.
- ✓ Les réels -2 ; 4 et 1 sont dits coefficients.
- ✓ 3 est le plus grand parmi tous les degrés des monômes du polynôme $-2x + 4x^3 + 1$ . Il est dit degré du polynôme $-2x + 4x^3 + 1$.

#### c. Remarque

- ✓ Les monômes d'un polynôme peuvent être ordonnés suivant les puissances décroissantes de x. Par exemple $-2x + 4x^3 + 1 =$
- ✓ Un polynôme se note généralement par P(x) ou Q(x),……. On peut donc écrire
  $P(x) = 4x^3 - 2x + 1$.
- ✓ Tout monôme est un polynôme.

## II. Trinômes du second degré

### 1. Définition et exemple

Un trinôme du 2nd degré est une expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul, b et c sont deux réels quelconques. C'est donc un polynôme de degré 2. Par exemple $2x^2 - 5x + 3$ est un trinome du second degré avec $a = 2; b = -5 \; et \; c = 3$.

### 2. Factorisation de $ax^2 + bx + c$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Le réel $b^2 - 4ac$ est dit discriminant de $ax^2 + bx + c$ et il est noté Δ= $b^2 - 4ac$. La factorisation de $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de Δ.

| **Signe du discriminant Δ** | **Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$** |
|---|---|
| Δ< 0 | $ax^2 + bx + c$ ne peut pas se factoriser. |
| Δ= 0 | $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$ |
| Δ> 0 | $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où |

| | |
|---|---|
| | $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

- **Exemples :** Factorisons les trinômes du second degré suivants :
  - ✓ $f(x) = 2x^2 + x + 1$
  - ✓ $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$
  - ✓ $H(x) = x^2 + x - 6$

3. **Signe de** $ax^2 + bx + c$

Le signe de $ax^2 + bx + c$ s'obtient généralement à l'aide d'un tableau de signes et ce tableau dépend du signe de $\Delta$**.**

- **Si** $\Delta$< **0** alors $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine et son tableau de signes est le suivant :

| **x** | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ | Signe de a |

**Exemple :** étudions le signe de $2x^2 + x + 1$

- Si $\Delta$= 0 alors $ax^2 + bx + c$ a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et son tableau de signes est le suivant :

| **x** | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ | **Signe de a** | **Signe de a** |

**Exemple :** étudions le signe de $9x^2 - 6x + 1$

- **Si** $\Delta$> **0** alors $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et son tableau de signes est le suivant :

| **x** | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ | **Signe de a** | **Signe de -a** | **Signe de a** |

**Exemple :** étudions le signe de $x^2 + x - 6$

## III. Théorème fondamental des polynômes

### 1. Racine d'un polynôme

#### a. Définition

Soit P(x) un polynôme et $\alpha$ un réel. On dit que $\alpha$ est une racine (ou zéro) de P(x) si $P(\alpha) = 0$.

#### b. Exemple

$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Vérifions que -1 est une racine de P(x).

$P(-1) = 0$ donc -1 est une racine de P(x).

### c. Exercice d'application

**Vérifier que -2 est une racine de** $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

## 2. Théorème fondamental

### a. Activité

On considère un polynôme $(x) = x^3 - 1$ .

1. Vérifier que 1 est une racine de P(x).
2. Trouver un polynôme Q(x) tel que P(x)=(x-1) Q(x).
3. Vérifier que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

**Solution**

1. P(1)=1-1=0 donc 1 est une racine de P(x)
2. $P(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$ donc $Q(x) = x^2 + x + 1$
3. $Q(x) = x^2 + x + 1$ donc $\deg(Q(x)) = 2$ ; $\deg(P(x)) - 1 = 2$ donc $\deg(Q(x)) = \deg(P(x)) - 1$

**Exploitation de l'activité**

Dans l'activité ci-dessus, nous avons vu que quand 1 est racine de $P(x) = x^3 - 1$, on a pu trouver le polynôme Q(x)= $x^2 + x + 1$ tel que P(x)=$(x-1) \times Q(x)$ et que $\deg(Q(x)) = \deg(P(x)) - 1$. Ce qu'on a eu avec $P(x) = x^3 - 1$ et la racine 1 peut se généraliser à tout polynôme P(x) et pour toute racine $\alpha$ quelconque. Ainsi, nous avons le théorème suivant :

### b. Théorème

Soit P(x) un polynôme et $\alpha$ un réel constant. Si $\alpha$ est une racine de P(x) alors on peut trouver Q(x) tel que $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)\ avec \deg Q = \deg P - 1$

L'objectif maintenant est de donner des méthodes pour déterminer ce polynôme Q(x).

## 3. Détermination du polynôme Q(x) par la division euclidienne

**Oralement :** Etant donnés des entiers naturels a et b, pour trouver un entier q tel que

$a = b \times q$, on effectue la division euclidienne de a par b et dans ce cas, q est le quotient dans cette division euclidienne.

Comme dans le cas des entiers naturels, on démontre que l'on peut définir dans l'ensemble des polynômes une division euclidienne. Ainsi pour trouver le polynôme Q(x) tel que

$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$, on effectue la division euclidienne de P(x) par x-1 et dans ce cas Q(x) sera le quotient dans cette division euclidienne.

**a. Exemple**

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$. Vérifions que 1 est une racine de P(x).

$P(1) = 0$ donc 1 est une racine de P(x). Comme 1 est une racine de P(x) alors d'après le théorème précédent on peut trouver un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 1) \times Q(x)$. Pour déterminer Q(x), on va diviser P(x) par x-1.

On trouve $Q(x) = 2x^2 + x - 3$. On a ainsi $P(x) = (x - 1)(2x^2 + x - 3)$.

**b. Exercice d'application**

Soit $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 17x - 14$.

1. Vérifier que 2 est une racine de P(x).
2. Trouver par la division euclidienne un polynôme Q(x) tel que P(x)=(x-2).Q(x)

**4. Détermination de Q(x) par la méthode d'identification des coefficients**

**a. Exemple 1**

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

$P(1) = 0$ donc 1 est une racine de P(x) donc d'après le théorème précédent il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 1) \times Q(x)$ avec $d°Q = d°P - 1 = 2$ donc $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Par suite $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

L'objectif est donc de déterminer a, b et c par la méthode d'identification. Pour ce :

On développe, on réduit et on ordonne d'abord le produit $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$, on obtient $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Ainsi on a : $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Ensuite, on identifie les coefficients des monômes semblables dans les deux membres de l'égalité $2x^3 - x^2 - 4x + 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ on a

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = -4 \; et \; -c = 3 \end{cases}$$

Par suite $a = 2; b = 1 \; et \; c = -3$ donc $Q(x) = 2x^2 + x - 3$.

**b. Exemple 2**

Soit $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 17x - 14$

1. Vérifier que 2 est une racine de P(x).
2. En utilisant la méthode d'identification des coefficients, trouver $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2) \times Q(x)$

### 5. Détermination de Q(x) par la méthode du tableau de Horner

**a. Exemple 1**

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

$P(1) = 0$ donc 1 est une racine de P(x). Comme 1 est une racine de P(x) alors d'après le théorème précédent il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x-1) \times Q(x)$ avec $d°Q = d°P - 1 = 2$ donc $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Pour déterminer a, b et c, on utilise le tableau suivant dit tableau de Horner.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Coefficients de P(x) dans l'ordre décroissant des puissances | 2 | -1 + | **-4** + | 3 + |
| Racine 1 | × 1 | 2 × 1 | 1 × 1 | -3 |
| Coefficients de Q(x) dans l'ordre décroissant des puissances | 2 | 1 | -3 | 0 |

$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x-1)(2x^2 + x - 3)$.

**b. Exemple 2**

Soit $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 17x - 14$

1. Vérifier que 2 est une racine de P(x).
2. En utilisant la méthode du tableau de Horner, trouver Q(x) tel que $P(x) = (x-2) \times Q(x)$

## IV. Factorisation d'un polynôme de degré $n \geq 3$ et applications

### 1. Exemple 1

Soit $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 17x - 14$

1. Vérifier que 2 est une racine de P(x).
2. Factoriser complètement P(x).
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leq 0$

### 2. Exemple 2

Soit $P(x) = -4x^3 - 11x^2 + 43x - 10.$

1. Vérifier que 2 est racine de P(x).
2. Factoriser complètement P(x).
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) > 0$

## Leçon 3 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

**Durée :** 6h

**Objectifs spécifiques :**

- ✓ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ;
- ✓ Déterminer la parité d'une fonction.

**Prérequis :**

- ✓ Polynômes

**Supports didactiques :**

- ✓ Hachette classique 1 ère A et B ;
- ✓ C.I.A.M 1 ère littéraire ;
- ✓ Livre USAID $2^{nd}$ S ;
- ✓ Ordinateur

**Plan de la leçon**

**I.** Fonction numérique d'une variable réelle

**1.** Définition et notation

**2.** Exemples

**3.** Ensemble de définition d'une fonction

**a.** Définition

**b.** Ensemble de définition d'une fonction polynôme

**c.** Fraction rationnelle

**II.** Parité d'une fonction

**1.** Ensemble symétrique par rapport à zéro

**a.** Définition

**b.** Exemples et contre-exemples

**2.** Fonction paire et fonction impaire

**a.** Fonction paire

**b.** Fonction impaire

**c.** Remarque

**d.** Exercice d'application

**Déroulement du cours**

**I. Fonction numérique d'une variable réelle**

**1. Définition**

Une fonction numérique de la variable réelle x notée f est définie par une expression notée f(x) donnée en fonction de x.

**2. Exemples**

- ✓ L'expression $f(x)$ donnée par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 25x + 12$ définie une fonction numérique de la variable réelle x notée f.
- ✓ L'expression $g(x)$ donnée par $g(x) = \frac{x-2}{3x+1}$ définie une fonction numérique de la variable réelle x notée g.

**3. Ensemble de définition d'une fonction numérique**

**a. Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par l'expression f(x).**

L'ensemble de définition de f ou domaine de définition de f notée $D_f$ est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression f(x) existe.

### b. Ensemble de définition d'une fonction polynôme

Si f est une fonction définie par une expression f(x) qui est un polynôme alors l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

- ✓ **Exemple**

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 25x + 12$. L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$

### c. Fraction rationnelle

#### i. Définition et Exemple

On dit qu'une fonction f est une fraction rationnelle si son expression f(x) est donnée par un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{3x+1}$ est une fraction rationnelle.

#### ii. Ensemble de définition d'une fraction rationnelle

- ✓ Soit f une fraction rationnelle. L'ensemble de définition $D_f$ de f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels son dénominateur est différent de zéro autrement dit c'est l'ensemble de tous les nombres réels sauf les racines de son dénominateur.
- ✓ **Exemples**

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{3x+1}$.

Déterminons $D_f$. f est une fraction rationnelle donc $f(x)$ existe ssi $3x + 1 \neq 0$. Ainsi pour trouver $D_f$, on peut chercher les racines de 3x+1 c'est-à-dire les solutions de l'équation 3x+1=0

$3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Par suite $D_f$ est l'ensemble de tous les nombres réels sauf $-\frac{1}{3}$. Cet ensemble est noté $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ et est égal à $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[ \cup \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$. On a donc $D_f = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[ \cup \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

- ✓ **Exercice d'application : Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :**

1. f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{4x-1}{-x+3}$
2. g est la fonction définie par $g(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

## II. Parité d'une fonction

### 1. Ensemble symétrique par rapport à zéro

#### a. Définition

Un ensemble de nombres réels est dit symétrique par rapport à zéro si à chaque fois qu'il contient un nombre réel alors il contient nécessairement son opposé.

#### b. Exemples et contre-exemples

- ✓ $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ est symétrique par rapport à 0.
- ✓ $\mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ est symétrique par rapport à zéro.
- ✓ Si a est un nombre réel alors $\mathbb{R} \setminus \{a; -a\}$ est symétrique par rapport à zéro. Par exemple $\mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$ est symétrique par rapport à zéro.
- ✓ Si a est un nombre réel différent de zéro alors $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro. Par exemple $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro.
- ✓ Si a et b sont des nombres réels qui ne sont pas opposés alors $\mathbb{R} \setminus \{a; b\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro. Par exemple $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ n'est pas symétrique par rapport à zéro.

### 2. Fonction paire et fonction impaire

#### a. Fonction paire

- ✓ Une fonction f est paire si son ensemble de définition $D_f$ est symétrique par rapport à zéro et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- ✓ **Exemple :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f est une fonction paire.

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$ d'où $D_f$ est symétrique par rapport à zéro. Comparons maintenant $f(-x)$ $et$ $f(x)$. Comme on connait déjà $f(x)$ alors calculons $f(-x)$.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$ donc $f(-x) = f(x)$. Par suite f est une fonction paire.

#### b. Fonction impaire

- ✓ Une fonction f est impaire si son ensemble de définition $D_f$ est symétrique par rapport à zéro et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

- ✓ **Exemple :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$. Montrons que f est une fonction impaire.

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$ d'où $D_f$ est symétrique par rapport à zéro. Comparons maintenant $f(-x)\ et - f(x)$. Calculons d'abord $f(-x)$. On a : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Calculons ensuite $-f(x)$. On a : $-f(x) = -x^3$. D'où $f(-x) = -f(x)$. Par suite f est une fonction impaire.

**c. Remarque**

- Si l'ensemble de définition $D_f$ de f n'est pas symétrique par rapport à zéro ou bien si $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$ alors f n'est ni une fonction paire ni une fonction impaire.
- Etudier la parité d'une fonction f, c'est étudier si la fonction f est paire ou bien impaire.

**d. Exercice d'application**

Etudier la parité des fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{x^4}{x^2-4}$
2. $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$
3. $h(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

**Leçon 4 : Limites d'une fonction**

**Durée :** 6h

**Objectifs spécifiques :**

- ✓ Calculer la limite en a d'une fonction continue en a ;
- ✓ Calculer la limite en a lorsqu'elle existe d'une fonction non défini en a ;
- ✓ Calculer la limite à l'infini d'une fonction lorsqu'elle existe ;
- ✓ Etre capable de reconnaitre et de lever une indétermination.

**Prérequis :**

- ✓ Fonctions numériques d'une variable réelle ;
- ✓ Polynômes.

**Supports didactiques :** ;

- ✓ C.I.A.M 1 ère littéraire ;
- ✓ Ordinateur
- ✓ Document de Faye-Ka

**Plan de la leçon**

I. **Limites d'une fonction en un nombre réel**
   1) **Limite finie d'une fonction en un nombre réel**
      a) **Notion de limite en un nombre réel**
      b) **Définition intuitive et notation**
      c) **Propriété**
         - ✓ **Exemple**
   2) **Limites infinies d'une fonction en un nombre réel**
      a) **Limite à gauche, limite à droite en un nombre réel**
      b) **Définition intuitive et notation**
      c) **Remarque**

II. **Limites d'une fonction à l'infini**
   1) **Limites infinies d'une fonction à l'infini**
      a) **Notion de limite infinie à l'infini**
      b) **Définitions intuitives et notation**
      c) **Théorème**
         - ✓ **Exemple**
   2) **Limites finies d'une fonction à l'infini**
- ✓ **Définitions intuitives et notation**
   3) **Théorème**
   4) **Limite finie d'une fonction en +∞**
   5) **Limite finie d'une fonction en -∞**
   6) **Remarques**

III. **Opérations sur les limites**
   1) **Limites d'une somme**
   2) **Limites d'un produit**
   3) **Limites d'un quotient**
   4) **Théorèmes**

**Déroulement du cours**

**NB : Dans tout le cours les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle.**

## I. Limite d'une fonction en un nombre réel

### 1) Limite finie d'une fonction en un nombre réel

#### a) Notion de limite finie en un nombre réel

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Remplissons le tableau suivant :

| x | 1,999 | 1,9999 | 1,99999 | 2,0001 | 2,00001 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | |

**Exploitation**

**D'après le tableau ci-dessus, on constate que si les valeurs de x sont très proches de 2 alors celles de f(x) sont très proches de 4. On dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers 2 est égale à 4. On note $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ et on lit « limite de f(x) lorsque x tend vers 2 égale à 4.»**

#### b) Définition intuitive et notation

Si les valeurs de x sont très proches d'un nombre réel a et qu'alors celles de f(x) sont très proches d'un nombre réel l, on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers a est égale à l. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et on lit : **« limite de f(x) lorsque x tend vers a égale à l. »**

**Nous admettons que lorsqu'une fonction admet une limite en un nombre réel alors celle-ci est unique.**

#### c) Propriété

Si f est une fonction polynôme et si a un nombre réel alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- ✓ **Exemple**

Soit f telle que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 7$. Calculons la limite de f(x) lorsque x tend vers -1. Comme f est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2(-1) - 3 + 1 + 7 = 3$.

### 2) Limite infinie d'une fonction en un nombre réel

#### a) Limite à gauche, limite à droite d'une fonction en un nombre réel

Soit f, la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Remplissons le tableau suivant :

| x | -0,001 | -0,0001 | -0,00001 | -0,000001 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 | 0,000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | |

En examinant les 4 premières colonnes du tableau ci-dessus, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus proches de 0 mais en étant inférieures à 0 alors celles de f(x) sont très très grandes en valeurs absolues mais en étant négatives. On dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 à gauche est égale à $-\infty$. On note $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et on lit : **« limite de f(x) lorsque x tend vers 0 moins égale moins l'infini. »**

En examinant les 4 dernières colonnes du tableau ci-dessus, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus proches de 0 mais en étant supérieures à 0 alors celles de f(x) sont très très grandes mais en étant positives. On dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 à droite est égale à $+\infty$. On note $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et on lit : **« limite de f(x) lorsque x tend vers 0 plus égale plus l'infini. »**

**b. Définition intuitive et notation :**

- ✓ Si les valeurs de x sont de plus en plus proches d'un nombre réel a mais en étant inférieures à a alors que celles de f(x) sont très très grandes en valeur absolue, on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers a à gauche est infinie.
- ✓ Si les valeurs de x sont de plus en plus proches d'un nombre réel a mais en étant supérieures à a alors que celles de f(x) sont très très grandes en valeur absolue, on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers a à droite est infinie

**c. Remarque**

Si $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a.

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ alors f admet une limite en a et on a : $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

## II. Limites d'une fonction à l'infini

### 1) Limite infinie d'une fonction à l'infini

### a) Notion de limite infinie à l'infini

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Remplissons le tableau suivant :

| x | -1000000 | -100000 | -10000 | -1000 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | |

En examinant les 4 premières colonnes du tableau ci-dessus, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en valeurs absolues en étant négatives alors celles de f(x) sont de plus en plus grandes en étant positives. On dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à $+\infty$. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

En examinant les 4 dernières colonnes du tableau, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en étant positives alors celles de f(x) sont de plus en plus grandes en étant positives. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

### b) Définition intuitive et notation

Si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en étant positives alors que celles de f(x) sont :

- ✓ de plus en plus grandes en valeurs absolues en étant négatives, on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- ✓ de plus en plus grandes en étant positives, on dit la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

### c) Théorème

- Si n est un entier naturel quelconque alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- Si n est un entier naturel pair alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.
- Si n est un entier naturel impair alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

**Exemples**

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

## 2) Limite finie d'une fonction à l'infini

### a. Notion de limite finie à l'infini

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Remplissons le tableau suivant :

| x | -100000 | -10000 | -1000 | 1000 | 10000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

En examinant les 3 premières colonnes du tableau ci-dessus, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en valeurs absolues en étant négatives alors celles de f(x) sont de plus en plus proches de 0. On dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0. On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

En examinant les 3 dernières colonnes du tableau, on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en étant positives alors celles de f(x) sont de plus en plus proches de 0. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

### b. Définition intuitive et notation

Si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en étant positives alors que celles de f(x) sont de plus en plus proches d'un nombre réel l alors on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à l. On note **:** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives et qu'alors celles de f(x) deviennent de plus en plus proches d'un nombre réel l alors on dit que la limite de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à l. On note **:** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Nous admettons que lorsqu'une fonction admet une limite à l'infini alors celle-ci est unique.

### c. Théorème

Si n est un entier naturel quelconque alors $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

**Exemples**

- ✓ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
- ✓ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ; $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

## III. Opérations sur les limites

Soient f et g des fonctions définies par f(x) et g(x), l, l' et a sont des nombres réels ou bien a=∞.

### 1) Limites de la somme $\mathbf{f(x) + g(x)}$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$, il faut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Le tableau ci-dessous donne dans chaque cas $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ sont connues.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | l | l | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$ | l+l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Forme indéterminée** |

Une forme indéterminée signifie qu'on ne peut pas immédiatement donner la limite. Lorsqu'on a une forme indéterminée, on verra dans la suite, des méthodes pour trouver la limite.

### 2) Limites du produit de deux fonctions

#### a. Limites de $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{f(x)}$ où $\alpha$ est un nombre réel constant

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{\alpha} \times f(x)$, il faut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Le tableau ci-dessous donne dans chaque cas $\lim\limits_{x\to a} \alpha \times f(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est connue.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \alpha \times f(x)$ | $\alpha \times l$ | $\begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ -\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} -\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$ |

**Exemples**

- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$

#### b. Limites de $\mathbf{f(x)} \times \mathbf{g(x)}$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$, il faut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Le tableau ci-dessous donne dans chaque cas $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ sont connues.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | l> 0 | l> 0 | l< 0 | l< 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$ | l×l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | **Forme indéterminée** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

### 3) Limites du quotient de deux fonctions

#### a. Limites de $\frac{\alpha}{f(x)}$ où α est un réel constant.

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{f(x)}$, il faut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Le tableau ci-dessous donne dans chaque cas $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{f(x)}$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est connue.

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\neq 0$ | $\infty$ | 0 |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{f(x)}$ | $\frac{\alpha}{l}$ | 0 « $\frac{R}{I} = 0$ » | $\infty$ « $\frac{R}{0} = I$ » |

**Exemples**

- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2x+1}$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2}{x}$

#### b. Limites de $\frac{f(x)}{g(x)}$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ il faut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Le tableau ci-dessous donne dans chaque cas $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ sont connues

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | l | l | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\neq 0$ | $\infty$ | 0 | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | 0 | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | 0 | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | **Forme indéterminée** | **Forme indéterminée** |

**Exemples**

**Calculons les limites suivantes :**

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-2}{4x-5}$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

## 4. Théorèmes

### a. Théorème 1

Si c est un nombre réel constant et si a est un nombre réel ou bien si $a = \infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Par exemple : $\lim\limits_{x \to 1} 3 = 3$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} 5 = 5$

### b. Théorème 2

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

**Exemple**

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

### c. Théorème 3

La limite à l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemple**

- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

**Chapitre 5 : Dérivabilité**

**Durée :** 5h

**Objectifs spécifiques :**

- ✓ Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel ;
- ✓ Déterminer une équation de la tangente à la courbe d'une fonction en un point;
- ✓ Calculer la dérivée d'une fonction.

**Prérequis :**

- ✓ limite d'une fonction en un nombre réel ;
- ✓ Coefficient directeur d'une droite ;

**Supports didactiques :** ;

- ✓ C.I.A.M 1 ère littéraire ;
- ✓ Ordinateur
- ✓ Document de Faye-Ka

**Plan de la leçon**

**I. Dérivabilité d'une fonction en un nombre réel**

**1. Définition**

**2. Exemple**

**3. Exercice d'application**

**4. Tangente à la courbe d'une fonction en un point**

**a. Définition de la tangente à la courbe d'une fonction**

**b. Exemple**

**II. Fonction dérivée d'une fonction**

**1. Fonctions dérivées des fonctions usuelles**

**2. Opérations sur les dérivées**

**III. Sens de variation d'une fonction**

**1. Théorème**

**2. Définition**

**3. Exemple**

**4. Propriété**

**Déroulement du chapitre**

## I. Dérivabilité d'une fonction en un nombre réel

### 1. Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable en un réel a ($a \in D_f$) si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel l. Le nombre réel l est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

### 2. Exemple

$f(x) = 2x + 1$ ; Montrons que f est dérivable en 1 et précisons le nombre dérivé de f en 1.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est f '(1)=2.

### 3. Exercice d'application

Soit $f(x) = -x + 2.$ Montrer que f est dérivable en 2 et préciser le nombre dérivé de f en 2.

### 4. Tangente à la courbe d'une fonction en un point

#### a. Définition

Soit f est une fonction dérivable en a. La droite d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{f}'(\mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a}) + \mathrm{f}(\mathrm{a})$ est dite tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

#### b. Exemple

Soit f telle que $f(x) = x^2$. On montre que f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est f '(1)=2. Ainsi la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{f}'(1)(\mathrm{x} - 1) + \mathrm{f}(1) = 2\mathrm{x} - 1$.

## II. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Soit f une fonction dérivable en tout nombre réel a d'un intervalle I. A partir de la fonction, on peut définir une nouvelle fonction notée $f'$ appelée fonction dérivée de f. L'expression de la fonction f ' est donc $f'(x)$.

### 1. Fonction dérivée des fonctions usuelles

Les propriétés suivantes permettent de calculer les expressions des fonctions dérivées des fonctions usuelles.

#### a. Propriété

Si $f(x) = c$ où c est un réel constant alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 0$.

**Exemples**

- Pour $\mathrm{f}(x) = 8$, on a $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$
- Pour f(x)=-5, on a $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$

#### b. Propriété

Si $f(x) = x$ alors $f'(x) = 1$.

#### c. Propriété

Si $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels constants alors $f'(x) = a$

**Exemples**

- Soit $f(x) = 2x$, ici a=2 et b=0 donc $f'(x) = 2$.
- Soit $f(x) = -x + 3$, a=-1 et b=3 donc $f'(x) = -1$.

### d. Propriété

Si $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel non nul alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

**Exemples**

- Soit $f(x) = x^2$ ; f(x)= $x^n$ avec n=2 donc $f'(x) = 2x$.
- Soit $f(x) = x^3$ ; f(x)= $x^n$ avec n=3 donc $f'(x) = 3x^2$

### e. Propriété

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

**Tableau récapitulatif**

Le tableau suivant permet de résumer les résultats ci-dessus

| **f(x)** | $\boldsymbol{f'(x)}$ |
|---|---|
| $\mathrm{f(x) = c\,;\ c \in \mathbb{R}}$ | $\mathrm{f'(x) = 0}$ |
| $\mathrm{f(x) = x}$ | $\mathrm{f'(x) = 1}$ |
| $\mathrm{f(x) = ax + b}$ | $\mathrm{f'(x) = a}$ |
| $\mathrm{f(x) = x^n\,;\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ | $\mathrm{f'(x) = n}x^{n-1}$ |
| $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ | $\mathrm{f'(x)} = -\frac{1}{\mathrm{x}^2}$ |

## 2. Opérations sur les dérivées

### a. Dérivée d'une somme

✓ Soient u et v deux fonctions. La dérivée de la somme $\mathrm{u(x) + v(x)}$ est $\mathrm{[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)}$

**Exemple**

Pour $\mathrm{f}(x) = x^4 + x^2$ on a $\mathrm{f'(x) = 4x^3} + 2x$

✓ Soient u et v deux fonctions. La dérivée de la différence $\mathrm{u(x) - v(x)}$ est $\mathrm{[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)}$

**Exemple**

Pour $f(x) = 2x - x^3$ on a $f'(x) = 2 - 3x^2$

**b. Dérivée d'un produit**

- ✓ Soit u une fonction et $\alpha$ un nombre réel constant non nul. La dérivée du produit $\alpha\, u(x)$ est : $[\alpha\, u(x)]' = \alpha\, u'(x)$

**Exemple**

$f(x) = 4x^3$, on a : $f'(x) = 4(3x^2) = 12x^2$

- ✓ Soient u et v deux fonctions. La dérivée du produit $u(x) \times v(x)$ est : $[u(x) \times v(x)]' = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$

**Exemple**

Pour $f(x) = (3x+1)(x^3+x)$ . On a $f'(x) = 3(x^3+x) + (3x^2+1)(3x+1)$.

- ✓ Soit u une fonction et n un entier naturel supérieur à 1. La dérivée de $[u(x)]^n$ est : $[u(x)^n]' = n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$

**Exemple**

Pour $f(x) = (-2x+5)^3$, on a $f'(x) = 3(-2)(-2x+5)^2 = -6(-2x+5)^2$

**c. Dérivée d'un quotient**

- ✓ Soit u une fonction. La dérivée du quotient $\frac{1}{u(x)}$ est $\left[\frac{1}{u(x)}\right]' = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

**Exemple**

Pour $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ on a $f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$

- ✓ Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I tel que v ne s'annule pas sur I. La dérivée du quotient $\frac{u(x)}{v(x)}$ est : $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[v(x)]^2}$

**Exemple**

Pour $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$, on a $f'(x) = \frac{2(3x+1)-3(2x-1)}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}$

Le tableau ci-dessous permet de résumer les différents résultats ci-dessus

| Fonctions définies par | Dérivées |
|---|---|
| $u(x)+v(x)$ | $u'(x)+v'(x)$ |
| u(x)-v(x) | $u'(x)-v'(x)$ |
| $\alpha \times u(x)$ | $\alpha \times u'(x)$ |
| $u(x) \times v(x)$ | $u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$ |
| $\frac{1}{u(x)}$ | $-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ |
| $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[u(x)]^2}$ |
| $u(x)^n$ | $nu'(x)[u(x)]^{n-1}$ |

## III. Sens de variation d'une fonction

### 1. Théorème

Soit f est une fonction dérivable en tout nombre réel a d'un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors on dit que f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors on dit que f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors on dit que f est constante sur I.

### 2. Définition

Etudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, c'est étudier si f est croissante ou décroissante sur I.

Ainsi pour étudier le sens de variation (ou les variations) d'une fonction sur un intervalle I alors on calcule $f'(x)$ puis on étudie son signe sur I.

### 3. Exemple

**1.** $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **.** Etudions le sens de variation de f sur les intervalles de $D_f$.

Dressons le tableau qui permet de visualiser les variations de f, ce tableau sera appelé tableau de variations de f.

**2.** $f(x) = x^3 - 3x$. Etudions les variations de f sur $D_f$ puis dressons son tableau de variations.

### 4. Extrémums d'une fonction

Si $f'(x)$ s'annule en a et change de signe alors f admet un extrémum en a et dans ce cas, l'extrémum est le point de coordonnée (a ;f(a)). De plus si le signe de f '(x) passe de + en – alors l'extrémum est dit maximum et si c'est de – en + alors il est dit minimum.

Par exemple f définie ci-dessus admet un extrémum en 3 et cet extrémum est un minimum de f.