

CONTROLE CONTINU N°2 DU PREMIER SEMESTRE

=====

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]\frac{1}{e}; 1[$ (1pt)

2. On considère la suite définie par $u_0 \in]\frac{1}{e}; 1[$ et $(\forall \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = e^{-u_n}$

Montrer que $(\forall \in \mathbb{N}) : \frac{1}{e} < u_n < 1$ (0,5pt)

3. Montrer que $(\forall \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| < e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha|$ (0,75pt)

4. Montrer que $(\forall \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| < e^{-\frac{n}{e}} |u_0 - \alpha|$ puis en déduire la limite de la suite (u_n) (0,5pt+0,25pt)

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ On pose $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$

Montrer que $v_n = e^{-\sum_{k=1}^n u_k}$ puis en déduire la limite de (v_n) (0,5pt+0,5pt)

=====

EXERCICE 2 : (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE I

1. (a) Étudier les variations de la fonction f (1,25pt)

(b) Tracer la courbe (C_f) (0,75pt)

2. Soit F la fonction définie sur $]0; 1]$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x(1 - 2\ln x) - \frac{4}{3}$

(a) Justifier que F est une primitive de f sur $]0; 1]$ (0,75pt)

(b) En déduire les variations de F sur $]0; 1]$ (0,75pt)

PARTIE II

1. On pose pour tout x de $]0; 1]$ $\Delta(x) = F(1) - F(x)$ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x) = \frac{4}{3}$ (0,25pt)

2. Énoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis (0,5pt)

3. Soit n un entier naturel $n \geq 2$

(a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n - 1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (0,75pt)$$

(b) En déduire que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \Delta\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (0,5pt)

4. On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(a) Montrer que : $\Delta\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \Delta\left(\frac{1}{n}\right)$ (0,5pt)

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ (0,5pt)

=====

Tournez la page

EXERCICE 3 : (9,5 points)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Unité graphique : $2cm$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier les branches infinies de (C_f) (0,75pt)
2. (a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{4(1 - 2\ln x)}{x^3}$ (0,25pt)
(b) Donner le tableau de variation de f (0,5pt)
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes α et β telles que $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ (0,5pt)
4. Tracer la courbe (C_f) (0,5pt)

PARTIE B

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{n\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$ où n un entier naturel tel que $n \geq 4$ et (C_n) sa courbe représentative

1. Étudier les variations de la fonction f_n (0,75pt)
2. Montrer (C_n) admet un point d'inflexion (0,5pt)
3. Étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) (0,75pt)
4. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes α_n et β_n telles que $1 < \alpha_n < \sqrt{e} < \beta_n$ (0,75pt)
5. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 4}$ est décroissante (0,5pt)
6. (a) Montrer que $\forall x \geq 0 : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (1pt)
(b) Montrer que $(\forall n \geq 4) : \frac{(\alpha_n - 1)(3 - \alpha_n)}{2} \leq \ln(\alpha_n) \leq \alpha_n - 1$ (0,5pt)
(c) En déduire que $(\forall n \geq 4) : \frac{(\alpha_n)^2}{2n} \leq \alpha_n - 1 \leq \frac{(\alpha_n)^2}{n(3 - \alpha_n)}$ (0,5pt)
(d) Montrer que $(\forall n \geq 4) : \frac{1}{2n} \leq \alpha_n - 1 \leq \frac{e}{n}$ (0,5pt)
(e) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 4}$ est convergente en déterminant sa limite (0,5pt)
7. (a) Montrer que $(\forall n \geq 4) : e^{\frac{5}{6}} < \beta_n$ (0,5pt)
(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$ (0,25pt)

=====

BON TRAVAIL !!!