MATHEMATIQUES 1S

Touba Gueye, Professeur de Mathématiques

EDITION 2021

DEDICACE

A tous les enseignants du Sénégal, ces éducateurs, qui à partir d'une étincelle peuvent avoir du feu, ceux qui prennent un zéro pour le transformer en un héros, ceux qui instruisent la génération montante ,ceux qui ont des milliers de personnes qui se rappellent d'eux pour le reste de leur vie . Ces enseignants dévoués , patriotes , qui malgré les conditions défavorables donnent le meilleur d'eux-mêmes pour faire reculer les frontières de l'ignorance .

Cet ouvrage regroupe les cours de mathématiques des classes de premières scientifiques .Son but est de fournir à l' élève un instrument de travail qui va l'accompagner durant toute l'année afin de lui permettre d'avoir des bases solides , de mieux comprendre les cours et de lui montrer le savoir faire . L'horaire en classes de 1S1 et S3 est de 7h par semaine et 6h pour les sériés S2 et S4.Ce document permettra aussi aux collègues professeur d'avoir un gain de temps sur la préparation des cours et sur la réalisation de certaines taches .
Ce document, bien utilisé ,aidera beaucoup les élèves à bien préparer leur classe de terminale scientifique.

En espérant que ce travail , vous aidera , vous plaira , j'attends de votre part toute suggestion que vous pourriez me formuler et je prie à toute personne qui aurait constaté une erreur qui se serait glissée de bien vouloir me la signaler .

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

TABLE DES MATIERES

EQUATIONS –INEQUATIONS –SYSTEMES

Pré requis :

- Savoir les notions de base sur le calcul dans $\mathbb{R}$
- Savoir résoudre les équations du premier et du second degré
- Savoir résoudre un système d'équations et d'inéquations à deux inconnues

Objectifs de la leçon

- Résoudre une équation et une inéquation paramétrique
- Résoudre toutes les formes d'équations et d'inéquations irrationnelles
- Résoudre un système d'équations à 3 ou 4 inconnues avec PIVOT DE GAUSS
- Résoudre un système d'équations à deux inconnues avec la méthode CRAMER
- Résoudre un programme d'optimisation

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Tome 1S de M. Mouhamadou Ka(professeur au LCOFT Saint Louis)

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Second degrés

1.Definition :

On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a$\in \mathbb{R}^*$;b € $\mathbb{R}$ et c € $\mathbb{R}$.

2.Factorisation d'un trinôme du second degrés

Soit f(x)= ax^2 +bx +c un trinôme du second degrés et Δ =b^2-4ac son discriminant

-Si Δ < 0 , f(x) est infactorisable

-Si Δ >0, la factorisable est f(x)=$a(x-x_1)(x-x_2)$

-Si Δ= 0, la factorisation est (fx)=$(x-x_0)^2$

Avec x_1=$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; x_2=$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et x_0=$\frac{-b}{2a}$

3.Signe d'un trinôme du second degrés

Soit ax^2 +bx +c un trinôme du second degrés :

-Si Δ= 0 , le trinôme est du signe de a

x	-∞		x_0		+∞
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

-Si Δ< 0,le trinôme est du signe de a

x	-∞		+∞
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	

-Si Δ> 0,le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a à l'intérieur des racines .

x	-∞		x_1		x_2		+∞
$ax^2 + bx + c$		*Signe de a*	0	*Signe de* $-a$	0	*Signe de* a	

4.Somme et produit des racines d'un trinôme du second degrés

Soit un trinôme du second degrés ax^2 +bx +c admettant deux racines x_1 *et* x_2 :

S=x_1x_2=$\frac{-b}{a}$; P=$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

-Le trinôme admet deux racines positives si et seulement si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

-Le trinôme admet deux racines négatives si et seulement si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

-Le trinôme admet deux racines de signes contraires si et seulement si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$

5.Position des racines d'un trinôme par rapport à un réel

Soit un trinôme du second degrés $f(x) = ax^2 + bx + c$ *et* $\propto$ *un reel.*

- $x_1 < \propto < x_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\propto) < 0 \end{cases}$

- $x_1 < x_2 < \propto \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\propto) > 0 \\ S - 2\propto < 0 \end{cases}$

- $\propto < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\propto) > 0 \\ S - 2\propto > 0 \end{cases}$

- $Si\ af(\alpha) = 0\ alors\ \alpha\ est\ une\ racine\ de\ f(x)$

Exercice d'application :

$$Soit\ (E): (m-2)x^2 + mx - 1 = 0$$

1)$Resoudre\ et\ discuter\ suivant\ les\ valeurs\ de\ m\ l'existence\ et\ le\ signe\ des\ racines\ de\ (E)$

2) Déterminer $les\ valeurs\ de\ m\ telles\ que : a)\ x_1 + 2x_2 = 3 \quad b)|x_1 - x_2| = 2$

3)Déterminer les valeurs de m telles que :

a)$x_1 < -1 < x_2$ $\quad b)x_1 < x_2 < -1$ $\quad c) -1 < x_1 < x_2$ $\quad d) -2 < x_1 < x_2 < -1$

6.Inequation paramétrique

Exemple : Résoudre et discuter

a)$(m-1)x - m > 0$

b)$(m-2)x^2 + mx - 1 \leq 0$

Solution

a)$(m-1)x - m > 0$

Si m=1 , on obtient $-1 > 0\ absurde$

$$S = \emptyset$$

$$Si\ m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1\ on\ obtient$$

$$x > \frac{m}{m-1}$$

$$S = \left]\frac{m}{m-1}\ ; +\infty\right[$$

$$Si\ m - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{m}{m-1}$$

$$S = \left]-\infty; \frac{m}{m-1}\right[$$

b)$(m-2)x^2 + mx - 1 \leq 0$

$$Si\ m = 2, l'inequation\ devient\ 2x - 1 \leq 0$$

$$S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$$

$Si\ m \neq 2$,l'inéquation est du second degré

$$\Delta = m^2 + 4(m-2)$$

$$\Delta = m^2 + 4m - 8$$

$$Posons\ \Delta = 0\ ; \Delta_m = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta_m} = 4\sqrt{3}$$

$$m_1 = 2 - 2\sqrt{3} \quad et\ m_1 = 2 + 2\sqrt{3}$$

m	-∞		$2-2\sqrt{3}$		2		$2+2\sqrt{3}$		+∞
$m-2$		-	|	-	0	+	|	+	
$\Delta = m^2 + 4m - 8$		+	0	-	|	-	0	+	

$$Si\ m \in \left]-\infty; 2-2\sqrt{3}\right[\quad \Delta > 0 \quad et\ m-2<0$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(m-2)x^2+mx-1$		-	0	+	0	-	

$$S = \left]-\infty; x_1\right] \cup \left[x_2; +\infty\right[$$

$$Si\ m \in \left]2-2\sqrt{3}\,; 2\right[\quad \Delta < 0 \quad et\ m-2<0$$

x	-∞		+∞
$(m-2)x^2+mx-1$		-	

$$S = \mathbb{R}$$

$$Si\ m \in \left]2; 2+2\sqrt{3}\right[\quad \Delta < 0 \quad et\ m-2>0$$

x	-∞		+∞
$(m-2)x^2+mx-1$		+	

$$S = \emptyset$$

$$Si\ m \in \left]2+2\sqrt{3}; +\infty\right[\quad \Delta > 0 \quad et\ m-2>0$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(m-2)x^2+mx-1$		+	0	-	0	+	

$$S = [x_1; x_2]$$

$$avec\ x_1 = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4m-8}}{2(m-2)} \quad et\ x_2 = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4m-8}}{2(m-2)} \quad ;\ (x_2 > x_1)$$

$$Si\ m = 2-2\sqrt{3}\,;\ \Delta = 0\ et\ m-2<0$$

$$x_0 = -\frac{2-2\sqrt{3}}{2(2-2\sqrt{3}-2)} = -\frac{1-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-3}{6}$$

x	-∞		x_0		+∞
$(m-2)x^2+mx-1\ avec\ m=2-2\sqrt{2}$		-	0	-	

$$S = \mathbb{R}$$

$$Si\ m = 2+2\sqrt{3}\,;\ \Delta = 0\ et\ m-2>0$$

$$x_0 = -\frac{2+2\sqrt{3}}{2(2+2\sqrt{3}-2)} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}+3}{6}$$

x	-∞		x_0		+∞
$(m-2)x^2+mx-1\ avec\ m=2+2\sqrt{2}$		+	0	+	

$$S = \{x_0\}$$

I. Equations et inéquations irrationnelles

Soient $f(x)\ et\ g(x)$ deux fonctions

$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0\ ou\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

$\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$a)\sqrt{-x^2+5x+5}=\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ -x^2+5x+5 = x-3 \end{cases}$

$*x-3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3$

$D_E=[3;+\infty[$

$*$ $-x^2+5x+5 = x-3$

$-x^2+4x+8 = 0$

$x_1 = 2-2\sqrt{3} \qquad x_2=2+2\sqrt{3}$

S=$\{2+2\sqrt{3}\}$

b) $\sqrt{x+1}=3-x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 = (3-x)^2 \end{cases}$

$*3-x \geq 0$

$D_E=]-\infty;3]$

$*x+1=(3-x)^2$

$x^2-7x+8=0$

$x_1=\frac{7-\sqrt{17}}{2} \qquad ;x_2=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$

S=$\left\{\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right\}$

c) $\sqrt{x+1} \leq 3-x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x+1 \leq (3-x)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ -x^2+7x-8 \leq 0 \end{cases}$

$*$ $Posons$ $-x^2+7x-8=0$

$x_1=\frac{7-\sqrt{17}}{2} \qquad ;x_2=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7-\sqrt{17}}{2}$		3		$\frac{7+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+		+		+	
$3-x$		+		+		+	0	-		-	
$-x^2+7x-8$		-		-	0	+		+	0	-	

$$S=\left[-1;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$$

d) $\sqrt{x-1} \geq 3-x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x-1 \geq (3-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ -x^2+7x-10 \geq 0 \end{cases}$

*Posons -$x^2 + 7x - 10 = 0$

x_1=2 ; x_2=5

x		1		2		3		5	
x-1	-	0	+		+		+		+
3-x	+		+		+	0	-		-
-$x^2 + 7x - 10$	-		-	0	+		+	0	-

$$S_1 =]3; +\infty[\ ; \ S_2 = [2; 3]$$
$$S = S_1 \cup S_2 = [2; +\infty[$$

II. SYSTEME D'EQUATIONS A 3 ou 4 INCONNUES : PIVOT DE GAUSS

<u>Exemple 1</u> :Résoudre dans R^3 le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y-z=2 & (L_1) \\ 2x+y+2z=10 & (L_2) \\ -3x-y+z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

$etape\ 1: on\ fixe\ (L_1)\ comme\ ligne\ de\ pivot$

$$L_1 \rightarrow L_1$$
$$L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2$$
$$L_3 \rightarrow 3L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} x+2y-z=2 & (L'_1) \\ -3y+4z=6 & (L'_2) \\ 5y-2z=4 & (L'_3) \end{cases}$$

Etape 2 : on fixe (L'_2) $comme\ ligne\ de\ pivot$

$$L'_1 \rightarrow L'_1$$
$$L'_2 \rightarrow L'_2$$
$$L'_3 \rightarrow 5L'_2 + 3L'_3$$

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y+4z=6 \\ 14z=42 \end{cases}$$

$Conclusion$

$14z = 42 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3$

$-3y+4z=6 \quad \Leftrightarrow \quad -3y+4(3)=6 \quad \Leftrightarrow \quad y=2$

$x+2y-z \quad \Leftrightarrow \quad x+2(2)-3=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

S={(1; 2; 3)}

<u>Exemple 2</u> :Résoudre dans R^3 le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y+5z=4 & (L_1\ ) \\ x+y+2z=6 & (L_2 \\ 2x+3y+7z=10 & (L_3) \end{cases}$$

$$etape\ 1: on\ fixe\ (L_1\ )\ \ comme\ ligne\ de\ pivot$$

$$L_1 \ \rightarrow L_1$$
$$L_2 \ \rightarrow L_1\text{-}L_2$$
$$L_3 \rightarrow -2L_1+L_3$$

$$\begin{cases} x+2y+5z=4 & (\ L'_1\ ) \\ y+3z=-2 & (L'_2) \\ -y-3z=2 & (\ L'_3) \end{cases}$$

Etape 2 : on fixe (L'_2) *comme ligne de pivot*

$$L'_1 \ \rightarrow L'_1$$
$$L'_2 \ \ \rightarrow L'_2$$
$$L'_3 \ \rightarrow L'_2 + L'_3$$

$$\begin{cases} x+2y+5z=2 \\ y+3z=-2 \\ 0z=0 \end{cases}$$

$$0z=0\ est\ vrai\ \forall \quad z\ \in \mathbb{R}$$
$$.Soit\ t\ un\ réel\ ,posons\ z=t$$

$$x+2y-z=2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y+3t=-2 \\ x+2(-2-3t)+5t=2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y=-2-3t \\ x=t+8 \end{matrix}$$

$$S=\{(t-8;-3t-2;t)\}\ avec\ t \in R$$

Exemple 3 :Résoudre dans R^3 le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-2z=1 & (L_1\ ) \\ x-2y+z=1 & (L_2 \quad) \\ -2x+y+z=2 & (L_3) \end{cases}$$

$$etape\ 1: on\ fixe\ (L_1\ )\ \ comme\ ligne\ de\ pivot$$

$$L_1 \ \rightarrow L_1$$
$$L_2 \ \rightarrow -L_1+L_2$$
$$L_3 \rightarrow 2L_1+L_3$$

$$\begin{cases} x+y-2z=1 & (\ L'_1\ ) \\ -3y+3z=0 & (L'_2) \\ 3y-3z=3 & (\ L'_3) \end{cases}$$

Etape 2 : on fixe (L'_2) *comme ligne de pivot*

$$L'_1 \ \rightarrow L'_1$$

$$L'_2 \rightarrow L'_2$$
$$L'_3 \rightarrow L'_2 + L'_3$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0z = 3 \end{cases}$$

Conclusion

$0z = 3 \quad impossible \quad S = \emptyset$

Exercice d'application :

Résoudre par la méthode du pivot chacun des systèmes suivants

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = -36 \\ -10x - 7y + z = -29 \\ 6x + 4y - 3z = 29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x + 3y + z + 9t = 34 \\ 3x + 2y - 9z + 7t = 6 \\ -x + y - 6z + 5t = -3 \\ 7x - 4y + 4z - 6t = 29 \end{cases}$

III. Système d'équations à deux inconnues :Méthode Cramer

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On pose $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

-Si $\Delta \neq 0$ $le\ systeme\ a\ pour\ solution \{(x_0\,; y_o)\}$ avec $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

-Si $\Delta = 0; \Delta_x \neq 0\,; \Delta_y \neq 0\ dons\ S = \emptyset$

Si $\Delta = 0\,; \Delta_x = 0\,; \Delta_y = 0\ admet\ une\ infinité\ de\ couple\ de\ solutions$

$$S = \{(x; y)/ax + by = c\}$$

Exercice d'application :

1)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode Cramer :

$a)\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

2) Résoudre et discuter

$a)\begin{cases} mx + (m-2)y = 1 \\ (m-1) + my = -2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x + (3-m)y = m \\ mx + y = m - 2 \end{cases}$

IV. PROGRAMMATION LINEAIRE

La programmation linéaire est un problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes .La méthode graphique n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables .Son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique .Les contraintes économiques et logiques sont représentées graphiquement par des demi-plans dont l'intersection est un ensemble convexe(c.à.d. tout segment de droite dont les extrémités appartiennent à l'ensemble est entièrement inclus dans cet ensemble).Les solutions , si elles existent appartiennent à cet ensemble appelé région des solutions admissibles.

Il s'agit donc de chercher à l'intérieur de ce domaine le couple de solution optimisant la fonction

Exercice d'application :

MATHEMATIQUES 1S

Une entreprise fabrique deux types de produits A et B en utilisant 2 machines M_1 *et* M_2 *et une matiere premiere MP*.

Pour fabriquer un produit de A ,il faut utiliser M_1 pendant 2h, M_2 *pendant* $2h$ et 6kg de matière première.

Pour fabriquer un produit de B , il faut utiliser M_1 pendant 2h, M_2 *pendant* $4h$ et 2kg de matière première. Les disponibilités mensuelles des machines M_1 et M_2 sont respectivement 120h et 180h.Le stock de la matière première est limité à 300kg le mois. Chaque produit de A rapporte 4000f de bénéfice et chaque produit de B rapporte 2000f de bénéfice .Soit x le nombre de produit A y celui de B.

1)Ecrire le bénéfice total B(x) en fonction de x et y

2) Ecrire le système d'inéquations traduisant les contraintes

3) Résoudre graphiquement le système puis déterminer la zone d'admissibilité

4)Déterminer la quantité à produire dans chaque produit pour maximiser le bénéfice.

POLYNOMES

Pré requis

- Factoriser un trinôme du second degré
- Déterminer le signe d'un trinôme du second degré
- Résoudre une équation et une inéquation du premier et du second degré
- Résoudre un système d'équations à deux inconnues
- Résoudre un système d'équations en utilisant le PIVOT DE GAUSS

Objectifs de la leçon

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Connaitre le vocabulaire : polynôme, monôme, coefficient, degré, racine
- Vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme
- Factoriser un polynôme en utilisant les 3 méthodes
- Utiliser les propriétés pour résoudre certains problèmes
- Reconnaitre une fraction rationnelle, déterminer sa condition d'existence et la simplifier
- Diviser un polynôme par $x - a$, décomposer par division une fraction rationnelle

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet

Plan :(voir cours)

MATHEMATIQUES 1S

Déroulement possible

I. DEFINITION ET PROPRIETE :

1.DEFINITION

- On appelle monôme toute expression de la forme ax^n avec a $\in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
  Exemple : $2x^2$; $\sqrt{3}\,x$; $2 = 2x^0$
  $$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}\ n'est\ pas\ un\ monome\ ; \frac{1}{x} = x^{-1}\ n'estpas\ un\ monome$$
- On appelle polynôme toute somme algébrique finie de monômes .
  Exemple :
  P(x)=$3x^2 - 5x + 2$; Q(x)=$-x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
- On appelle degré d'un polynôme le degré le plus élevé de ses monômes .
  Dans l'exemple précèdent ,$d°\ P = 2 \quad et\ d°Q = 3$
- On appelle coefficient d'un polynôme, l'ensembles de ses monômes
  Dans l'exemple précèdent , les coefficients de P sont :3 ;-5 ;2 et les coefficients de Q sont : -1 ;2 ;-3 ;1
- Soient a_n , a_{n-1} , a_{n-2}, …………..a_o *des reels et n entier naturel*,la forme générale d'un polynôme P degré n est $P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots.. + a_0$

2.Operation sur les polynômes

Soient P et Q deux polynômes

La somme des polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ est un polynôme $h(x) = P(x) + Q(x)$

Le produit des polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ est un polynôme $g(x) = P(x).Q(x)$

- $d^{\circ}(P.Q) = d^{\circ}(P) + d^{\circ}(Q)$
- $d^{\circ}\ (P + Q) \leq sup\{\,d^{\circ}(P); d^{\circ}\ (Q)\}$
- Deux polynômes P *et* Q sont égaux si et seulement ils ont le même et que les coefficients des monômes de même degré égaux .

Autrement dit ,soient $P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots.. + a_0$ et $Q(x) = b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots.. + b_0$

$$P(x) = Q(x)\ ssi \begin{cases} \deg P(x) = \deg Q(x) \\ \forall i\,, a_i = b_i \end{cases} \qquad donc\ \begin{cases} n = m \\ \forall i\,, a_i = b_i \end{cases}$$

Exercice d'application :

P(x)=$3x^2 + 4x - 2$ $\quad Q(x) = x^3 + x^2 + 1 \quad R(x) = x^2 + 1$

Calculer $P(c).Q(x)$; $P(x).R(x)$; $4P(x)$.Que peut –on dire des degrés des polynômes obtenus.

II. .Racine d'un polynôme

1.Definition

On appelle racine d'un polynôme P ,le réel $\propto\ tel\ que\ P(\propto) = 0$.

Exemple :P(x)=$2x^3 + x^2 - x - 2$

P(1)=$2(1)^3 + 1^2 - 1 - 2 = 0$ donc 1 est racine de P .

2.Proprites

- Tout polynôme de degré n a au plus n racines .
- Tout polynôme de degré n qui a plus de n racines est un polynôme nul

- Si $\propto$ est une racine d'un polynôme P de degré n alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x{-}\propto).Q(x)$.Dans ce cas , on dit que le polynôme est factorisable ou divisible par x-∝
- Si $\propto$ n'est pas racine de P de degré n alors il existe deux polynômes Q de degré n-1 et R de degré nul tel que $P(x) = (x - \propto)Q(x) + R(x)$

III. Technique de factorisation d'un polynôme

1.Methode d'identification des coefficients

Factorisons P(x)=$2x^3 + x^2 - x - 2$ par la méthode d'identification des coefficients

P(1)=0 alors il existe un polynôme Q du second degré tel que P(x)=(x-1).Q(x)

$$Q(x) = a^2 + bx + c$$

P(x)=(x-1)$(ax^2 + bx + c)$=a$x^2 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$=a$x^3$ $+ (b-a)x^2(c-b)x - c$

Par identification des coefficients on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \\ -c = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \qquad Q(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

Par suite $P(x) = (x-1)(2x^2 + 3x + 2)$

Exemple :

$$P(x) = -x^3 + 3x - 2$$

Calculer P(1) puis factoriser P(x) en utilisant la méthode d'identification des coefficients

2.Methode de la division euclidienne

Factorisons P(x)=$2x^3 + x^2 - x - 2$ par la méthode de la division euclidienne

P(1)=0 alors il existe un polynôme Q du second degré tel que P(x)=(x-1).Q(x)

$$\begin{array}{cccccccc|c}
2x^3 & + & x^2 & - & x & - & 2 & & x-1 \\ \cline{9-9}
-2x^3 & + & 2x^2 & & & & & & 2x^2 + 3x + 2 \\ \cline{1-8}
0 & + & 3x^2 & - & x & & & & \\
 & - & 3x^2 & + & 3x & & & & \\ \cline{2-8}
 & & 0 & & +2x & - & 2 & & \\
 & & & & -2x & + & 2 & & \\ \cline{3-8}
 & & & & \mathbf{0} & & & &
\end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 2$ $\qquad$ $P(x) = (x-1)(2x^2 + 3x + 2)$

Exemple :

$$P(x) = -x^3 + 3x - 2$$

Calculer P(1) puis factoriser P(x) en utilisant la méthode de la division euclidienne

3.Methode Horner

Factorisons $P(x) = 2x^3 + x^2 - x - 2$ par la méthode Horner

P(1)=0 alors il existe un polynôme Q du second degré tel que P(x)=(x-1).Q(x)

$$Q(x) = a^2 + bx + c$$

Coefficients de P(x)	2	1	-1	-2
Racine 1	↓	2	3	2
Coefficients de Q(x)	2	3	2	0

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = (x-1)(2x^2 + 3x + 2)$

Exemple :

$$P(x) = -x^3 + 3x - 2$$

Calculer P(1) puis factoriser P(x) en utilisant la méthode d'identification des coefficients

Exercice d'application :

Soit un polynôme $P(x) = -2x^3 + x^2 + 8x - 4$

1) Montrer que 2 est une racine de P(x)
2) Factoriser complètement P(x)
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $P(x) = 0$ et $P(x) \geq 0$
4) En déduire les solutions de :

a) $-2x^6 + x^4 + 8x^2 - 4 = 0$

b) $-2(x-3)^3 + (x-3)^2 + 8(x-3) - 4 = 0$

c) $-2(-2x+1)^3 + (-2x+1)^2 + 8(-2x+1) - 4 < 0$

V. Fraction rationnelle

1. Définition

Soient f et g deux fonctions polynomes , la fonction h definie par h(x)=$\frac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fraction rationnelle .

Autrement dit , une fraction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes

2. Domaine de définition

La fonction h(x)=$\frac{f(x)}{g(x)}$ si et seulement si $g(x) \neq 0$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \setminus g(x) \neq 0\}$$

Exercice d'application :

Soient $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x+1}$ et $g(x) = \frac{x^3-4x+5}{x^2-1}$

a) Déterminer a , b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

b) Déterminer a, b , c et d pour que $g(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$

GENERALITE SUR LES FONCTIONS

Pré requis

- Bien utiliser les propriétés de calcul dans $\mathbb{R}$
- Calculer l'image et l'antécédent d'un réel (déjà vu en 3^{eme} $avec\ application\ affine$)
- Résoudre une équation et inéquation
- Factoriser un polynôme

Objectifs

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre une fonction et une application
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Connaitre une application injective , surjective , bijective
- Justifier qu'une application est injective , surjective , bijective
- Représenter graphiquement les fonctions au programme
- Reconnaitre la courbe d'une fonction
- Utiliser les représentations graphiques pour résoudre des équation et inéquations
- Déterminer le sens et dresser le tableau de variation des fonctions au programme
- Etudier la parité et/ou la périodicité d'une fonction
- Faire le lien entre parité de la fonction et symétrie de la courbe représentative d'une fonction
- Utiliser les formules de changement d'origine pour représenter des fonctions
- Déterminer l'image ou l'image réciproque d'un intervalle
- Construire à partir de la représentation graphique d'une fonction, celles des fonctions qui lui sont associées
- Démontrer qu'un point est un centre de symétrie de représentation graphique d'une fonction
- Démontrer qu'une droite est un axe de symétrie de la représentation graphique d'une fonction
- Construire la représentation graphique de la réciproque d'une fonction bijective
- Reconnaitre et/ou déterminer un majorant, un minorant d'une fonction
- Déterminer la composée de deux fonctions
- Décomposer une fonction donnée en composée de deux fonctions

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet

Plan :(voir cours)

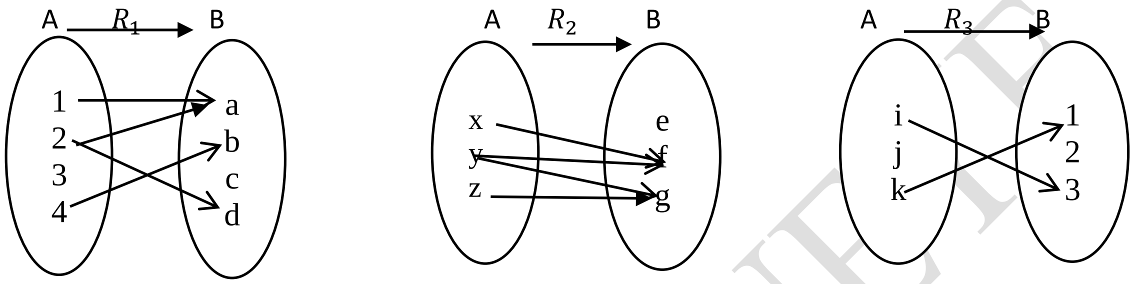
Déroulement possible

I. Notion de Fonction

1. Définition

On appelle fonction toute relation permettant d'associer tout élément d'un ensemble à au plus un élément dans un autre ensemble.

Exemple : On considère les relations suivantes :



R_1 est une fonction car tout élément de A associe au plus un élément de B

R_2 n'est pas une fonction car il y'a élément de A qui associe deux élément de B

R_3 est une fonction car tout élément de A associe au plus un élément de B

2. Vocabulaire et Notation

Si f est une fonction définie de A vers B alors :

-A est appelé ensemble de départ

-B est appelé ensemble d'arrivée

-les éléments de A sont appelées variables

-Si l'élément x de A est associé à l'élément y de B ,on écrit $f(x) = y$

-De plus y est appelé image de x et x est appelle antécédent y

On écrit : $f: A \to B$

$x \to f(x)$

On lit f définie de $A\ vers\ B$,qui a tout x de A associe $f(x)$ de B

Exemple :

$$f: \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x}{x-1}$$

-L'ensemble des images des éléments de A est appelé ensemble image de $f\ noté\ f(A)$

-L'ensemble des antécédents des éléments de B est appelé ensemble antécédent de f noté $f^{-1}(B)$.

3. Ensemble de définition

Soit f une fonction définie de A vers B ,on appelle domaine de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.Il est souvent noté D_f.

- Toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$

Soit $f\ et\ g$ deux fonctions polynômes :

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe si et seulement si $g(x) \neq 0$
- $\sqrt{g(x)}$ existe si et seulement si $g(x) \geq 0$
- $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ existe si et seulement si $\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
- $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ existe si et seulement si $g(x) > 0$

- $\sqrt{|g(x)|}$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{f(x)}{\sqrt{|g(x)|}}$ existe si et seulement si $g(x) \neq 0$
- $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$ *existe si et seulement si* $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

<u>Exercice d'application</u> :

Déterminer le domaine de définition de f dans chacun des cas suivants :

a)$f(x) = \frac{x+1}{3x^2-x-4}$

b)$f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

c)$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+x+5}$

d)$f(x) = \sqrt{\frac{|x+1|}{x^2}}$

e)$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1-x} & si\ x > 0 \\ \sqrt{x^2-4} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

f)$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1-x} & si\ x > 0 \\ \sqrt{|x^2-4|} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

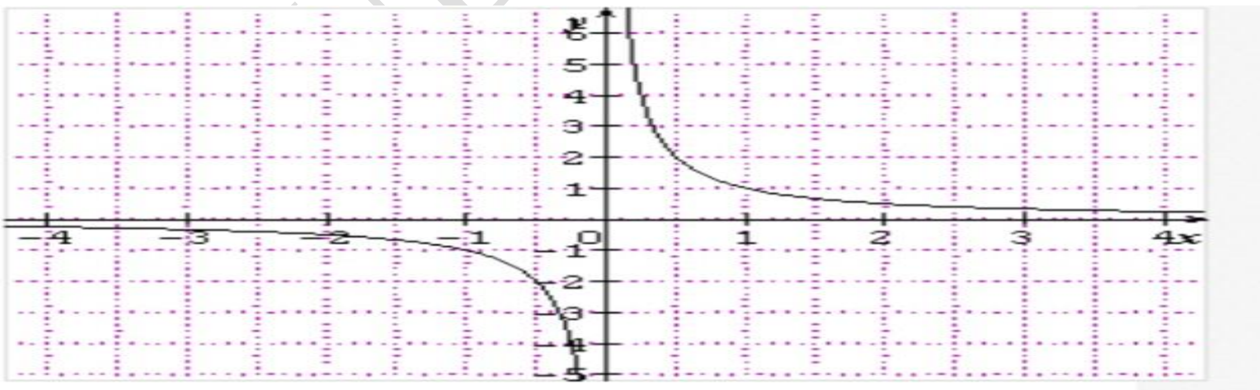
4. Courbe représentative

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On appelle courbe représentative d'une fonction f l'ensemble des point M$(x\,;y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$.Elle est souvent noté (C_f)

Exemple : Soit à tracer la courbe $f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}/\{0\}$

X	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
$f(x)$	-0.25	-0.5	-1	-2		2	1	0.5	0.25



II. Fonction majorée , minorée , bornée

1. Définition

Une fonction f est dite :

-majorée s'il existe un réel M tel que :$\forall x \in D_f\,; f(x) \leq M$

-minorée s'il existe un réel m tel que :$\forall x \in D_f\,; f(x) \geq m$

-bornée si elle *est* à *la fois majorée et minorée*

Exemple : $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ Montrons que f est majorée et minorée

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

On a $-\frac{1}{1+x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x^2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1\ donc\ f\ est\ majorée$

De plus $f(x) > 0\ \ alors\ f\ est\ minorée$.Ainsi $0 < f(x) < 1\ \forall\ x \in R\ d'ouf\ est\ bornée$

2. Maximum, minimum, extremum

-On appelle maximum d'une fonction f sur un intervalle I le réel $f(x_0)$ vérifiant $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in I$.On dit que f admet un maximum sur $I\ en\ x_0$.

-On appelle minimum d'une $fonction\ f\ sur$ un intervalle I le réel $f(x_0)$ vérifiant $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\ x \in I$.On dit que f admet un minimum sur $I\ en\ x_0$.

-Un extremum est un maximum ou un minimum :

L'extremum est absolu s'il est valable sur tout l'ensemble de définition. L'extremum est relatif s'il est valable sur une partie de l'ensemble de définition.

III. Parité et Périodicité

1. Parité

-Une fonction f est dite paire ssi $\begin{cases} \forall\ x\ \in\ D_f\ ; -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

-Une fonction f est dite impaire ssi $\begin{cases} \forall\ x\ \in\ D_f\ ; -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

<u>Exemple</u> : Etudions la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; $D_f\ = \mathbb{R}$; donc $\forall\ x \in D_f - x \in D_f$

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x)$ donc f est paire

$g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$;

$$D_g = \mathbb{R}/\{-1;1\}$$

$$x \in D_g \Leftrightarrow x \neq 1\ \ et\ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \neq -1\ et - x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -x\ \in\ D_g$$

$g(-x) = \frac{(-x)^3}{1+(-x)^2} = \frac{-x^3}{1+x^2} = -g(x)\ donc\ g\ est\ impaire$

$$h(x) = \frac{x^2}{1+x}; D_h = R/\{-1\}$$

$1 \in D_h$ mais $-1 \notin D_h\ donc\ h\ n'est\ ni\ paire\ ni\ impaire$

2. Périodicité

a) Définition

Soit k un réel ,Une fonction f est périodique de période k si $\begin{cases} \forall\ x\ \in D_f\ \ , x + k\ \in D_f \\ f(x+k) = f(x) \end{cases}$

<u>Exemple</u> :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\ tel\ que : f(x) = sinx$

$$\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ , x + 2\pi\ \in\ \mathbb{R}$$

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = sinx = f(x)\ donc\ f\ est\ periodique\ de\ periode\ T = 2\pi$

- Les fonctions $\cos(\omega t + \phi)\ et\ \sin(\omega t + \phi)\ ont\ pour\ periode\ T = \frac{2\pi}{\omega}$

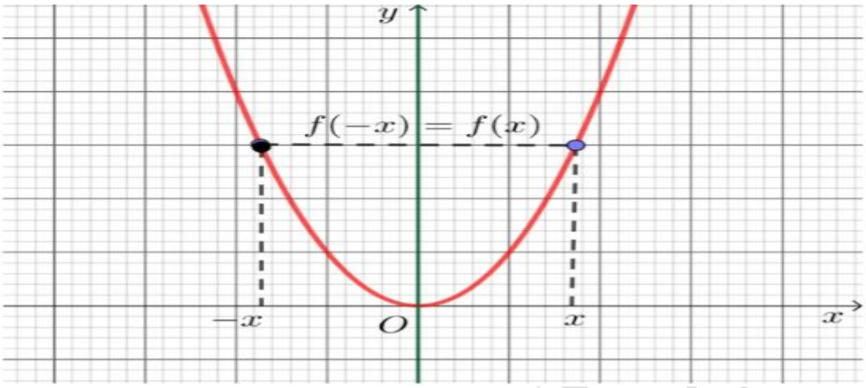
  La fonction $f(x) = \sin 2x\ a\ pour\ periode\ T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

  $\mathrm{g(x)} = \sin(2x) + 2\cos(x-5)\ est\ la\ somme\ de\ deux\ fonctions\ de\ periodes$

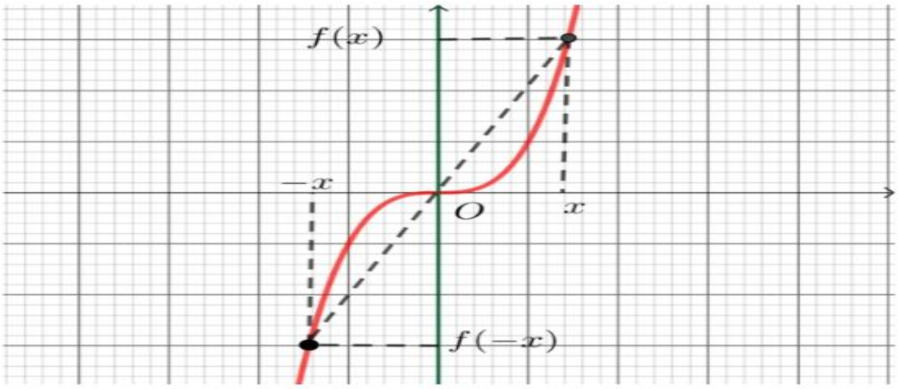
respectives $T_1 = \pi$ et $T_2 = 2\pi$. Dans ce cas la période T de g est le PPMC(T_1 ; T_2)
donc la période de g est $T = 2\pi$

3. Propriété graphique

- Si une fonction f est paire alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
  La fonction $f(x) = x^2$ $est\ une\ fonction\ paire$



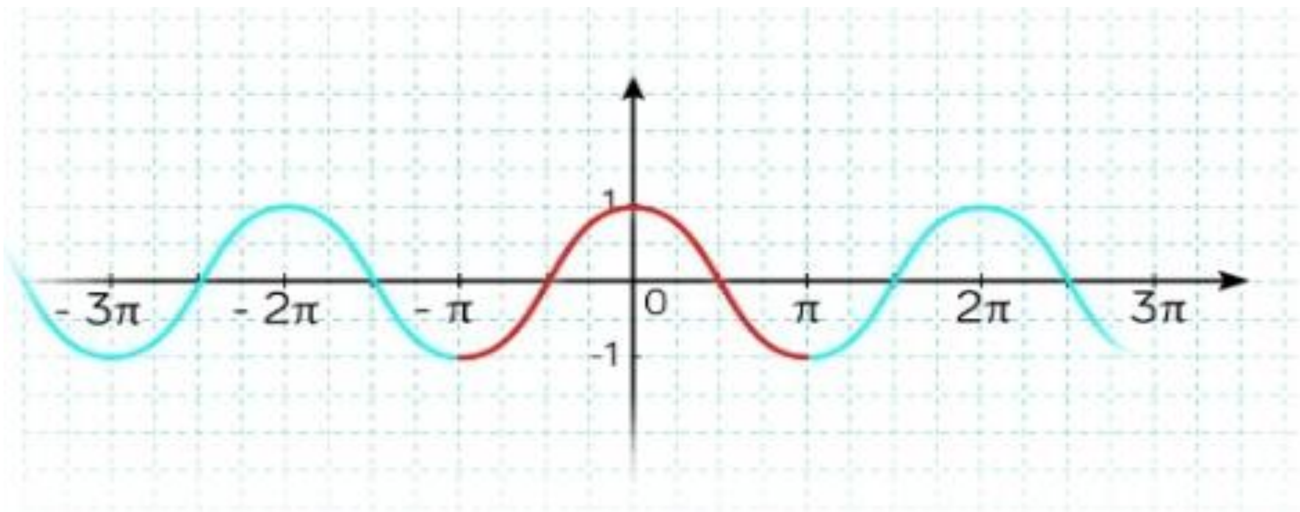
- Si une fonction f est impaire alors sa courbe est symétrique par rapport à l'origine
  La fonction $f(x) = x^3$ $est\ impaire$



- Si une fonction f est périodique de période k alors sa courbe par translation du vecteur
  $\vec{u} = k\vec{i}$ $dans\ le\ repere\ orthonormal$ $(o, \vec{i}, \vec{j})$.C'est à dire $t_{\vec{u}}(C_f)$=C_f

La fonction $f(x) = cosx$ $est\ periodique\ de\ 2\pi$

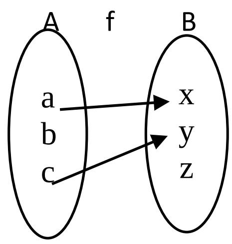
77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com



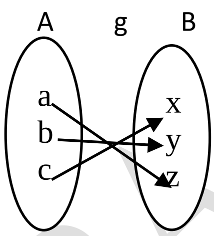
IV. Notion d'application

1. Définition

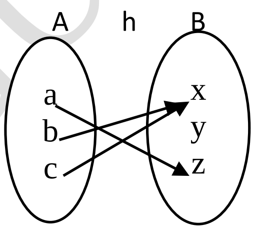
On appelle application de A vers B toute relation de A vers B qui associe tout élément de A à un et un seul élément de B



f n'est pas une application



g est une application



h est une application

Remarque :

$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

Pour que f soit une application ,il faut que $A \subset D_f$.

Toute application est une fonction mais l'inverse est fausse.

2. Exemple

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 2x + 1$$

$D_f = \mathbb{R}$ $donc\ f\ est\ une\ application$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{x}{x-1}$$

$D_g = \mathbb{R}/\{1\}$ donc g n'est pas une application

$$h: [0; 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sqrt{x}$$

$D_h = [0; +\infty[$ donc h est une application

$$k: \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{1}{x-x^2}$$

$D_k = \mathbb{R}/\{0; 1\}$ donc k n'est pas une application

3. Fonction identité

Soit A un ensemble. On appelle application identité de A Id_A définie de A vers A qui a tout x associe x.

$$Id_A : A \to A$$
$$x \to x$$

4. Fonction partie entière

On appelle fonction partie entière ,l'application définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ tel que :

$$E(x) = n \in \mathbb{Z}\, si\ x\ \in\ [n, n+1[$$

- $\forall\, x\ \in \mathbb{R}\ on\ a\ E(x) \leq x < E(x) + 1$
- $\forall\, x \in\ \mathbb{R}\ \ et\ p\ \in\ \mathbb{Z}\ \ \ on\ a\ E(x+p) = E(x) + p$

5. Injection, surjection, bijection

a. Définition

- ✓ Une application est dite injective (ou est une injection) si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.
- ✓ Une application est dite surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent dans l'ensemble de départ
- ✓ Une application est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective c'est-à-dire tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ

b. Cas des fonctions numériques

Soit f une fonction définie $A\ vers\ B$.

- ✓ f est injective ssi $\forall\ y \in B\ l'quation\ f(x) = y\ admet\ au\ plus\ une\ solution\ dans\ A.$
- ✓ f est surjective ssi $\forall\ y \in B\ l'equation\ f(x) = y\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ dans\ A.$
- ✓ f est bijective ssi $\forall\ y \in B\ l'equation\ f(x) = y\ admet\ une\ unique\ solution\ dans\ A.$

<u>Exemple</u> :

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont injectives, bijectives surjectives.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}\ \ ; f(x) = y \Leftrightarrow\ \ x^2 = y$

$si\ y > 0; x = \sqrt{y}\ \ ou\ x = -\sqrt{y}\,; S = \{\sqrt{y}\ ; -\sqrt{y}\}$

Si $y < 0;\qquad S = \emptyset$

Si $y = 0; x = 0\quad ; S = \{0\}$

Donc f n'est ni injective ni surjective

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}\ \ ; g(x) = y \Leftrightarrow\ \ x^2 = y$

$si\ y > 0; x = \sqrt{y}\ \ ou\ x = -\sqrt{y}\,; S = \{\sqrt{y}\ \}$

Si $y < 0;\qquad S = \emptyset$

Si $y = 0; x = 0\quad ; S = \{0\}$

$\forall\ y\ \in\ \mathbb{R}\,, l'equation\ g(x) = y$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}_+$donc g est injective de plus elle n'est pas surjective .

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \to x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$; $h(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$
$si\ y > 0; x = \sqrt{y}\ ou\ x = -\sqrt{y}; S = \{\sqrt{y}\}$
Si $y = 0; x = 0$; $S = \{0\}$
$\forall\ y \in \mathbb{R}_+, l'equation\ g(x) = y$ dans $\mathbb{R}_+$ donc g est bijective

$$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \to x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$; $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$
$si\ y > 0; x = \sqrt{y}\ ou\ x = -\sqrt{y}; S = \{\sqrt{y}\ ; -\sqrt{y}\}$
Si $y = 0; x = 0$; $S = \{0\}$
$\forall\ y \in \mathbb{R}_+, l'equation\ g(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ donc m est surjective de plus elle n'est pas injective .

c. Autres définitions

Soit f une fonction définie de A vers B :
f est injective si et seulement si :$\forall\ x_1 \in A\ et\ x_2 \in A; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Autrement dit :$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
f est surjective ssi $f(A) = B$

VI. Fonctions composées

1. Définition

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions définies respectivement de A vers B et de B vers C.

$$f : A \to B\ et\ g : B \to C$$

On appelle fonction composée de f par g la fonction notée gof définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\forall\ x \in D_f\ ; f(x) \in D_g} \\ \boldsymbol{gof(x) = g[f(x)]} \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :

$$f;\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2 \qquad\qquad x \to \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} \quad ; \boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}^*$$

Détermination de D_{fog} etD_{gof}

$$x \in D_{fog} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ g(x) \in \mathbb{R}\ \ vrai \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{D_{fog}} = \mathbb{R}^*$$

$$x \in D_{gof} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ g \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$D_{gof} = \mathbb{R}^*$$

Détermination de $fog\ et\ gof$

$fog(x) = f[g(x)]$=$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$

$$gof(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{x-1}{x+1}$ $\qquad$ $x \to \sqrt{x}$

$D_h = \mathbb{R}/\{-1\}$; $D_k = [0; +\infty[$

Détermination de D_{hok}

$$x \in D_{hok} \Rightarrow \begin{cases} x \in D_k \\ k(x) \in D_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq -1 \; vrai \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

$D_{hok} = [0; +\infty[$

Détermination de hok

$$hok(x) = h[k(x)] = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

2. Propriétés

- Si f est une fonction définie de A vers B on a : $foId_A = Id_Bof = f$
- Soient f, g, h $definies\ respectivement$ de A vers B , de B vers C et de C vers D on a :

$$hogof = ho(gof) = (hog)of$$

VII. Bijection réciproque

1. Définition

Soit f une bijection définie de A vers B. On appelle bijection réciproque l'application notée f^{-1} définie de B vers A tel que si $f(x) = y$ $alors$ $f^{-1}(y) = x$

Exemple :

$$f: \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}^*$$

$$x \to \frac{1}{x-1}$$

Montrons que f est bijective

$$Soit\ y \in \mathbb{R}^* ; f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y} + 1$$

Vérifions que $\frac{1}{y} + 1 \in \mathbb{R}/\{1\}$

On a $\frac{1}{y} \neq 0 \; \forall y \in \mathbb{R}^*$ donc $\frac{1}{y} + 1 \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + 1 \in \mathbb{R}/\{1\}$

S= $\left\{\frac{1}{y} + 1\right\}$

Conclusion : $\forall y \in \mathbb{R}^*$ $l'equation f(x) = y$ $admet\ une\ seule\ solution\ dans$ $\mathbb{R}/\{1\}$, donc f est bijective

Déterminons f^{-1}

$$f^{-1}: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}/\{1\}$$

$$x \to \frac{1}{x} + 1$$

2. Propriétés

- Une application f admet une bijection réciproque f^{-1} ssi elle est bijective . De plus f^{-1}est bijective .

- Si f est une bijection définie de A vers B alors on a :$fof^{-1} = Id_B$ et $f^{-1}of = Id_A$
- Soit f une bijection définie de A vers B et g une bijection définie de B vers A.
  Si $gof = Id_A$ ou $fog = Id_B$ alors $g = f^{-1}$
- Si f est une bijection définie de A vers B et g une bijection définie de B vers C alors gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

I. Sens de variation

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f est dite décroissante sur un intervalle I si $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Une fonction f est dite constante sur un intervalle I *si pour tout reel appartenant à* I *on a* $f(x_1)$=$f(x_2)$
- f est monotone sur un intervalle I *si elle est croissante ou decroissante sur* I

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$; $I[0.+\infty[$.Etudions le sens de variation de f *sur* I

Soit x_1 *et* x_2 *deux elements de* I

$$x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ d'ou } f \text{ est croisssante sur } I$$

2. Taux de variation

On appelle taux de variation d'une fonction f *entre* x_1 *et* x_2 *le reel* $T(x_1\,; x_2)$ *definie par*

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

- f *est croissante sur* I *si pour tout reel distint* x_1 *et* x_2, $T(x_1; x_2) > 0$
- f *est décroissante sur* I *si pour tout reel distint* x_1 *et* x_2, $T(x_1; x_2) < 0$
- f *est constante sur* I *si pour tout reel distint* x_1 *et* x_2, $T(x_1; x_2) = 0$

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$.*Etudions le sens de variation sur* $]-\infty; 0]$ *et* $[0; +\infty[$

$$T(x_1; x_2) = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Sur $]-\infty; 0]$; $x_1 < 0; x_2 < 0$ *donc* $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow T(x_1; x_2) < 0$ *d'ou* f *decroissante sur* $[-\infty; 0[$

Sur $]0; +\infty]$; $x_1 > 0; x_2 > 0$ *donc* $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow T(x_1; x_2) > 0$ *d'ou* f *croissante sur* $[0;\ +\infty[$

3. Tableau de variation

C'est un tableau dans lequel sont consignés les différents sens de variations d'une fonction sur un ensemble donné

Exemple :Etablissons le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^2$

V. f *decroissante sur* $[-\infty; 0[$; f *decroissante sur* $[0;\ +\infty[$

x	-∞	0	+∞
f	↘	$f(0) = 0$	↗

II. Elément de symétrie

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative

1. Axe de symétrie

La droite d'équation $x = a$ est un axe symétrie à $\mathbb{C}_f$ ssi $\begin{cases} \forall x \in D_f , 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

Exemple :

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 4.$ *Montrons que la droite* $x = 2$ *est un centre de symetie à* $\mathbb{C}_f$

Il suffira de montrer que :$\begin{cases} \forall x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, 4-x \in \mathbb{R} \\ f(4-x) = f(x) \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; 4 - x \in \mathbb{R}$$

$$f(4-x) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 4 = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 = f(x)$$

Donc la droite $x = 2$ est une axe de symétrie .

Remarque : Si une fonction est paire alors la droite x=0 est un axe de symétrie.

2. Centre de symétrie

Le point I$\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie à C_f ssi :$\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$.Montrons que I$\binom{3}{2}$ est un centre de symétrie .

Il suffira de montrer que :$\begin{cases} \forall x \in D_f ; 6 - x \in D_f \\ f(6-x) + f(x) = 4 \end{cases}$

$$D_f = \mathbb{R}/\{3\} ; x \in D_f \Rightarrow x \neq 3$$

$$\Rightarrow -x \neq -3 \Rightarrow 6 - x \neq 6 - 3 \Rightarrow 6 - x \neq 0 \; donc \; 6 - x \in D_f$$

$$f(6-x) + f(x) = \frac{2(6-x)-1}{6-x-3} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{12-2x-1}{3-x} + \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2x-11}{x-3} + \frac{2x-1}{x-3}$$

$$f(6-x) + f(x) = \frac{4x-12}{x-3} = \frac{4(x-3)}{x-3} = 4 \; ; donc \; I\binom{3}{2} \; est \; un \; centre \; de \; symetrie$$

Remarque : Si une fonction est impaire alors l'origine du repère est un centre de symétrie .

Exercice d'application :

a)$f(x) = -x^2 + 2x + 3$. *Montrer que* $x = 1$ *est un axe de symetrie*

b)$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x}$. *Montrer que* $I(0; -2)$ *est un centre de symertie*

III. Fonctions associées

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Les fonctions $g(x) = -f(x)$; $h(x) = |f(x)|$; $k(x) = f(x) + a$; $m(x) = f(x-a)$ et $z(x) = f(x-a) + b$ sont appelées fonctions associées à f.

- $g(x) = -f(x) \Rightarrow C_f$ *et* C_g *sont symetriques par rapport à l'axe*$(x'ox)$
- h(x)=$|f(x)| \begin{cases} -f(x) \;\; si \; f(x) < 0 \Rightarrow C_h \; est \; symetruque \; de \; C_f \; par \; rapport \; à \; (x'ox) \\ f(x), si \; f(x) \geq 0 \Rightarrow \; donc \; les \; courbes \; de \; h \; et \; f \; sont \; les \; memes (C_h = C_f) \end{cases}$
- $k(x) = f(x) + a \Rightarrow C_k$ *est l'image de* C_f *par la translation du vecteur* $\vec{u}\binom{0}{a}$
- $m(x) = f(x-a) \Rightarrow C_m$ *est l'image de* C_f *par la translation du vecteur* $\vec{u}\binom{a}{0}$
- $z(x) = f(x-a) + b \Rightarrow C_z$ *est l'image de* C_f *par la translation du vecteur* $\vec{u}\binom{a}{b}$

IV. Restriction et prolongement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f_1 *est une restriction de* f *sur* I *ssi* $\begin{cases} I \subset D_f \\ \forall x \in I , f_1(x) = f(x) \end{cases}$

Exemple :

$$f(x) = |x| = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$f_1(x) = x$ *est la restriction de* f *sur* $[0; +\infty[$; $f_2(x) = -x$ *est la restriction de* f *sur* $]-\infty; 0[$

- f_1 *est un prolongement de* f *sur un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *ssi*: $\begin{cases} I \subset J \\ \forall\, x \in I\, ; f_1(x) = f(x) \end{cases}$

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad ; D_f = \mathbb{R}/\{0\}$$

Soit $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x} \; si\; x \neq 0 \\ -1 \quad si\; x = 0 \end{cases}$; g est un prolongement de f *sur* $\mathbb{R}$

V. Operations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions :

- $(f+g)$ *est la fonction definie sur* $D_f \cap D_g$ *tel que* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f.g$ *est la fonction definie sur* $D_f \cap D_g$ *tel que* $(f.g)x = f(x).g(x)$
- $\frac{f}{g}$ *est la fonction definie sur* $D_f \cap D_g \cap A$ *tel que* $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$A = \{x \in D_g \,/ g(x) \neq 0\}$$

Complément sur le calcul vectoriel

Pré requis :

- Bien utiliser les vecteurs
- Connaitre les propriétés du barycentre de deux points et de bien les utiliser
- Déterminer les coordonnées d'un point connaissant le barycentre

Objectifs :

Après cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Réduire un vecteur du type $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD}$
- Connaitre les relations vectorielles caractérisant le barycentre de quatre points pondérés
- Construire le barycentre de quatre points pondérés
- Calculer les coordonnées d'un barycentre de quatre points pondérés
- Calculer un produit scalaire
- Déterminer les lignes de niveau au programme
- Connaitre et utiliser les formules d'Al Kashi et les relations métriques dans un triangle
- Déterminer l'équation d'un cercle connaissant son centre et le rayon
- Déterminer l'équation d'un cercle connaissant les coordonnées de deux points formant le diamètre.
- Déterminer le centre et le rayon d'un cercle connaissant l'équation

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Barycentre

1. Définition

Soient n un entier naturel ,$A_1, A_2, \dots \dots A_n$,n *points ponderes* ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots \alpha_n$ *n reels non* Nuls .Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots .. + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = 0$$

Le point G est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$

2. Propriétés

- Le barycentre de n points ne changement lorsqu'on multiplie tous le coefficients par un même nombre réel non nul (Homogénéité du barycentre)

Si G=bar$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$. *Pour tout reel* $k \neq 0$, *on a* :
G=bar$\{(A_1, k\alpha_1), (A_2, k\alpha_2) \dots \dots (A_n, k\alpha_n)\}$

- Si G= bar $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$ *alors pour tout reel M du plan on a* :

$$\boldsymbol{\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \dots . \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots .. + \alpha_n)\overrightarrow{MG}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}$$

- Si G=bar$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$ et si H=bar$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)\}$ alors on a :

G=bar$\{(H, \alpha_1 + \alpha_2), (A_3, \alpha_3) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$ (barycentre partiel)

- Soit un repère orthonormé (o ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) ; Si G=bar$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \dots \dots (A_n, \alpha_n)\}$ alors on a :

$$\boldsymbol{x_G = \frac{\alpha_1 . x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \cdots + \alpha_n . x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n} \quad y_G = \frac{\alpha_1 . y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \cdots + \alpha_n . y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n}}$$

$$\boldsymbol{x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \qquad et\ y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$$

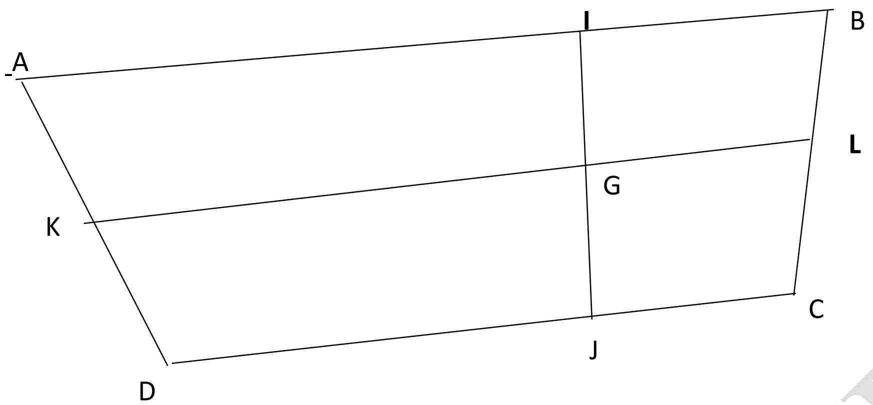
Exemple :

A , B, C et D sont quatre points du plan tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés.
G= bar$\{(A, 1), (B, 2), (C, 2), (D, 1)\}$.

1) Place les points $I = bar\{(A, 1), (B, 2)\}\ et\ J = bar\{(C, 2), (D, 1)\}$
2) Démontrer $G \in (IJ)$
3) On désigne par K le milieu de $[AD]$ *et L milieu de* $[BC]$.Démontrer que G, K et L sont alignés

Solution

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad et \qquad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$



2)Démontrons que $G \in (IJ)$

$$on\ a\ K = bar\{(A,1),(D,1)\}\,.\,L = bar\{(B,2),(C,2)\}$$
$$,I = bar\{(A,1),(B,2)\}\ et\ J = bar\{(C,2),(D,1)\}$$

Donc d'après le théorème du barycentre partiel on a : G= bar$\{(I,3),(G,3)\}$ d'où $G \in (IJ)$.4

3)Démontrons que K, G et L sont alignés

K et L milieux respectifs de $[AD]\ et\ [BC]\ donc$

$K = bar\{(A,1),(D,1)\}\ \ et\ \ L = bar\{(B,2),(C,2)\}$ or G= bar$\{(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)\}$

donc d'après le théorème du barycentre partiel , on a :

$$G = bar\{(K,2),(L,4)\}\ d'où\ G\ ,K\ et\ L\ sont\ alignés$$

II. Produit Scalaire

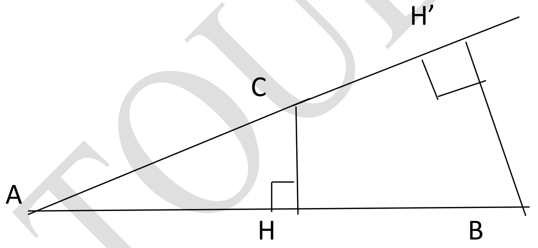
1. Définition

- Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ deux\ vecteurs\ du\ plan\ ,A,B\ et\ C\ trois\ points\ tels\ que\ \vec{u} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ le\ reel\ noté\ \vec{u}.\vec{v}\ et\ defini\ par$:

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AC \times AH'}$$

Avec H le projeté orthogonal de C sur (AB) et H' le projeté orthogonal de B sur (AC)



En remarquant que AH'=$AB \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\ \ et\ AH = AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ on aura donc

- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$
- $Dans\ un\ repre\ orthonormé\ (o,\vec{\imath},\vec{\jmath});\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\ deux\ vecteurs\ de\ cette\ base\ ,on\ a$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

2. Propriétés

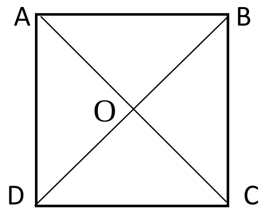
$$Soient\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\ trois\ vecteurs\ ,\alpha\ et\beta\ des\ reels$$

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha.\beta(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = u^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + v^2$
- $\vec{u}-\vec{v})^2 = u^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + v^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = u^2 - v^2$

- $Si\ \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq 0\ et\ \vec{u}.\vec{v} = 0\ alors\ \vec{u} \perp \vec{v}$

<u>Exemple :</u>

ABCD est un carré de centre O et de cote 4cm. Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AD}$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos 45° = 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\ car\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AB}\right) = -AB^2 = -16$$
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}AC^2 = -8$$
$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD} = -2\sqrt{2} \times 4 \times cos45° = -8$$

3. Application du produit scalaire

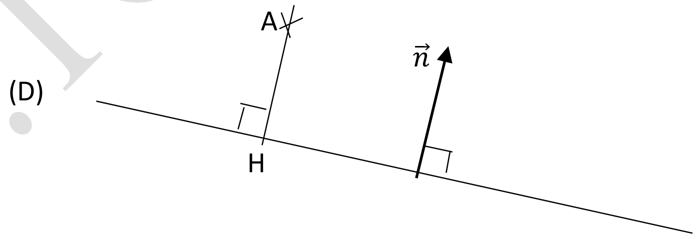
a. Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite (D) est la distance AH où H est le projeté orthogonal A sur (D).Elle est notée d(A ,D).

- Si (D) a pour équation $ax + by + c$=0 et A$\binom{x_0}{y_0}$ dans un repère orthonormé alors on a :

$$\boldsymbol{d(A, D) = \frac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

<u>Preuve</u> :



(D) :$ax + by + c$=0 et $\vec{n}\binom{a}{b}$ $un\ vecteur\ normal$ à (D).
Un vecteur normal à une droite est un vecteur orthogonal aux vecteurs directeurs de cette droite .

$$\overrightarrow{AH}\ et\ \vec{n}\ sont\ colineaires\ ; \left|\cos(\overrightarrow{AH}; \vec{n})\right| = 1$$

Par suite $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right| = AH \times \|\vec{n}\|\ \ avec\ \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \end{pmatrix}\ \ et\ \vec{n}\binom{a}{b}$

$$\overrightarrow{AH}.\vec{n} = a(x_H - x_o) + b(y_H - y_o) = (ax_H + by_H) - ax_0 - by_0$$

Or $H \in (D)\ donc\ ax_H + by_H + c = 0\ \Leftrightarrow ax_H + by_H = -c$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

On aura $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = -c - ax_0 - by_0 \Rightarrow |\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\| = |ax_0 + by_0 + c|$

D'où $\boldsymbol{AH = \frac{|ax_0+bx_0+c|}{\vec{n}} = \frac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

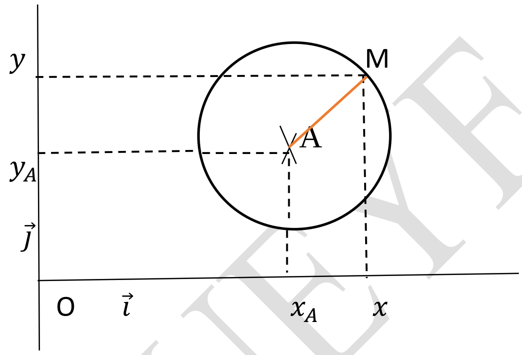
b. Equation de cercle

- **Equation d'un cercle connaissant le centre et le rayon**

Soit A $\binom{a}{b}$ le centre d'un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon r .L' équation du cercle $\mathcal{C}$ s' écrit de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Preuve



Soit M$\binom{x}{y}$ un point du cercle

$$AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2$$

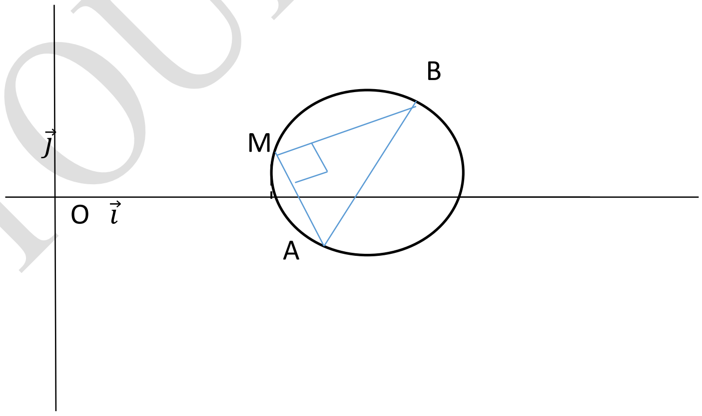
$$(x - x_A)^2 + (y - y_B)^2 = r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- **Equation d'un cercle connaissant deux points formant un diamètre**

Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ avec $A\binom{x_A}{x_B}$ *et* $B\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'équation du cercle $(\mathcal{C})$ s'écrit :$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$



Le triangle AMB est rectangle en M donc $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_B \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

Exercice d'application :

1)Déterminer l'équation du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre $I\binom{1}{-2}$ et de rayon 2cm

2) Déterminer l'équation du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de diamètre AB tel que $A\binom{1}{3}$ et $B\binom{-4}{2}$

3) Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C}_3)$: $x^2-4x+y^2-6y-12=0$

4) Déterminer l'équation de la droite (D) tangent au cercle $(\mathcal{C}_3)$ au point K$\binom{2}{-2}$

c. Lignes de niveaux

Soit f une application du plan dans $\mathbb{R}$ $et\ k\ un\ reel\ donné\ .On\ appelle\ ligne\ de\ niveau$ k de $f, l'ensemble\ L_k\ des\ ponts\ M\ du\ plan\ tel\ que\ f(M)=k$

$$f: P \to \mathbb{R}$$
$$M \to f(M)$$

✓ **Etude de lignes de niveaux**

- $\boldsymbol{f(M)=MA^2+MB^2}$

Soit I milieu de $[AB]$.

$$f(M)=MA^2+MB^2$$
$$f(M)=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$f(M)=MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+IB^2$$
$$f(M)=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$$

Or $IA^2+IB^2=2IA^2=2(\frac{1}{2}AB)^2=\frac{1}{2}AB^2\ et\ 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=\vec{0}$

On aura $\boldsymbol{f(M)=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2}$ **(théorème de la médiane)**

$$f(M)=k \Rightarrow \boldsymbol{2MI^2+\frac{1}{2}AB^2=k}$$
$$MI^2=\frac{k-\frac{1}{2}AB^2}{2}$$

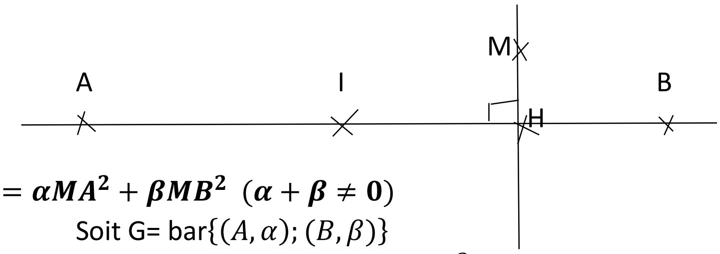
- $Si\ k-\frac{1}{2}AB^2=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}AB^2\ donc\ MI=0\ d'où\ L_k=\{I\}$
- $Si\ k-\frac{1}{2}AB^2<0 \Rightarrow k<\frac{1}{2}AB^2\ \ donc\ MI<0\ \ d'où\ L_k=\emptyset$
- $Si\ k-\frac{1}{2}AB^2>0 \Rightarrow k>\frac{1}{2}AB^2\ \ donc\ MI=\sqrt{\frac{k-\frac{1}{2}AB^2}{2}}\ \ d'où\ L_k=\mathcal{C}(I;\sqrt{\frac{k-\frac{1}{2}AB^2}{2}})$

- $\boldsymbol{f(M)=MA^2-MB^2}$

$$f(M)=MA^2-MB^2$$
$$f(M)=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$$
$$Soit\ I\ milieu\ de\ [AB]$$
$$f(M)=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$or\ \overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}\ \ et\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$
$$\boldsymbol{f(M)=2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}}$$
$$f(M)=k \Rightarrow \boldsymbol{2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=k}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) donc $2BA.MI=2AB\times IH$

On aura $2AB\times IH=k\ d'où$ $\boldsymbol{IH=\frac{k}{2AB}}$



- $f(M) = \boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2}$ $(\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 0})$

Soit G= bar$\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

$$f(M) = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$

$$f(M) = \alpha MG^2 + 2\alpha\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \alpha GA^2 + \beta MG^2 + 2\beta\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}.\beta GB^2$$

$$f(M) = (\alpha+\beta)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

$$2\overrightarrow{MG}\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) = 0 \quad et\ \alpha GA^2 + \beta GB^2 = f(G)$$

Donc $\boldsymbol{f(M) = (\alpha+\beta)MG^2 + f(G)}$

$$f(M) = k \Rightarrow (\alpha+\beta)MG^2 + f(G) = k$$

$$\boldsymbol{MG^2 = \frac{k - f(G)}{\alpha+\beta}}$$

- $Si\ k - f(G) = 0 \Rightarrow k = f(G)\ donc\ MG = 0\ d'où\ L_k = \{G\}$
- $Si\ \boldsymbol{\frac{k-f(G)}{\alpha+\beta}} < 0 \Rightarrow\ MG < 0\ d'où\ L_k = \emptyset$
- $Si\ \boldsymbol{\frac{k-f(G)}{\alpha+\beta}} > 0\ \ donc\ MG = \sqrt{\boldsymbol{\frac{k-f(G)}{\alpha+\beta}}}\ \ d'où\ L_k = \mathcal{C}(G, \sqrt{\boldsymbol{\frac{k-f(G)}{\alpha+\beta}}})$

- $\boldsymbol{f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}$

Soit $I\ milieu\ de\ [AB]$

$$f(M) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$f(M) = MI^2 + +\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

$$f(M) = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) - IA^2$$

$$Or\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0 \quad et\ IA^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 = \frac{1}{4}AB^2$$

$$\boldsymbol{f(M) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$$

$$f(M) = k \Rightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k$$

$$MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$$

- Si $k + \frac{1}{4}AB^2 = 0 \Rightarrow MI^2 = 0\ \ alors\ L_k = \{I\}$
- Si $k + \frac{1}{4}AB^2 < 0 \Rightarrow MI^2 < 0\ \ alors\ L_k = \emptyset$
- Si $k + \frac{1}{4}AB^2 > 0 \Rightarrow MI = \sqrt{k + \frac{1}{4}AB^2}\ \ alors\ L_k = \mathcal{C}(I, k + \frac{1}{4}AB^2)$

- $\boldsymbol{f(M) = \frac{MA}{MB}}$

$$f(M) = k$$

  - Si $k = 1 \Rightarrow MA = MB\ donc\ M\ \in à\ la\ mediatrice\ de\ (AB)$
  - Si $k = 0\ \Rightarrow MA = 0\ donc\ L_k = \{A\}$
  - $Si\ k < 0\ alors\ L_k = \emptyset$
  - Si $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}\quad \frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MA = kMB$

$$MA^2 = kMB^2 \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$$
$$(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$$
$$Posons\ I = bar\{(A,1),(B,-k)\ \ et\ J = bar\{(A,1),(B.k)\}\}$$
$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MI} \qquad et\ \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MJ}$$

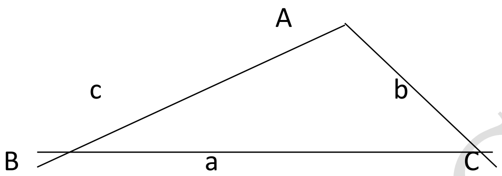
On aura
$$(1-k)(1+k)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$$
$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$$

Donc l'ensemble des points M est un cercle de diamètre $[IJ]$

4. Relations métriques

- **Théorème d'Al Kashi**

Soit ABC un triangle. On désigne par a, b et c les mesures respectives des cotes BC ,AC et AB



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

<u>Preuve</u>

$$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$$
$$BC^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + AC^2$$
$$BC = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos\hat{A}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

De la même manière , on montre les deux autres égalités

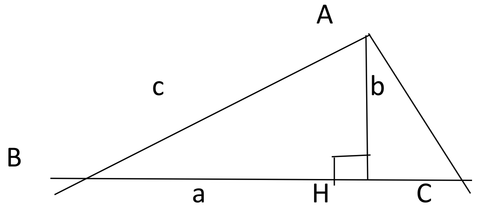
- **Théorème du sinus**

Considérons le triangle précèdent on a :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\vec{B}} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

Où S est l'aire du triangle ABC et R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle

<u>Preuve</u>

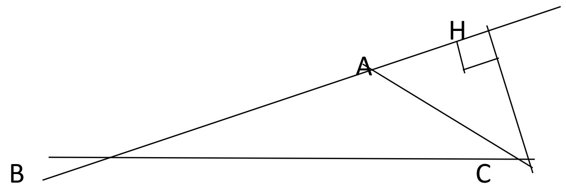


$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{BC \times AB\sin\hat{B}}{2}$$

$$= \frac{ac\sin\hat{B}}{2}$$

$$\frac{2S}{ac} = \sin\hat{B}$$

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\hat{B}}{b} \qquad donc\ \frac{abc}{2S} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$$



$$S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times AC\sin\hat{A}}{2} = \frac{bc\sin\hat{A}}{2}$$

$$\frac{2S}{bc} = \sin\hat{A}$$

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\hat{A}}{a} \qquad donc\ \frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\hat{A}}$$

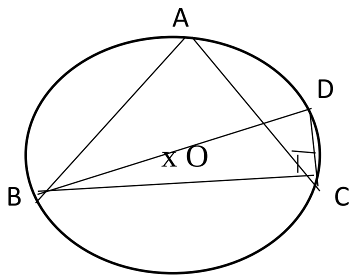
De même manière , on montre que

$$\frac{abc}{2S} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$D'où \quad \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\vec{B}} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}$$

De plus

Considérons ce cercle ci-dessous de centre O circonscrit au triangle ABC et D un point du cercle.



Les angles $\widehat{BAC}\ et\ \widehat{BDC}\ sont\ deS\ angles\ inscrits\ qui\ interceptent\ l'arc\ \widehat{BC}$ donc ;

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$$

$$\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{BDC}$$

$$\sin\hat{A} = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{2R} = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\overrightarrow{B}} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

Exercice d'application :

Soit ABC un triangle tel que AB=7cm ; AC=5cm et BC=7cm

1) Calculer la longueur des médianes de ce triangle
2) Calculer la mesure des angles de ce triangle
3) Calculer l'aire du triangle ABC

ANGLE ORIENTE ET TRIGONOMETRIE

Pré requis :

- Bien utiliser les propriétés relatives aux angles alternes , alternes externes, correspondants, opposés par le sommet , adjacents
- Bien utiliser les vecteurs
- Bien utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre la définition du radian
- Calculer la longueur d'un arc
- Convertir le degré en radian et inversement
- Démontrer qu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle
- Reconnaitre sur un dessin codé un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs
- Construire un angle de demi-droites ou de vecteurs connaissant sa mesure principale
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté
- Connaitre la relation de Chasles pour les angles orientés
- Connaitre les relations liant les différentes mesures
- Connaitre et utiliser les formules d'addition , de duplication et de linéarisation
- Résoudre les équations et inéquations trigométriques

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

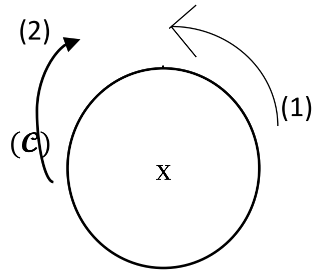
Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Angle orienté

1. Orientation du plan

a. Cercle orienté



Sur un cercle du plan, il existe deux sens de parcours , le sens (1) et le sens (2).
Orienté le cercle, c'est choisir l'un de ses deux sens .Le sens choisi est appelé sens positif ou direct. Le sens non choisi est appelé sens négatif ou indirect. Le sens (1) qui est le sens contraire de l'aiguille d'une montre est souvent choisi et il est appelé sens trigonométrique.
On appelle cercle trigonométrique un cercle orienté dont le rayon est égale à 1

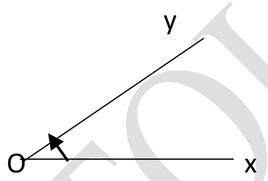
b. Plan orienté

Un plan est dit orienté si tous les cercles du plan sont orienté dans le même sens.

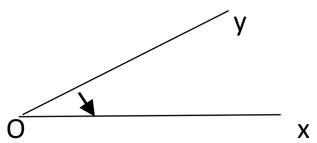
2. Angles orientés et demi droites

a. Définition et Notation

On appelle angle orienté de demi-droites , tout couple de demi- droites de même origine$([Ox);[Oy))$.
L'angle orienté $([Ox);[Oy))$ est noté $(\widehat{Ox\,;Oy})$



$(\widehat{Ox\,;Oy})$



$(\widehat{Oy\,;ox})$

3. Angle orienté de vecteur

a. Définition

On appelle angle orienté de vecteur tout couple de vecteur non nul$(\vec{u},\vec{v})$ $noté$ $(\widehat{u\,v})$

b. Relation entre angle orienté et demi-droites

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O un point un point du plan. Si $[Ox)$ et $[Oy)$ sont des demi-droites dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors on a :

$$(\vec{u},\vec{v}) = (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy})$$

4. Mesure d'un angle orienté

a. Le radian

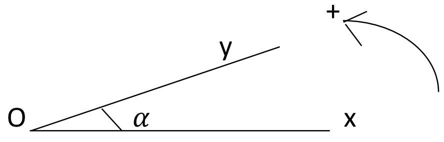
Le radian est une unité de mesure des angles : $1\pi rad = 180°$

degré	0	30	45	60	90	180
radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

La longueur l d'un arc de cercle intercepté par un angle de mesure α(radian) est; $l = r\alpha$ où r est le rayon du cercle.

b. Mesure principal d'un angle orienté

Le plan est supposé orienté .$Soit\ \alpha$ la mesure d'un angle géométrique $\widehat{xoy}$.



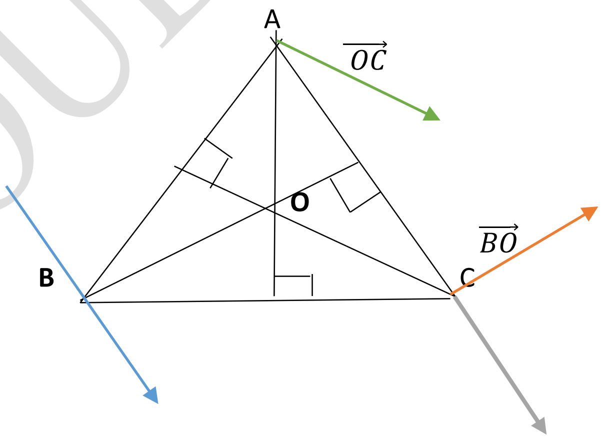
- Si en tournant de $[Ox$)vers $[Oy)$ dans le secteur saillant, on parcourt le sens positif alors la mesure principal de l'angle orienté est égale à α.
  $(\widehat{Ox, Oy})$=α
- Si en tournant de $[ox)$ vers $[Oy)$,on parcourt le sens negatif,alors la mesure principal de l'angle orienté est égal à $-\alpha$
  $(\widehat{Ox, Oy})$=α
- Si $x\widehat{O}y$ est un angle plat alors la mesure principale de l'angle orienté est π $\forall$ la position des demi droites .
- Si θ est la mesure principale d'un angle orienté alors $\theta \in]-\pi;\pi]$

<u>Exercice d'application :</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O.

Donner les mesures des angles orientés de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$;$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$;$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$;$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA})$

<u>Solution :</u>



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$;$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3}$ $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$;$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BO}) = -\frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}) = \pi$

c. Ensemble des mesures d'un angle orienté

c_1.**Définition**

Si θ est la mesure principale d'un angle orienté alors l'ensemble des mesures de cet angle sont les réels de la forme : $\alpha = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c_2 **.Egalité module 2π**

α_1 *et* α_2 sont deux mesures d'un même angle orienté si et seulement si leur différence est multiple de 2π(*lorsqu ils sont exprimés en radian*) c'est-à-dire $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Cette égalité est notée :$\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$. On lit :$\alpha_1$ égale α_2 *modulo* 2π

<u>Exemple 1</u> :
Vérifier si α_1 *et* α_1 sons des mesures en radian d'un même angle orienté

$$1^{er} cas: \alpha_1 = \frac{-3\pi}{2} \quad ; \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{-3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

Donc α_1 et α_2 sont deux mesures d'un même angle orienté .

$$2^{eme} cas: \ \alpha_1 = \frac{4\pi}{3} \quad et \ \frac{7\pi}{3}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{4\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} = -\pi$$

Donc α_1 et α_2 ne sont pas des mesures d'un même angle orienté

<u>Exemple 2</u> :
Dans chacun des cas suivants , déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure en radian est α

$1^{er} cas: \alpha = \frac{7\pi}{2}$; $2^{eme} cas: \alpha = \frac{-11\pi}{3}$;$3^{eme} cas: \alpha = \frac{27\pi}{6}$; $\alpha = -42\pi$

<u>Solution</u> :

$$1^{er} cas: \alpha = \frac{7\pi}{2}$$

$$\alpha = \theta + 2k\pi$$

$$\theta = \alpha - 2k\pi$$

$$-\pi < \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \leq \pi$$

$$-1 < \frac{7}{2} - 2k \leq 1$$

$$\frac{5}{4} < k \leq \frac{9}{4} \qquad donc \ k = 2$$

$$\theta = \frac{7\pi}{2} - 2 \times 2\pi$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

5. Propriétés

- $(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u}) \quad [2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\overline{-\vec{v}}) + \pi \quad [2\pi]$
- $(\vec{u},\vec{v}) = (-\vec{u},-\vec{v}) \quad [2\pi]$

6. Egalité modulo π et cocyclicité

a. Egalité modulo π

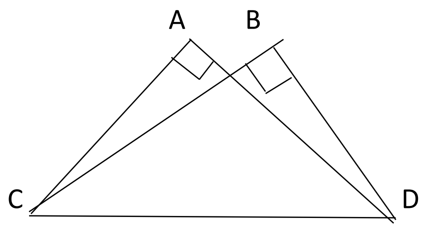
Soit α_1 *et* α_2 deux mesures en radian d'angles orientés. S'il existe un entier relatif k telle que $\alpha_1 - \alpha_2 = k\pi$.On dit que $\alpha_1 = \alpha_2$ *modulo* π et on note $\alpha_1 = \alpha_2[\pi]$
Remarque :
Si $\alpha_1 = \alpha_2[2\pi]$ alors $\alpha_1 = \alpha_2[\pi]$

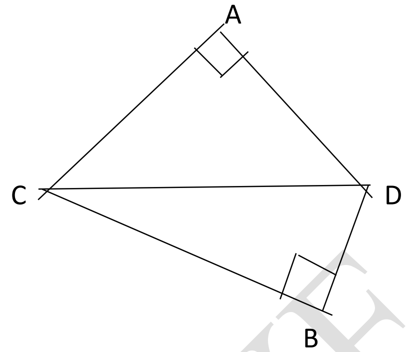
b. Cocyclicité

Quatre points A, B ,C et D sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle.
Autrement dit A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si :

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

$$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})[\pi]$$

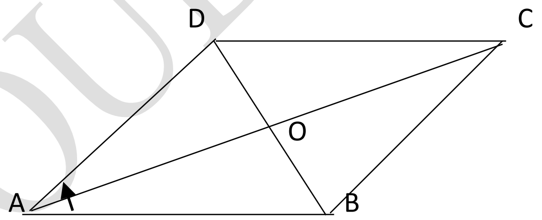




Dans les deux figures ,les points A, B,C et D sont sur un cercle de diamètre $[CD]$

- $(\vec{u},\vec{v})$=0$[\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- $(\vec{u},\vec{v})$=0$[2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
- $(\vec{u},\vec{v})$=$\pi[2\pi]$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires
- Soient k_1 et k_2 deux entiers relatifs non nuls
  - Si $k_1.k_2 > 0 \;\; alors \; (\vec{u},\vec{v}) = (k_1\vec{u},k_2\vec{v})$
  - Si $k_1.k_2 < 0 \;\; alors \; (\vec{u},\vec{v}) = (k_1\vec{u},k_2\vec{v}) + \pi[2\pi]$

<u>Exercice d'application</u> :
ABCD est un parallélogramme de centre O
1)Démontrer que $(\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD})$+$(\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CD})$=0
2) Quelle propriété du parallélogramme a-t-on démontré
3)On suppose que $(\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD})$=$\frac{\pi}{4}$
Déterminer la mesure principal des angles orientés suivants
$(\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{OD})$

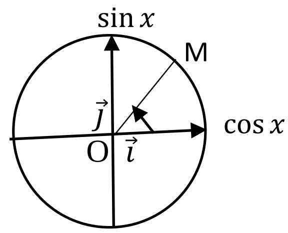


II. Trigonométrie

Dans toute cette partie , le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) et $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O.

1. Sinus et cosinus d'un angle orienté

Soit x un réel donné et M un point de $(\mathcal{C})$ tel que $(\vec{\imath}$;$\overrightarrow{OM})$=$x[2\pi]$



- On appelle cosinus de x , l'abscisse du point M noté $\cos x$
- On appelle sinus de x , l'ordonnée du point M noté $\sin x$

On dit que M est l'image de x

✓ **Propriété immédiate**

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \quad et -1 \leq \sin x \leq 1$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad et\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x$

✓ **Relation trigonométriques (angles associés)**

- $\cos(-x) = \cos x \quad et \quad \sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x \quad et \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos(x - \pi) = -\cos x \quad et \quad \sin(x - \pi) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x \quad et \quad \sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad et \quad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \quad et \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

Application :

Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

$$A = \cos(x - 42\pi) + 3\cos(x + 27\pi) + 2\cos(x + \frac{7\pi}{2})$$

$$B = 2\sin(8\pi - x) + 2\sin(\frac{17\pi}{2} - x) + \sin(31\pi - x)$$

Solution

$$A = \cos(x - 42\pi) + 3\cos(x + 27\pi) + 2\cos(x + \frac{7\pi}{2})$$

$$A = \cos x + 3\cos(x + 26\pi + \pi) + 2\cos(x + 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2})$$

$$A = \cos x + 3\cos(x + \pi) + 2\cos(x + \pi + \frac{\pi}{2})$$

$$A = \cos x - 3\cos x - 2\cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\boldsymbol{A = -2\cos x + 2\sin x}$$

$$B = 2\sin(8\pi - x) + 2\sin(\frac{17\pi}{2} - x) + \sin(31\pi - x)$$

$$B = 2\sin(-x) + \sin(8\pi + \frac{\pi}{2} - x) + 3\sin(30\pi + \pi - x)$$

$$B = -\sin x + 2\sin(\frac{\pi}{2} - x) + 3\sin(\pi - x)$$

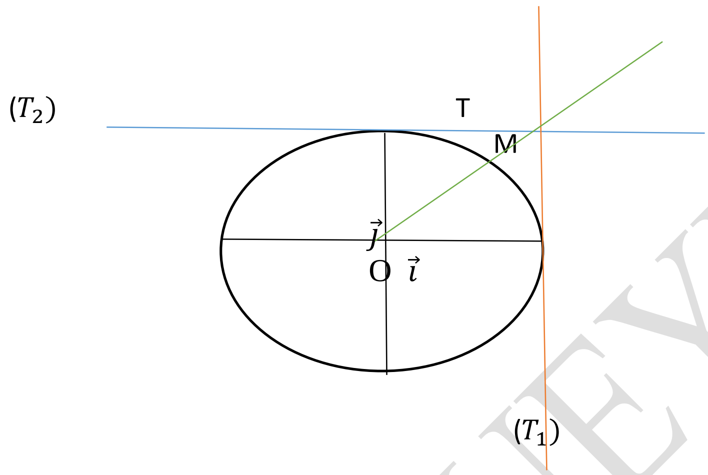
$$B = -\sin x + 2\cos x + 3\sin x$$

$$\boldsymbol{B = 2\sin x + 2\cos x}$$

2. Tangente et cotangente d'un angle aigu

a. Définition

Soit x un réel donné et M un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $(\vec{\imath};\overrightarrow{OM}) = x[2\pi]$.
Soit I et J les points de $(\mathcal{C})$ de coordonnées respectives (1,0) et (0,1).T_1 *et* T_2 sont des tangentes à$(\mathcal{C})$ respectivement en I et J.



On appelle tangente de x le réel noté $\tan x$ égal à l'abscisse de T sur l'axe (T_1)
On appelle cotangente de x le réel noté $\text{cotan}\, x$ égal à l'abscisse de T sur l'axe (T_2)

b. Propriété

- $\tan x$ existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\text{cotan}\, x$ existe si et seulement si $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan(x+\pi) = \text{cotan}\, x \quad et \ \tan(x+k\pi) = \tan x \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \forall\, x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \frac{1}{\text{cotan}\, x}$

c. Relation trigonométrique

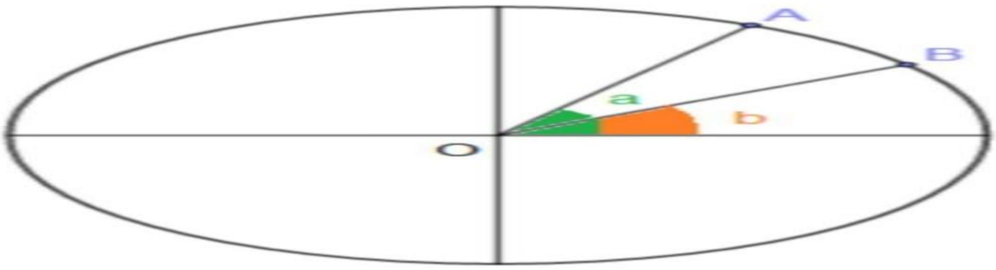
- $\tan(-x) = -\tan x$, $\text{cotan}(-x) = -\text{cotan}\, x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$,$\text{cotan}(\pi + x) = \text{cotan}\, x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$, $\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}\, x$
- $\tan(x + 2k\pi) = \tan x$;$\text{cotan}(x + 2k\pi) = \text{cotan}\, x$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cotan}\, x$;$\text{cotan}(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\text{cotan}\, x$;$\text{cotan}(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x$

3. Valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

4. Formule d'addition

Soient a et b deux réels donnés ,A et B deux point de $(\mathcal{C})$tel que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA}) = [2\pi]$ et $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB}) = b[2\pi]$



$$A\binom{\cos a}{\sin a} \qquad B\binom{\cos b}{\sin b}$$
$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \ \ et \ \ \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos a.\cos b+\sin a\,.\sin b=OA\times OB\times\cos(a-b)$$
Or OA=OB=1
$$\boldsymbol{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$
$$\cos(a+b)=\cos[a-(-b)]=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$$

$$\boldsymbol{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$
$$\sin(a-b)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]=\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos b+\sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin b$$
$$\boldsymbol{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

$$\sin(a-b)=\sin[a+(-b)]=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)$$
$$\boldsymbol{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b}$$

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$\tan(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

$$\boldsymbol{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$$
$$\tan(a-b)=\tan[a+(-b)]=\frac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\tan(-b)}$$

$$\boldsymbol{\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$$

<u>Application</u> :

En utilisant les formules d'addition , calculer $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\tan\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{3}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\tan\frac{7\pi}{12}$

5. Formule de duplication et de linéarisation

$$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x$$
$$\boldsymbol{\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \qquad et\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\mathbf{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$$

$$\cos 2x = 1 - sin^2 x - \sin^2 x$$

$$\mathbf{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$$

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

$$\mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$$

$$\tan(2x) = \tan(x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\mathbf{\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

Ces égalités sont appelées :formule de duplication.
On a :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\mathbf{\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

Ces égalités sont appelées : formule de linéarisation
On a

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En faisant la somme ,on obtient :

$$\mathbf{\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b}$$

En faisant la différence ,on obtient

$$\mathbf{\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2\sin a \sin b}$$

De plus

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

En faisant la somme on obtient :

$$\mathbf{\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b}$$

En faisant la différence on obtient

$$\mathbf{\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2\cos a \sin b}$$

Posons $\quad p = a + b \quad et \quad q = a - b$

$$a = \frac{p + q}{2} \qquad et\ \ b = \frac{p - q}{2}$$

Les égalités précédentes s'écrivent alors :

$$\cos p+\cos q=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p-\sin q=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p.\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p.\cos q}$$

Application :

Factoriser les expressions suivante :

A=$\cos 2x-\cos x+\sin\frac{3x}{2}$ B=$\sin 3x-\sin x$

Solution :

$$A=\cos 2x-\cos x+\sin\frac{3}{2}x$$
$$A=-2\sin(\frac{2x+x}{2}).\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right)+\sin\frac{3x}{2}$$
$$A=-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{3x}{2}$$
$$\boldsymbol{A=\sin\frac{3x}{2}\left[1-2\sin(\frac{x}{2})\right]}$$

$$B=\sin 3x-\sin x$$
$$B=2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right).\sin(\frac{3x-x}{2})$$
$$\boldsymbol{B=2\cos 2x.\sin x}$$

III. Equation trigonométrique

1. Equation du type $\cos x=\cos a$

Soit a un réel donné :

$$\cos x=\cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2k\pi \\ ou \\ x=-a+2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}$$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$

$$\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$
$$S=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\quad k\in\mathbb{Z}$$

2. Equation du type $\sin x=\sin a$

Soit a un réel donné :

$$\sin x=\sin a\Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2k\pi \\ ou \\ x=\pi-a+2k\pi \end{cases}$$

Exemple :

Résolvons dans $]-\pi;\pi]$; $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Déterminons les solutions dans $]-\pi;\pi]$

$$Pour\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi < \pi$$

$$-\frac{2}{3} < k < \frac{1}{3} \qquad donc\ k = 0$$

$$d'où\ x = \frac{\pi}{3}$$

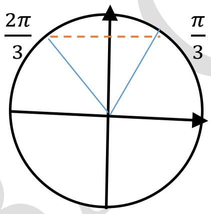
$$Pour\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \pi$$

$$-\frac{5}{6} < k < \frac{1}{6} \quad donc\ k = 0$$

$$d'où\ x = \frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$



3. Equation du type $\tan x = \tan a$

Soit a un réel donné :

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$$

Exemple :

Résolvons dans $[0; 2\pi[$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ ou \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \\ ou \\ \tan x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

$D_E = [0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}$

$$0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2\pi$$

$$-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{3}{2}$$

$$k \in \{0; 1\}$$

-Si k=0 alors $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}$

-Si k=1 alors $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{3\pi}{2}$

$$D_E = [0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

<u>Résolution</u>

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

- Pour x=$\frac{\pi}{6} + k\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{11}{6}$$

$$k \in \{0; 1\}$$

Les solutions correspondantes sont :$x = \frac{\pi}{6}$ $ou\ \ x = \frac{7\pi}{6}$

- Pour x=$-\frac{\pi}{6} + k\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{6} + k \leq 2$$

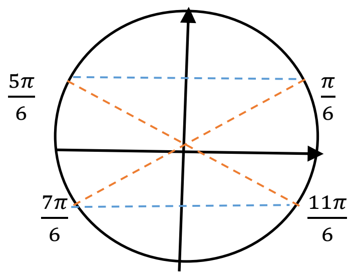
$$k \in \{1; 2\}$$

Les solutions correspondantes sont :

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad ; x = \frac{11\pi}{6}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Représentation des solutions dans un cercle trigonométrique



4. Equation du type $\cot x = \cot a$

Soit a un réel :

$\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

<u>Exemple</u> :Résolvons dans $[-\pi; \pi[$ $\cot x = 1$

L'équation est définie si et seulement si $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$-\pi \leq k\pi < \pi$$
$$-1 \leq k < 1$$
$$k \in \{-1; 0\}$$

Les valeurs de $k\pi$ correspondantes sont $-\pi$ et 0

$$D_E = [-\pi; \pi[\setminus \{-\pi; 0\} =]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$$

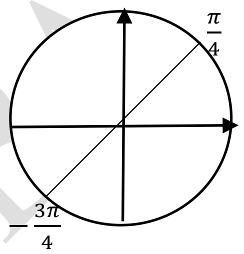
Résolution :

$$\operatorname{cotan} x = 1$$
$$\operatorname{cotan} x = \operatorname{cotan} \frac{\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$
$$-\pi \leq x < \pi \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < \pi$$
$$-\frac{5}{4} \leq k < \frac{3}{4}$$
$$k \in \{-1; 0\}$$

Les solutions correspondantes sont :$-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$

$$S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$$

Représentation des solutions dans le cercle trigonométrique



5. Autres types d'équation

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation suivante :

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sin 3x$$

Solution :

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sin 3x$$
$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(-3x)$$
$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-3x)\right]$$
$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} - 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 2 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Solution :

Posons $X = \cos x$, l'équation devient :

$$2X^2 - 5X + 2 + 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \qquad et\ X_2 = 2$$

$$X = \frac{1}{2}\ \ alors\ \ \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$X = 2\ alors\ \ \cos x = 2\ impossible$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}$$

6. Equation du type $a\cos x + \sin x = c$

a. Propriété

Si x_1 et x_2 sont deux réels tel que ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ alors il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = x_1 \\ \sin\theta = x_2 \end{cases}$$

Preuve :

Soit M$\binom{x_1}{x_2}$ dans le plan muni d'un repère ortho normal direct (O ,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) et $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O. $(\mathcal{C})$ a pour équation ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 1$
Or ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ donc M$\in (\mathcal{C})$.
Soit θ,une mesure de l'angle orienté ($\vec{\imath}; \overrightarrow{OM}$) donc

$$\begin{cases} \cos\theta = x_1 \\ \sin\theta = x_2 \end{cases}$$

b. Méthode de résolution

Soientt a, b et c trois réels non nuls, considérons l'équation suivante :$a\cos x + b\sin x = c$ (E)

$$(E) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Posons $x_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $x_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$$

D'après la propriété précédente, il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = x_1 \\ \sin\theta = x_2 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow \cos(\theta - x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Application :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ \cos x + \sin x = 1$; $b)\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$ $c)\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 3$

Solution :

a) $\cos x + \sin x = -1$

a=1 ;b=1 c=-1 ; $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{4} - x) = \cos\tfrac{3\pi}{4}$$

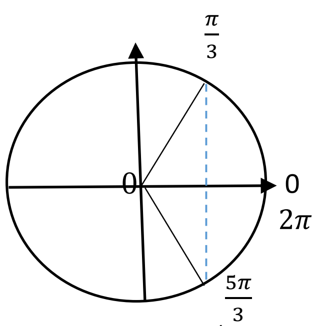
$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad ou\ \frac{\pi}{4} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad ou\ x = \pi - 2k\pi$$
$$S = \left\{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi \ \ ; \pi - 2k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}$$

IV. Inéquation trigonométrique

Exemple 1 :
Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $puis\ dans$ $]-\pi; \pi]$ l'équation suivante :

$$\cos x \leq \frac{1}{2}$$

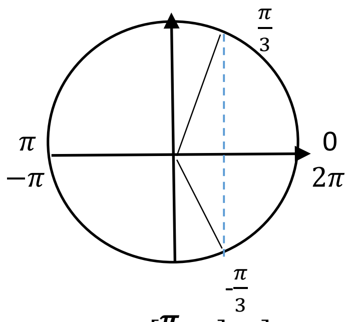
Solution dans $[0; 2\pi]$



$$\boldsymbol{S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]}$$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

Solution dans $]-\pi;\pi]$

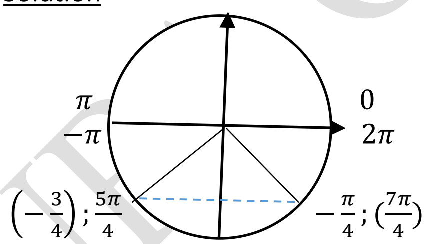


$$\boldsymbol{S = \left[\frac{\pi}{3};\pi\right] \cup \left]-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]}$$

<u>Exemple 2</u> :
Résoudre dans I l'inéquation suivante

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad I = [0;2\pi\ [; I =]-\pi;\pi]\ \ I = \mathbb{R}$$

<u>Solution</u>



Dans $[0;2\pi[$

$$S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$$

Dans $]-\pi;\pi]$

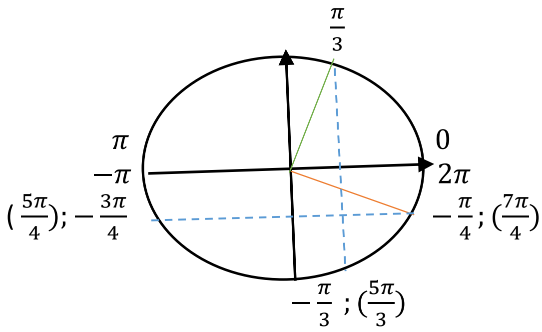
$$S = \left[-\frac{\pi}{4};0\right] \cup [0;\pi] \cup \left]-\pi;\frac{5\pi}{4}\right]$$

Dans $\mathbb{R}$
On prend la solution dans $]-\pi;\pi]$ puis on ajoute dans chaque intervalle $2k\pi$

$$S = \left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi;2k\pi\right] \cup [2k\pi;\pi+2k\pi] \cup \left]-\pi+2k\pi;\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

<u>Exemple 3</u> :
Résoudre dans I le système suivant :

$$\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} \\ \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad I = [0;2\pi[\quad ; I =]-\pi;\pi]$$



Dans $[0; 2\pi[$

$$\boldsymbol{S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}\right]}$$

Dans $]-\pi; \pi]$

$$\boldsymbol{S = \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right] \cup \left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right]}$$

<u>Exemple 4</u> :
Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation suivante :

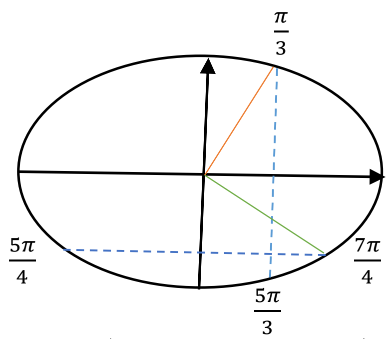
$$(\cos x - \frac{1}{2})(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \leq 0$$

<u>Solution</u>

$$(\cos x - \frac{1}{2})\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0 \quad (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \begin{cases} \cos x - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} \\ \sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$S_1 = \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right] \qquad S_2 = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\boldsymbol{S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}\right]}$$

<u>Exemple 5 :</u>

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

Solution :

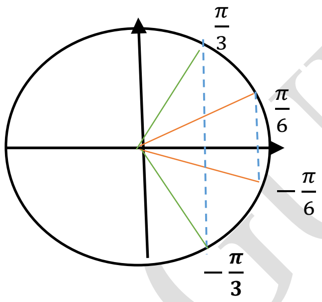
$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

Posons $X = \cos x$, l'inéquation devient $4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} \leq 0$

$$X \in \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$X \in \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow \cos x \in \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\boldsymbol{S} = \left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}};-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}\right] \cup \left[\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}}\right]$$

Exemple 6 :

Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation suivante :

$$\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{2}$$

Posons $X = 2x + \frac{\pi}{3}$; l'inéquation devient $\cos x \leq \frac{1}{2}$

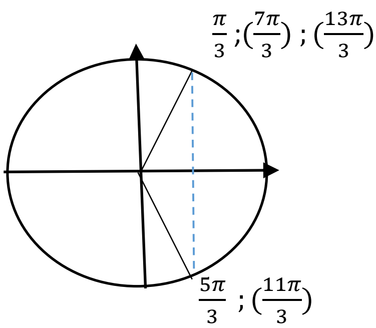
Déterminons l'intervalle de X correspondant

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 4\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{3}$$

Finalement : $\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{13\pi}{3}$

Résolvons dans $\left[\frac{\pi}{3};\frac{13\pi}{3}\right]$ $l'inéquation$ $\cos$ x $\leq \frac{1}{2}$



$$S_X = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

Comme $X = 2x + \frac{\pi}{3}$; $x = \frac{X - \frac{\pi}{3}}{2}$

Donc pour la solution, on ajoute $-\frac{\pi}{3}$ et on divise par 2

$$S = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\pi; \frac{5\pi}{3}\right]$$

Exemple 7 :

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ puis dans $]-\pi; \pi]$

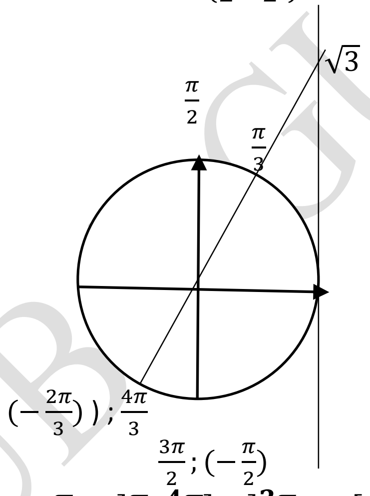
$$\tan x \leq \sqrt{3}$$

Solution

Dans $[0; 2\pi[$

$$D_E = [0; 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_E = [0; 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$



$$\boldsymbol{S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[}$$

Dans $]-\pi; \pi]$

$$D_E =]-\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\boldsymbol{S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]}$$

Exemple 8 :

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ puis dans $]-\pi; \pi]$

$$\cot x > -1$$

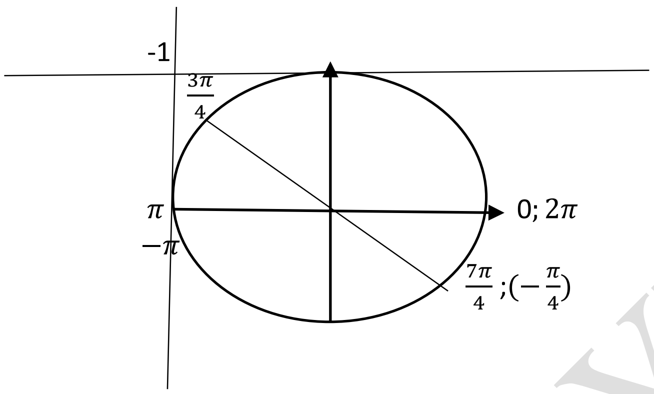
Solution

$$\cot x > -1$$

Dans $[0; 2\pi[$

$$D_E = [0; 2\pi[\setminus \{k\pi\} \; k \in \mathbb{Z}$$

$$D_E =]0; 2\pi[\setminus \{\pi\}$$



$$\boldsymbol{S = \left]0; \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\pi; \frac{7\pi}{4}\right[}$$

Dans $]-\pi; \pi]$

$$D_E =]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$$

$$\boldsymbol{S = \left]0; \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\pi; -\frac{\pi}{4}\right[}$$

LIMITE ET CONTINUITE

Pré requis :

- Bien factoriser un polynôme
- Rendre rationnel un dénominateur ou numérateur
- Connaitre et bien utiliser les relations trigonométriques
- Connaitre et bien utiliser les formules d'addition ,de duplication et de linéarisation
- Connaitre les propriétés des fonctions numériques à une variable et bien les utiliser

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre et utiliser les notations de limites
- Connaitre et utiliser les théorèmes sur les limites pour :calculer une limite , lever une forme indéterminée
- Etudier la continuité d'une fonction en point , à gauche à droite ,sur un intervalle
- Reconnaitre graphiquement une fonction continue en un point ou sur un intervalle
- Connaitre les fonctions continues usuelles

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Limites

1. Limites infinies à l'infinie

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2; D_f = \mathbb{R}$

x	-10^9	-10^2	-10	-1	0	1	10	10^2	10^4
$f(x)$	10^{18}	10^4	100	1	0	1	10^2	10^4	10^8

Nous constatons que si x prend des valeurs de plus en plus grandes , les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes .
De même , si x prend des valeurs de plus en plus petites tout en étant négatives , les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes .
On dit que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* $+\infty$ *et on ecrit* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On lit : limite quand x tend vers $+\infty$ *de* $f(x)$ *est égale* à $+\infty$

On dit aussi que $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* $-\infty$ *et on ecrit* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

On lit : limite quand x tend vers $+\infty$ *de* $f(x)$ *est egale* à $+\infty$

Définition :(facultative au secondaire)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *si et seulement si* $:\forall A > 0, \exists B > 0 \quad / \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *si et seulement si* $:\forall A > 0, \exists B > 0 \quad / \quad x > B \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si et seulement si* $:\forall A > 0, \exists B > 0 \quad / \quad x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *si et seulement si* $:\forall A > 0, \exists B > 0 \quad / \quad x > -B \Rightarrow f(x) > A$

2. Limites finies à l'infinies

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

x	-10^4	-10^2	-10	10	10^2	10^4	10^6
$f(x)$	-10^{12}	-0.00001	-0.01	0.001	0.000001	-10^{12}	-10^{18}

On constate les valeurs de $f(x)$ *deviennent de plus en plus proche de* 0 *quand x* prend des valeurs de plus en plus grandes
De même les valeurs de $f(x)$ *deviennent de plus en plus proche de* 0 *quand x prend* des valeurs plus grandes en valeurs absolues tout en restant négatives .
On dit que $f(x)$ *tend vers* 0 *lorsque x tend vers* $+\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On lit limite quand x tend vers $+\infty$ *de* $f(x) = 0$
On dit aussi que $f(x)$ *tend vers* 0 *quand x tend vers* $-\infty$ *et on ecrit*: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

On lit limite quand x tend vers $+\infty$ *de* $f(x) = 0$

Définition :

Soit f une fonction definie sur D_f *et l un reel*

Si les valeurs de $f(x)$ *tendent vers l quand x tend vers* $+\infty$ *, on dira que limite de f quand* x tend vers $+\infty$ *est egale* à *l et on ecrit*: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Si les valeurs de $f(x)$*tendent vers l quans x tend vers* $-\infty$*, on dira que limire de f quand x* tend vers $-\infty$ *est egale* à *l et on écrit*: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Autres définitions (facultative au secondaire) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \ ssi: \forall\epsilon > 0; \exists A > 0 \ \ / x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l\ ssi: \forall\ A > 0; \exists\ A > 0 \quad / \quad x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

3. Limite finie en un point

On constate que plus x est proche de $x_0, f(x)$ *est proche de* l: *On dit que* $f(x)$ *tend vers* l si x tend vers x_0 *et on ecrit*: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Définition(facultative au secondaire) :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad ssi: \forall\epsilon > 0, \exists\ \eta > 0 \quad /|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| <\in$$

4. Limite infinie en un point

Nous constatons que que $f(x)$ *devient de plus en plus grande en valeurs positive*

quand $f(x)$ *se rapproche de* x_0. *on dit que x tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* l.On écrit :

$$\lim_{x\to x_0} f(x = +\infty$$

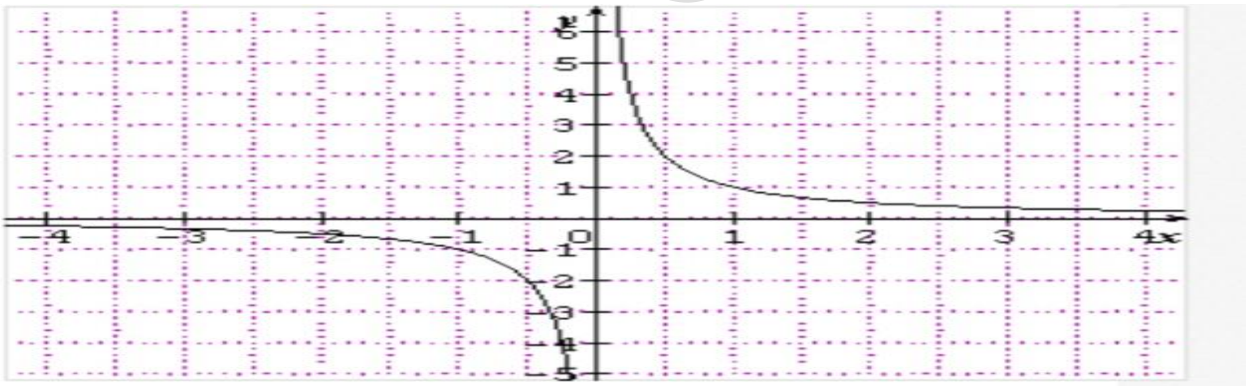
Définition (facultative au secondaire)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ ssi: \forall\ A > 0; \exists\ \eta > 0 \quad / \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\ ssi: \forall\ A > 0, \exists\ \eta > 0 \quad / \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

5. Limite à gauche, limite à droite

Cette courbe est celle de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$



On constate que $f(x)$ tend $-\infty$ *quand x se rapproche de* 0 *tout en etant plus petit* que 0.On ecrit : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

De même , $f(x)$ tend vers $+\infty$ *quand x tend vers* 0 *tout en etant plus grand que* 0.

On écrit : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Définition :

$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = +\infty\ ssi: \forall\ A > 0, \exists\eta > 0 \ /x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = -\infty\ ssi: \forall\ A > 0, \exists\ \ \eta > 0 \ /x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > -A$$

II. Calcul de limites

1. Limite en un point d'une fonction écrite avec une seule expression

Soit f une fonction définie enx_0 , $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+2} = \frac{1^2+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

2. Limite à l'infini de x^n

Soit n ,un entier naturel non nul.

Si n est pair :$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty\end{cases}$; Si n impair : :$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty\end{cases}$

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \quad ; \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty \quad ; \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \quad ; \lim_{x\to-\infty} x^5$$

3. Opération sur les limites

a. Limite d'une somme

On considère deux fonction $f\ et\ g$:

$limf$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple :

$$\lim_{x\to 1} 1+\sqrt{x} = 1+2 = 3;\ \lim_{x\to+\infty}\ 4+x^2 = 7+\infty = +\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\ x^3+x^5 = -\infty-\infty = -\infty$$

b. Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$lin(f.g)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\ x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = +\infty\ car\ \lim_{x\to+\infty}\ x^2 = +\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty}\ 1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} = 1$$

c. Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l>0$
$\lim g$	$l'\neq 0$	∞	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+
$lim\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0	∞
$\lim g$	0^-	0^+	0^-	0	∞
$lim \frac{f}{g}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \; car \; \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \;\; et \;\; \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

d. Technique de calcul de limite :Levée d'une forme indéterminée

Les formes indéterminées sont au nombre de quatre : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\infty - \infty$

Si elles se présentent, il faut transformer la fonction de manière à avoir une fonction qui nous renseigne sur le résultat de la limite : on dit qu'on a levé l'indétermination.

Exemple :

Calculons la limite de f en x_0

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \; ; x_0 = 2$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-2}{2-2} = \frac{0}{0} = FI$$

Levons l'indétermination

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to4} x+2 = 4 \;\; donc$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to2} f(x) = 4}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad ; \; x_0 = 1$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{\sqrt{1+3}-2}{1-1} = \frac{0}{0} = FI$$

Levons l'indétermination

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\left[(\sqrt{x+3})^2-2^2\right]}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$f(x) = \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to1} f(x) = \frac{1}{4}}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \qquad ; x_0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty = FI$$

Levons l'indétermination

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+6} \qquad ; x_0 = +\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+6} = +\infty - \infty = FI}$$

Levons l'indétermination

$$f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+6} = \sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(1+\frac{6}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - |x|\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}$$

$$f(x) = x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{6}{x^2}} = x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{6}{x^2}}\right) \qquad si\ x > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{6}{x^2}}) = +\infty \times (\sqrt{2} - 1) = +\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{2x^4-1}{x^3+1} \qquad ; x_0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-1}{x^3+1} = \frac{+\infty}{-\infty} = FI$$

Levons l'indétermination

$$f(x) = \frac{2x^4-1}{x^3+1} = \frac{x^4(2-\frac{1}{x^4})}{x^3(1+\frac{1}{x^3})} = \frac{x(2-\frac{1}{x^4})}{(1+\frac{1}{x^3})}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{x(2-\frac{1}{x^4})}{(1+\frac{1}{x^3})} = -\infty$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = -\infty$$

4. Limite à l'infini d'une fonction polynôme

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale la limite à l'infini de son monôme du plus haut degré.

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2-3 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad ; \lim_{x\to-\infty} -2x^4-x^2-x-1 = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$$

5. Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des monômes du plus haut degré.

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x-5}{3x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\alpha\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \quad ; \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+x-3}{2x^4-2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

6. Théorèmes

a. Théorème de comparaison

Soient $f, g: I \to \mathbb{R}\,; x_0 \ \in I \ ou \ x_0 = \pm\infty. Si\ on\ voisinage\ de\ x_0\,, f(x) \le g(x)\ \ on\ a$:

$$Si \ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ alors \ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

$$Si \ \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \ alors \ \lim_{n\to x_0} f(x) = -\infty$$

b. Théorème des gendarmes

Si au voisinage de $x_0 \ on\ a\ g(x) \le f(x) \le h(x)\ et\ que\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ (finie ou non) alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Exemple :

$$\lim_{x\to0} x^2 sin\frac{1}{x} =?$$

On a :$-1 \le sin\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 sin\frac{1}{x} \le x^2$

Or $\lim_{x\to0} -x^2 = \lim_{x\to0} x^2 = 0\ alors\ d'apres\ le\ theoreme\ des\ gendarmes\ \ \lim_{x\to x_0} x^2 sin\frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sinx+x^4}{x^2+1} =?$$

On a $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1+x^4 \le \sin x + x^4 \le 1+x^4 \Rightarrow \frac{-1+x^4}{x^2+1} \le \frac{\sin x+x^4}{x^2+1} \le \frac{1+x^4}{x^2+1}$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1+x^4}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^4}{x^2+1} = +\infty\ alors\ d'apres\ le\ theoreme\ des\ gendarmes$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sinx+x^4}{x^2+1} = +\infty$$

Corollaire :

Si on voisinage de $x_0\ |f(x)-l| \le g(x)\ et\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\ alors\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

7. Limite en zéro d'une fonction trigonométrique

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,;\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0;\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Preuve

Supposons que $x>0$; $\sin x\leq x\leq tanx \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\tan x}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\sin x}\quad\Rightarrow\frac{\sin x}{tanx}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{\sin x}{x}$

$$\Rightarrow\quad \cos x\leq\frac{sinx}{x}\leq 1$$

$$\text{Or}\lim_{x\to 0^+}\cos x=1\quad alors\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

Supposons que $x<0\ \Rightarrow -x\ >0\ \ donc\ la\ demonstration\ ci\ dessus\ donne$

$$\frac{\boldsymbol{\sin}(-\boldsymbol{x})}{-\boldsymbol{x}}=\frac{-sinx}{-x}=\frac{sinx}{x}\ donc\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\text{Comme}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sinx}{x}=1\quad alors\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=?\qquad Posons\qquad X=ax\qquad\qquad Si\ x\to 0\Rightarrow X\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{X\to 0}\frac{sinX}{X}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\times\frac{1}{cosx}=1\times 1=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2(\frac{x}{2})}=\frac{1-2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2(\frac{x}{2})}=\frac{-sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}=-\sin(\frac{x}{2})\times\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}=0\times 1=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{-1}{2}\times\left[\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right]^2=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

Application :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\quad;\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{sin^{\,2}x}\quad;\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x}\quad;\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x-2(1-\cos x)}{5x^2}$$

IV. Continuité

1. Définition

Soit $f\ une\ fonction\ definie\ en\ x_0.On\ dit\ que\ f\ est\ continue\ en\ x_0\ si\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Exemple : Etudions la continuité de $f\ en\ x_0\ dans\ chacun\ des\ cas\ suivants$:

$$f(x)=2x-1\quad ;\ x_0=-1$$
$$f(-1)=2(-1)-1=-3\quad ;\lim_{x\to -}f(x)=-3$$

$$\text{Comme}\ \lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)=-3\ donc\ f\ est\ continue\ en-1$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} \; si\; x\neq 1\\ 1\; si\; x=2\end{cases} \qquad x_0=1$$

$$f(1)=2 \qquad ;\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=FI$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2\; donc\; f\; est\; continue\; en\; 1$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & si\; x\neq 0\\ -1 & si\; x=0\end{cases} \qquad x_0=0$$

$$f(0)=-1 \qquad ;\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$Comme\; \lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0) donc\; f\; n'estpas\; continue\; en\; 0$$

2. Continuité à gauche , continuité à droite

Soit f $une\; fonctioe\; definie\; en\; x_0.$

$$f\; est\; continue\; à\; gauche\; de\; x_0\; ssi\; \lim_{x\to {x_0}^-} f(x)=f(x_0)$$

$$f\; est\; continue\; à\; droite\; de\; x_0\; ssi\; \lim_{x\to {x_0}^+} f(x)=f(x_0)$$

$$f\; est\; continue\; en\; x_0\; ssi\; \lim_{x\to {x_0}^-} f(x)=\lim_{x\to {x_0}^+} f(x)=f(x_0)$$

Exemple :Etudions la $continuité\; de\; f\; en\; x_0\; dans\; chacun\; des\; cas\; suivants$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+2} & si\; x>2\\ 3x-6 & si\; x\leq 2\end{cases} \qquad x_0=2$$

$$f(2)=3(2)-6=0; \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 3x-6=0$$

Donc $f\; est\; continue\; à\; gauche\; de\; 2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x+2}=0$$

Donc $f\; est\; continue\; à\; droite\; de\; 2$

Conclusion :Comme $f\; est\; continue\; à\; gauche\; et\; à\; droite\; de\; 2\; alors\; elle\; est\; continue\; en\; 2$

3. Continuité sur un intervalle

$Une\; fonction\; f\; est\; continue\; sur\; un\; intervalle\; I\; si\; elle\; est\; continue\; en\; tout\; point\; de\; I$

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- Les fonctions rationnelles et irrationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
- $La\ somme\ et\ le\ produit\ de\ deux\ fonctions\ continues\ sur\ un\ intervalle\ I\ sont\ continues\ sur$ cet Intervalle I.
- $si\ f\ et\ g\ sont\ deux\ fonction\ definies\ sur\ un\ intervalle\ I\ tel\ que\ g(x) \neq 0\ sur\ I\ alors$ $\frac{f}{g}$ est continues sur I.

Exemple :$Etudions\ la\ continuité\ de\ f\ sur\ son\ D_f$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}\ si\ x < 1 \\ 2x\ \ si\ \ 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x+2}\ \ \ \ si\ x > 2 \end{cases}$$

$La\ fonction\ x \rightarrow \frac{x^2-1}{x-1}\ est\ une\ fonction\ rationnelle\ donc\ elle\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}$-$\{1\}$ $en\ particulier\ sur\ ]-\infty; 1[.$

$La\ fonction\ x \rightarrow 2x\ est\ une\ fonctionne\ polynome\ donc\ continue\ sur\ \mathbb{R}\ en\ particulier\ sur$ $]1; 2[.$

La $fonction\ x \rightarrow \sqrt{x+2}\ est\ une\ fonction\ rationnelle\ donc\ continue\ sur\ [-2; +\infty[$ en particuler sur $]-2; +\infty[$

Etudions la continuité de f en 1 et 2

$$f(1) = 2 \times 1 = 2\ \ ; \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)\ donc\ f\ continue\ à\ gauche\ de\ \ 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2 = f(1)\ donc\ f\ continue\ à\ droite\ de\ 2$$

Comme $f\ est\ continue\ à\ gauche\ et\ à\ droite\ de\ 1\ alors\ elle\ est\ continue\ en\ 1$

$$f(2) = \sqrt{2+2} = 2;\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)\ donc\ f\ n'est\ pas\ continue\ en\ 2$$

$$Conclusion: f\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}/\{2\}$$

4. Prolongement par continuité en un point

Soit $f\ une\ fonction\ non\ definie\ en\ x_0 (x_0 \in \mathbb{R})\ tel\ que\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$La\ fonction\ definie\ par\ g(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x \neq x_0 \\ l\ si\ x = x_0 \end{cases}$ est appelé prolongement par continuité de $f\ en\ x_0$.

De plus

$f\ est\ prolongeable\ par\ continuité\ en\ x_0\ \ si\ elle\ n'est\ pas\ definie\ en\ x_0\ et\ admet\ une$ limite finie en x_0.

Exemple :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

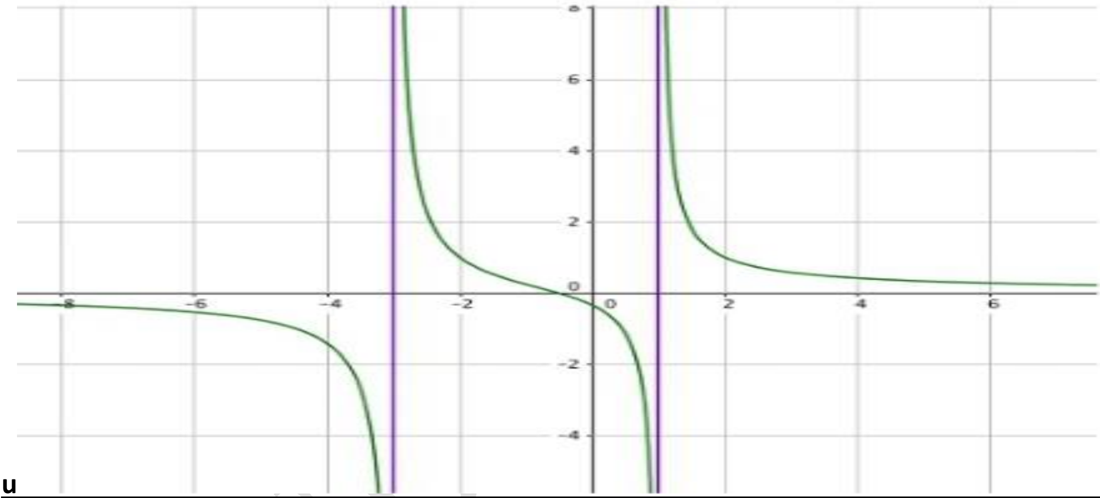
$$D_f=\mathbb{R}-\{1\};\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

Donc f *est prolongeable en* 2: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & si\ \ x\neq 1\\ 2 & si\ \ x=1\end{cases}$

Interprétation graphique

Soit f *une fonction* , C_f *sa courbe et* a *et* b *des reel.*

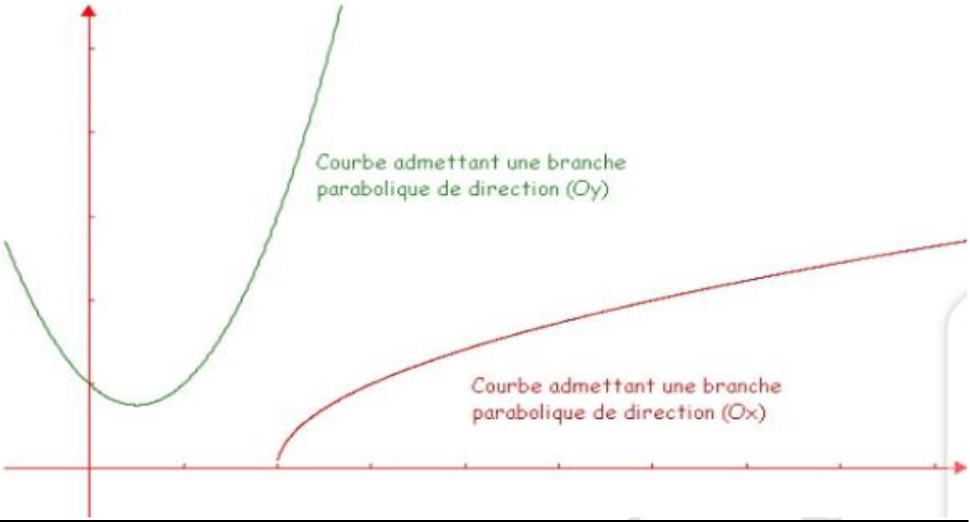
- $si \lim_{x\to a} f(x)=\infty$ *alors la droite* $x=a$ *est une assymptote verticale* à C_f
- $Si \lim_{x\to\infty} f(x)=a$ *alors la droite* $y=a$ *est une assymptote horizontale* à C_f



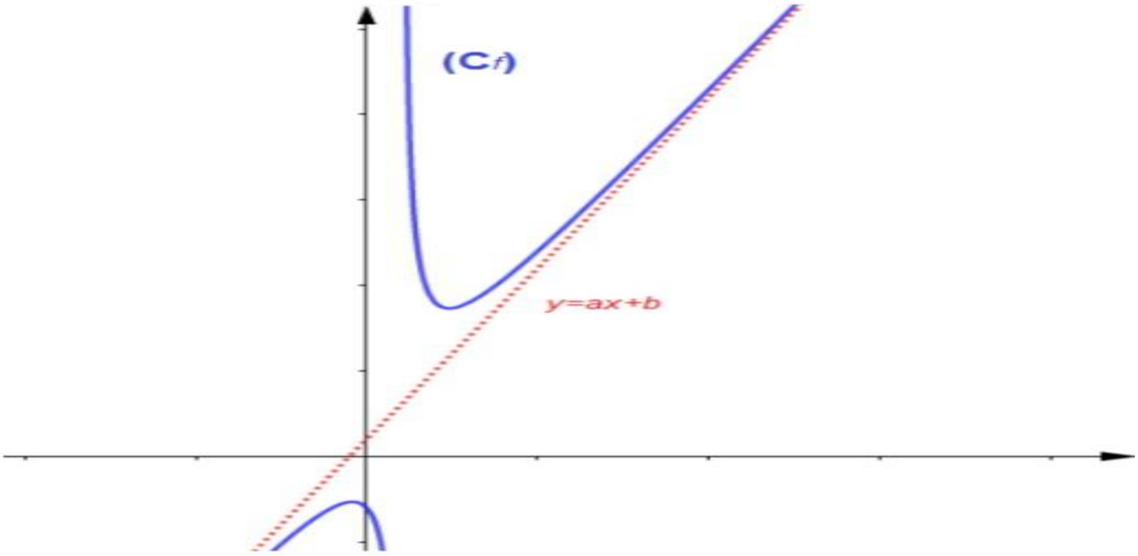
u

La droite $y=0$ est AH. Les droites $x=-3$ *et* $x=1$ sont des AV

- $Si \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ *et* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ *alors* C_f *admet une branche parabolique de* direction l'axe des ordonnées (oy).
- $Si \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ *et* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ *alors* C_f *admet une branche parabolique de* direction l'axe des abscisses (ox).



- $Si \lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$ $alors\ la\ droite\ y = ax + b\ est\ une\ assyptote\ oblique$ à C_f



DERIVATION ET ETUDES DE FONCTIONS

Pré requis :

- Bien calculer une limite
- Calculer le coefficient directeur d'une droite
- Résoudre une équation et inéquation irrationnelles
- Déterminer le signe d'une fonction
- Factoriser un polynôme
- Tracer la courbe d'une fonction

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Calculer le nombre dérivé, le nombre dérivé à gauche et à droite
- Utiliser les règles de dérivation au programme
- Utiliser les théorèmes liant la continuité et la dérivabilité
- Déterminer une équation de la tangente à une courbe
- Représenter une tangente ou une demi tangente à une courbe
- Calculer la dérivée d'une fonction
- Déterminer les variations d'une fonction
- Construire un tableau de variation
- Bien étudier une fonction

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Dérivabilité en un point

1. Définition

Soit f une fonction definie sur un intervalle I contenat x_0. On dit que f est derivable en x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

Cette limite est appelée nombre derivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$

<u>Exemple</u> :

Etudions la dérivabilité de f en x_0 :

$$f(x)=x^2+x-1 \qquad ; x_0=1$$

$$f(1)=1 \quad ; \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-1-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{0}{0}=FI$$

Levons l'indétermination

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x+2=3 \text{ donc } f \text{ est derivable en } 1$$

$$f(x)=\sqrt{x-2} \quad ; \quad x_0=2$$

$$f(2)=0 \quad ; \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\frac{0}{0}=FI$$

Levons l'indétermination

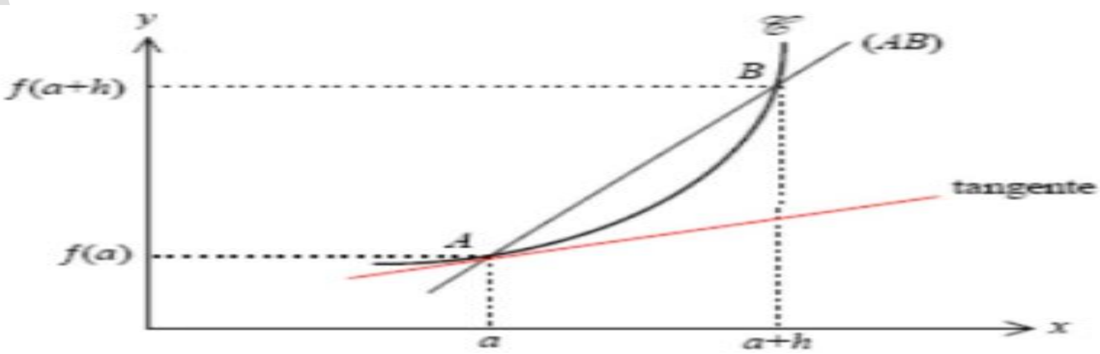
$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-2})}{(x-2)(\sqrt{x-2})}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-2})}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{0^+}=\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas deribale en } 2$$

2. Autre définition

En posant $x=x_0+h.$ *f est derivable en x_0 si* $\lim\limits_{x\to h}\frac{f(x_0+h)-f(a)}{h}$ *existe et est finie*

3. Illustration graphique



Soit B un point de C_f *d'abscisse x et A le point de C_f d'abscisse x_0 et (T) la tengente* à

C_f $au\ point\ A. Si\ x\ tend\ vers\ x_0\ alors\ \ alors\ (AB) tend\ vers\ (T). Le\ coefficient\ directeur\ de\ (AB)\ est$:

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}; f\ est\ derivable\ en\ x_0\ donc\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Donc le coefficient directeur de la tangente est (T) est$f'(x_0)$

4. Equation de la tangente

L'équation de la tangente s'écrit sous la forme $y=ax+b$.

$a\ etant\ le\ coefficient\ directeur\ donc\ a=f'(x_0) \quad \Rightarrow y=f'(x_0)\boldsymbol{x}+b$

De plus $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0)\end{pmatrix}\in (T)\ donc\ f(x_0)=f'(x_0)x_0+b \Rightarrow b=f(x_0)-f'(x_0)$

Ce qui donne $y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)\Rightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

L'équation de la tangente est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Exemple :

$$f(x)=x^2+x-1 \qquad ; x_0=1$$

Déterminons l'équation de la tangente $(T)\ de\ C_f\ au\ point\ \ d'abscisse\ 1$

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$f\ etant\ derivable\ en\ \ 1\ donc\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3\ \ et\ f(1)=1^2++1-1=1$$

$$y=3(x-1)+1\Rightarrow y=3x-2$$

$$(T): y=3x-2$$

5. Dérivabilité à gauche ,dérivabilité à droite

$Soit\ f\ une\ fonction\ definie\ sur\ un\ intervalle\ I\ contenant\ x_0$

$$f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ x_0\ ssi\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$

$$f\ est\ derivable\ à\ droite\ de\ x_0\ ssi\ \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$

$$f\ est\ derivable\ en\ x_0\ ssi\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in\mathbb{R}$$

Exemple :

Etudions la dérivabilité de $f\ en\ x_0$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2\ si\ x\leq 0\\ -2x^3 si\ x>0\end{cases} \qquad x_0=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}3x=0\ donc\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^3-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}-2x^2=0\ donc\ f\ est\ continue\ à\ droite\ de\ 0$$

$Conclusion: Comme\ f\ est\ derivable\ \ à\ gauche\ et\ à\ droite\ de\ 0\ et\ f'_g(0)=f'_d(0)=0$ alors elle est dérivable en 0.

$$f(x)=\begin{cases}3x-2 & si\ x\ \leq 2\\ \sqrt{x-2} & si\ \ x>2\end{cases}\ x_0=2$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{\boldsymbol{x-2}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$$

$$\boldsymbol{donc\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ 2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ donc\ f\ n'estpas\ derivable$$

$à\ droite\ de\ 2$

$Conclusion: f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ 2\ mais\ n'est\ \ pas\ derivable\ à\ droite\ de\ 2\ donc\ elle$ n'est pas dérivable en 2.

$$f(x)=\begin{cases} x+1\ si\ x\geq -1\\ -x-1\ si\ x<-1\end{cases}\qquad x_0$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x+1}{x+1}=1\ donc\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de-1$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x-1}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x+1}=-1\ donc\ f\ derivable\ à\ droite\ de-1$$

$Comme\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ et\ à\ droite\ de-1\ mais\ f'_g(-1)\neq f'_d(-1)\ donc$

$$\boldsymbol{f\ n'est\ pas\ derivable\ en-1}$$

Remarque :

$Toute\ fonction\ derivable\ en\ un\ point\ x_0\ est\ continue\ en\ x_0\ mais\ l'inverse\ n'est\ pas\ toujours\ vraie$

6. Interprétation graphique

- $Si\ f\ est\ derivable\ à\ gauche\ de\ x_0(respetivement\ à\ droite\ de\ x_0)\ \ alors\ sa\ courbe\ C_f\ admet$ une $demi\ tangente\ d'equation\ y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

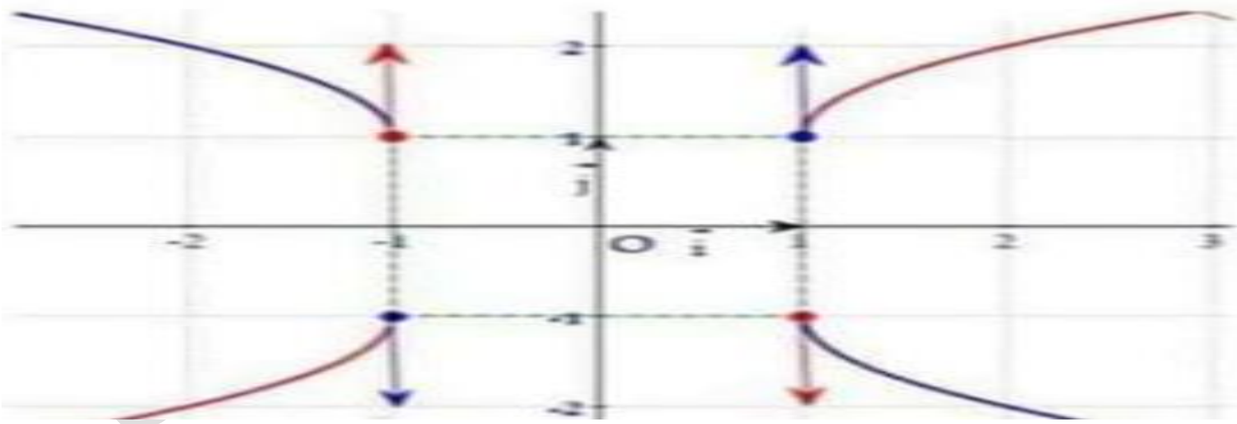
  $(resp\ y=f'_d(x-x_0)+f(x_0))$

- $Si\ \lim_{x\to {x_0}^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty\ ou\ \lim_{x\to {x_0}^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty\ alors\ C_f\ admet\ une\ demi\ tangente$

  $verticale\ dirigée\ vers\ le\ haut\ au\ point\ d'abscisse\ x_0$

- $Si\ \lim_{x\to {x_0}^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty\ ou\ \lim_{x\to {x_0}^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty\ alors\ C_f\ admet\ une\ demi\ tangente$

  $verticale\ dirigée\ vers\ le\ bas\ au\ point\ d'abscisse\ x_0$

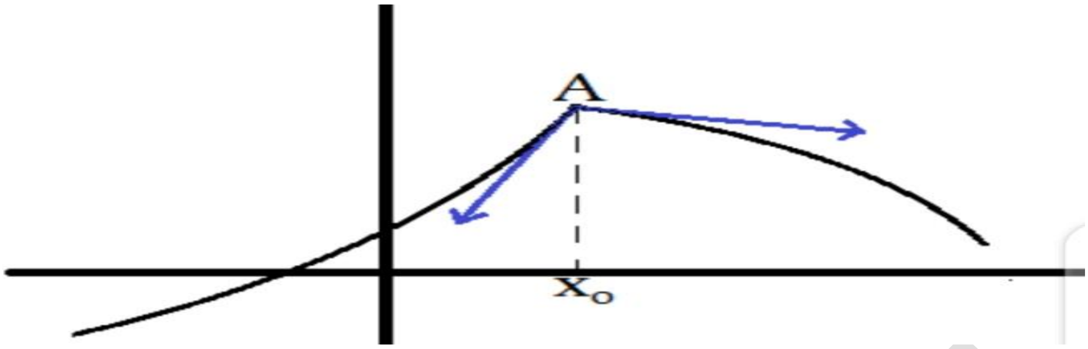


- $Si\ f\ est\ deribale\ à\ gauche\ de\ x_0\ et\setminus ou\ à\ droite\ de\ x_0\ tel\ que:$

  $$\lim_{x\to {x_0}^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\to {x_0}^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ alors\ C_f\ admet\ au\ point\ d'abscisse\ x_0\ deux$$

  $demi\ tangentes\ de\ directions\ opposées\ c'est\ à\ dire\ un\ point\ anguleux$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com



I.

II. Fonction dérivée

1. Définition

Une fonction f est derivable sur un intervalle I si elle est derivable en tout point de I.
La fonction derivée f est notée f′.

$$f(x) = \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = 0}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax} \Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = a}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-(x - x_0)}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

Preuve :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1})}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1} = {x_0}^{n-1} + {x_0}^{n-2}x_0 + {x_0}^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1}$$

$$=x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}=nx^{n-1}$$

$Fonctions$	$Derivées$	$Derivable\ sur$
$k\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	ax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

2. Opération sur les fonctions dérivables

Une fonction f *est derivable sur un intervalle* I *si elle est derivable en tout point de* I.

- *Toute fonction polynome est derivable sur* $\mathbb{R}$
- *Toute fonction rationnelle est derivable sur son domaine de definition*
- *Toute fonction irrationnelle* $\sqrt{u(x)}$ *est derivable sur son ensemble de definition privé eventuellement des valeurs qui annule* $u(x)$. *Maintenant, il reste à voir si la fonction est derivable* en ces points .

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .On a :

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'$$

__Preuve__

$$\boldsymbol{Posons}\ \ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-[u(a)+v(a)]}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Comme u et v sont derivables sur I donc on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)\qquad et\ \lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)+v(a)}{h}=v'(a)$$

$$Donc\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$$

$$(\boldsymbol{ku})'=\boldsymbol{ku}'$$

__Preuve__ :

Posons $f=ku$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or comme u est dérivable $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ $\ donc\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=ku'(a)$

$$(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\boldsymbol{u}$$

Preuve

Posons $f=u+v$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\boldsymbol{u(a+h)}v(a+h)-u(a)v(a)}{\boldsymbol{h}}$$

$$=\frac{u(a+h)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$=\frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}$$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)-u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Comme u et v sont dérivables $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)\ et\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

Donc$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v\prime u}{v^2}$$

Preuve

$$\text{Posons } \underset{h\to 0}{f}=\frac{u}{v};\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{h}=\frac{\frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a+h)}{v(a)v(a+h)}}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)-u(a)v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{[u(a+h)v(a)]v(a)+u(a)[v(a)-v(a+h)]}{hv(a)v(a+h)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{[u(a+h)-u(a)]}{h}\frac{v(a)}{v(a)v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a)v(a+h)}\left[\frac{v(a+h)-v(a}{h}\right]$$

$$comme\ u\ et\ v\ sont\ derivables;\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)\ et\ \lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$$

$$Donc\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u'(a)v(a)-v'(a)u(a)}{[v(a)]^2}$$

$$\boldsymbol{(uov)'=v'\times u'ov}$$

Preuve :

Posons $f=uov$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{uov(a+h)-uov(a)}{\boldsymbol{h}}=\frac{uov(a+h)-uov(a)}{v(a+h)-v(a)}\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=v'(a)\times u'ov(a)$$

$$\boldsymbol{[\sin x]'=\cos x}$$

<u>Preuve</u> :

Posons $f(x)=\sin x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin a\cos h+\cos a\sin b-\sin a}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin a[\cos h-1]+\cos a\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\times\sin a+\frac{\sin h}{h}\times\cos a$$

Or$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0\quad et\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=0\ donc$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0\times\sin a+1\times\cos a=\cos a$$

$$\boldsymbol{[\cos x]'=-\sin x}$$

Preuve

$$\boldsymbol{Posons\ f(x)=cos\ x}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos a\cos h-\sin a\sin h-\cos a}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos a\,[\cos h-1]-\sin a\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cosh -1}{h}\times\cos a-\frac{\sin h}{h}\times\sin a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\sin a$$

$$\boldsymbol{[\tan x]'=\frac{1}{cos^2x}=1+tan^2x}$$

Preuve :

$$[\tan x]'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{coxs\ x\,.\cos x+\sin x.\sin x}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sin^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$$

En résumé

$fonctions$	$Derivées$	$Dérivable\ sur$
$\boldsymbol{ku\ avec\ k\in\mathbb{R}}$	$\boldsymbol{ku'}$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{u+v}$	$\boldsymbol{u'+v'}$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{uv}$	$\boldsymbol{u'v+v'u}$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\boldsymbol{\frac{u'v-v'u}{v^2}}$	$\boldsymbol{Pour\ tout\ x\in I\ tel\ que\ v(x)=0}$
$\boldsymbol{\sqrt{u}}$	$\boldsymbol{\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$	$\boldsymbol{Pour\ tout\ x\ \in I\ tel\ que\ v(x)>0}$
$\boldsymbol{u^n\ \ avec\ n\in\mathbb{N}}$	$\boldsymbol{nu'u^{n-1}}$	$\boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{\frac{1}{u}}$	$\boldsymbol{\frac{-u'}{u^2}}$	$\boldsymbol{Pour\ tout\ x\in I\ tel\ que\ u(x)\neq 0}$
$\boldsymbol{cos\ x}$	$\boldsymbol{-sin\ x}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{sin\ x}$	$\boldsymbol{cos\ x}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{tan\ x}$	$\boldsymbol{\frac{1}{cos^2x}=1+tan^2x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right\}\ \boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$
$\boldsymbol{sin(ax+b)}$	$\boldsymbol{acos(ax+b)}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{cos(ax+b)}$	$\boldsymbol{-a\ sin(ax+b)}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{[uov]'}$	$\boldsymbol{v'\times u'ov}$	

Exemple :

Calculons la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x)=5x^4-4x^3+x^2-2x+sinx+\frac{1}{x}-3\sqrt{x}+1$$

$$\boldsymbol{f'(x)=20x^3-12x^2+2x-2+cosx-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}}$$

$$g(x)=\frac{2x+2}{x-3}$$

$Posons\ u=2x+2$ $\quad et \quad$ $v=x-3$

$u'=2$ $\quad et \quad$ $et\ v'=1$

$$g'(x)=\frac{2(x-3)-1(2x+2)}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x-2}{(x-3)^2}=\frac{-8}{(x-3)^2}$$

$$\boldsymbol{g'(x)=\frac{-8}{(x-3)^2}}$$

$$k(x)=(3x^3-5x^2+x+2)^{10}$$

$$\boldsymbol{k'(x) = 10(9x^2 - 10x + 1)(3x^3 - 5x^2 + x + 2)^9}$$

$$I(x) = (4x - 3)(x^2 + 2x - 3)$$

$$Posons\ u = 4x - 3 \quad et \quad v = x^2 + 2x - 3$$

$$u' = 4 \quad et \quad v' = 2x + 2$$

$$I'(x) = 4(x^2 + 2x - 3) + (2x + 2)(4x - 3)$$

$$I'(x) = 4x^2 + 8x - 12 + 8x^2 - 6x + 8x - 6$$

$$\boldsymbol{I'(x) = 12x^2 + 10x - 18}$$

m(x)=$\sqrt{x^2 - 3x - 5}$

$$\boldsymbol{m'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x - 5}}}$$

$$n(x) = \frac{3}{4x^2 - 3x + 5}$$

$$\boldsymbol{n'(x) = -3\frac{8x - 3}{(4x^2 - 3x + 5)^2}}$$

III. Variation d'une fonction numérique

1. Variation d'une fonction numérique

$Soit\ f\ une\ fonction\ derivable\ sur\ un\ intervalle\ I$:

- $Si\ f'(x) > 0\ sur\ I\ alors\ f\ est\ croissante\ sur\ I$
- $Si\ f'(x) < 0\ sur\ I\ alors\ f\ est\ décroissante\ sur\ I$
- $Si\ f'(x) = 0\ sur\ I\ alors\ f\ est\ constante\ sur\ I$

<u>Exemple</u> :

Etudions les variations et dressons le tableau de variation

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$Limites\ aux\ bornes\ de\ D_f$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty;$$

Dérivée :

$$f'(x) = 2x + 2$$

Signe de la dérivée

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+

$Sur\ ]-\infty; -1]\ f'(x) \leq 0\ donc\ f\ est\ décroissante$

$Sur\ [-1; +\infty[\ f'(x) \geq 0\ donc\ f\ est\ croissante$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

$$g(x) = \frac{2x+2}{x-3}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Limites aux bornes :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2;\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to3^-} g(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty \quad ; \lim_{x\to3^+} g(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Dérivée

$$\boldsymbol{g'(x) = -\frac{8}{(x-3)^2}}$$

Sens de variation

$g'(x) < 0\ \forall\ x \in D_g$ *donc* f *est décroissante*

Tableau de variation

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		-	||	-	
f	2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2

IV. Théorèmes

1. Théorème 1 (théorème de la bijection)

Si f *est une fonction continue et sctricrement croissante sur un intervalle* I *alors elle realise une* bijection réciproque f^{-1} *de* I *vers* $f(I) = J$.

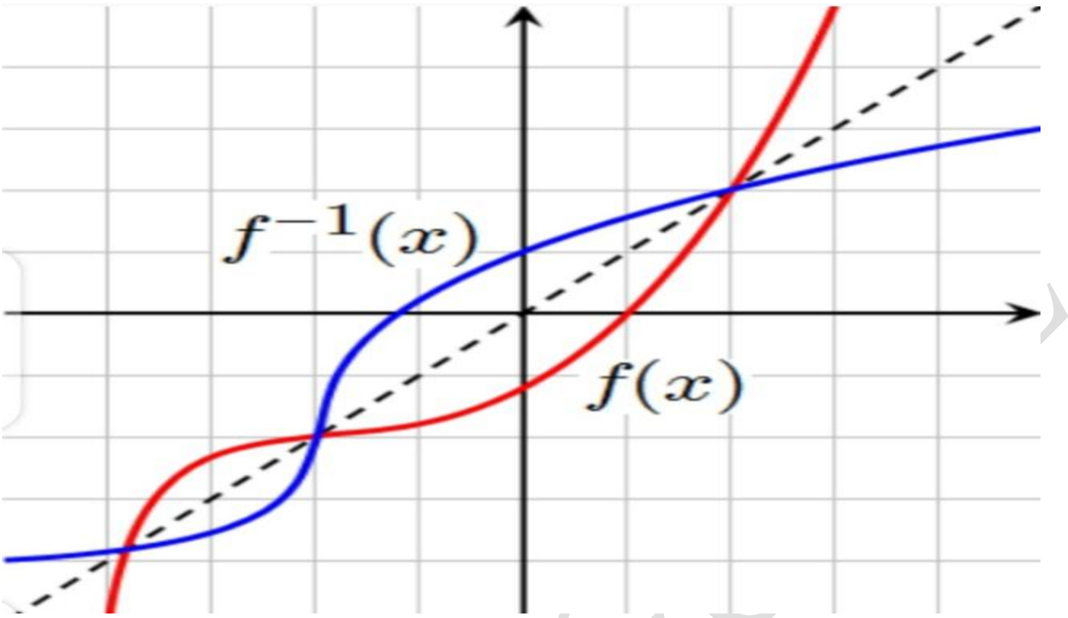
- f^{-1} *est derivable sur* J *si* f *est derivable sur* I *et* $f'(x) \neq 0$ *sur* I
- *Soient* $a \in I$ *et* $b \in J \setminus f(a) = b$; f^{-1} *est derivable en* b *si* f *est derivable en* a *et* $f'(a) \neq 0$.

Pour tout $x \in I$ $[f^{-1}of](x) = x \Rightarrow f'(x) \times f^{-1'}of(x) = 1$ *donc* $\boldsymbol{f^{-1'}of(x) = \frac{1}{f'(x)}}$

Si f *est une bijection derivable sur* I *et dont la derivée ne s'annule pas sur* I. *La reciproque* f^{-1} *est derivable sur* $f(I)$ *et pour tout* $x \in I$; $\boldsymbol{f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'of^{-1}} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}$

- $\boldsymbol{C_f}$ ***et*** $\boldsymbol{C_{f^{-1}}}$ *sont symetrqiues par rapport à la premiere bissectrice* $(y = x)$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com



2. **Théorème 2(théorème des valeurs intermédiaires)**

$Si\ f\ est\ continue\ sur\ un\ intervalle\ [a;b]\ telle\ que\ f(a) \times f(b) < 0\ alors\ il\ exsite\ au\ moins\ un\ relle\ \alpha \in\ ]a;b[tel\ que\ f(\alpha) = 0$

3. **Théorème 3 (corollaire du TVI appelé théorème de Cauchy)**

$Si\ f\ est\ une\ fonction\ derivable\ et\ strictement\ monotone\ sur\ un\ intervalle\ [a;b]\ tel\ que\ f(a) \times f(b) < 0\ alors\ il\ existe\ un\ unique\ reel\ \alpha \in\ ]a;b[\ tel\ que\ f(\alpha) = 0$

V. <u>Etudes de fonctions</u>

<u>Plan d'études</u>

- Détermination des ensembles de définition, de continuité et si possible de dérivabilité
- Etudes des propriétés de la fonction :parité, périodicité pour en déduire les propriétés éventuelles de la courbe
- Choisir le domaine d'étude
- Calcul des limites aux bornes du domaine de définition ; détermination des branches infinies, des asymptotes éventuelles
- Calcul de la dérivée après avoir déterminé le domaine de dérivabilité
- Etude du signe de la dérivée pour en déduire le sens de variation
- Tableau de variation de la fonction
- Tracé de la courbe représentative

<u>Exemple</u> :
Etudier les fonctions suivantes :

$a) f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad b) f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & si\ x < 2 \\ \frac{x^2}{x+1} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

$d) f(x) = \sin x \quad e) f(x) = \cos x \quad f) f(x) = \tan x$

SUITES NUMERIQUES

Pré requis :

- Connaitre les notions de et bases et propriétés des fonctions numériques à une variable réelle et aussi de bien les utiliser
- Calculer une limite
- Calculer une dérivée
- Dresser un tableau de variation
- Tracer une courbe

Objectifs :

Apres cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Déterminer les termes d'une suite
- Démontrer qu' une suite est monotone ou périodique
- Faire une démonstration par récurrence
- Connaitre une suite arithmétique et géométrique
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique
- Majorer ou minorer une suite
- Déterminer la somme des p termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique
- Déterminer les limites des suites convergentes

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

I. Généralité

1. Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}(ou\ une\ partie\ de\ \mathbb{N})\ vers\ \mathbb{R}$.

2. Notation et vocabulaire

$$Soit\ E \subseteq \mathbb{N}, l'ensemble de\ definition\ de\ U$$
$$U: E \to \mathbb{R}$$
$$n \to U(n)$$

Nous distinguons deux types de notation pour l'image de n par U

- La notation fonctionnelle $U(n)$
- La notation indicielle U_n

Mais l'usage est de noter $U(n)$ au lieu de U_n.Le réel U_n est le terme d'indice n de la suite U.
On dit aussi que U_n est le terme de rang n.
Parfois il arrive que l'on note la suite U par U_n ou par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.Dans ce cas , il est utile de distinguer les deux suites .

- Le premier désigne le terme d'indice n
- Le second désigne la suite U

Exemple :
Soient U une suite définie par :

$$U: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to 2n - 3$$
$$Determinons\ U_0; U_1\ et\ U_2$$

$U_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$; $U_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$; $U_3 = 2 \times 2 - 3 = 1$

3. Suites récurrentes

Une suite U_n est définie par récurrence si on donne :

- La valeur numérique de son premier terme
- Une relation reliant deux termes consécutifs

Exemple :

Soit $V_n\ une\ suite\ telle\ que \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 3 \end{cases}$

$Calculons\ V_1\ et\ V_2$ etV_3

$$V_1 = \frac{1}{2}V_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$$
$$V_2 = \frac{1}{2}V_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$$
$$V_3 = \frac{1}{2}V_2 + 3 = \frac{1}{2} \times 5 + 3 = \frac{11}{2}$$

4. Sens de variation d'une suite

a. Propriétés

Soit $(U_n)\ une\ suite\ numerique\ definie\ sur\ E \subseteq \mathbb{N}$

- $(U_{n)}\ est\ croissante\ \ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E\ , U_{n+1} \geq U_n$
- $(U_n)\ est\ decroissante\ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E, U_{n+1} \leq U_n$
- $(U_n)\ \ est\ constante\ sur\ E\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in E\ , U_{n+1} = U_n$
- $(U_n)\ est\ stationnaire\ à\ partir\ d'un rang\ n_e\ si\ et\ seulement\ si\ \forall\ n \in , dés\ que\ n \geq n_e$

$$alors\ U_{n+1} = U_n$$

- (U_n) *est à termes positifs si et seulement si* $\forall\, n \in E, U_n \geq 0$

Remarque : Si $\forall$ n $\in$ E, $U_n > 0$ *alors*

- (U_n) *croissante sur E* $\Leftrightarrow \forall\, n \in E, \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$
- (U_n) *décroissante sur E* $\Leftrightarrow \forall\, n \in E, \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

b. Théorème

Soit (U_n) *une suite definie par* $U_n = f(n)$ *avec* f *definie sur* $[0; +\infty[$

- *Si* f *est strictement croissante alors* U_n *est strictement croissante*
- *Si* f *est strictement décroissante alors* U_n *est strictement décroissante*

Exemple 1 :

Etudions le sens de la variation de la suite $U_n = 2n^2 - n$

$$U_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) = 2n^2 + 3n + 1$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n) = 4n + 1 > 0\ \forall\, n \geq 0\ donc\ U_n\ est\ croissante$$

Exemple 2 :

Etudions le sens de variation de la suite $W_n = \frac{3n-2}{5n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$Soit\ f(x) = \frac{3x-3}{5x-1} \quad ; D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{5} \quad ; \lim_{x \to \frac{1}{5}^-} f(x) = +\infty \quad ; \lim_{x \to \frac{1}{5}^+} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{7}{(5x-1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
f	$\frac{3}{5} \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow \frac{3}{5}$

$$f\ est\ croissante\ sur\ [1; +\infty[\ alors\ W_n\ est\ croissante\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Il existe des suites qui sont ni croissantes ni décroissante comme $U_n = (-1)^n$

5. Comparaison de suites

Suites majorées , suites minorées, suites bornées

Toutes les propriétés et tous les théorèmes donnés sur les fonctions numériques restent valables sur les suites numériques .

- Dire que la suite (U_n) *est inferieure à la suite* (V_n) *signifie que* $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$
- *Une suite* (U_n) *est majorée lorsqu'il existe un reel M tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$
- *Une suite* (U_n) *est minorée lorsqu'il existe un reel m tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$
- *Une suite* (U_n) *est dite bornée si elle est majorée et minorée c'est à dire lorqu'il existe deux* réels m et M *tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$

Exemple : Soit $U_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$ $\quad$ *Montrons que U_n est bornée $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-2 \ll (-1)^n + \sin n \leq 2$$

$$comme\ n \neq 0\ donc\ -2\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq ((-1)^n + \sin n) \times \frac{1}{n^2} \leq 2\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$on\ aura \quad : \quad \frac{-2}{n^2} \leq U_n \leq \frac{2}{n^2}$$

$$-2 \leq \frac{-2}{n^2} \leq U_n \leq \frac{2}{n^2} \leq 2$$

$$-2 \leq U_n \leq 2\ ;\ d'où\ \ U_n\ est\ bornée$$

- *Une suite (U_n) est dite periodique de periode $p \in \mathbb{N}^*$ sssi, $U_{n+p} = U_n$*

Exemple :

$$Soit\ une\ suite\ \ (T_n)\ telle\ que \begin{cases} T_0 = 1 \\ T_{n+1} = {T_n}^2 - T_n - 1 \end{cases}$$

$$Calculer\ T_1, T_2, T_3, T_4. En\ deduire\ une\ periode\ de\ (T_n)$$

$$T_1 = {T_0}^2 - T_0 - 1 = 1^2 - 1 - 1 = -1$$
$$T_2 = {T_1}^2 - T_1 - 1 = (-1)^2 + 1 - 1 = 1$$
$$T_3 = {T_2}^2 - T_2 - 1 = 1^2 - 1 - 1 = -1$$
$$T_4 = {T_3}^2 - T_3 - 1 = (-1)^2 + 1 - 1 = 1$$
$$T_n\ \ est\ periodique\ de\ periode\ p = 2$$

6. Démonstration par récurrence

Pour faire une démonstration par récurrence, on procède comme suit :
Initialisation :On vérifie que la propriété est vraie au premier rang
Hérédité : On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n et puis on montre qu'elle reste vraie au rang n+1

Exemple 1 :

$$En\ utilisant\ la\ recurrence, montrons\ que\ S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Initialisation: S_1 = 1 \quad et\ pour\ n = 1, \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

C'est vraie au premier rang donc la propriété est initialisée

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est-à-dire $1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$

Et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $1 + 2 + \cdots . n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots . . (n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots n + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\boldsymbol{S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots \ldots \ldots . . (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

C'est vraie au rang n+1 donc

$$\boldsymbol{S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exemple 2 :

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ telle\ que\ \begin{cases} U_o = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$$

$$Montrer\ par\ reccurence\ que: \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 3$$

Initialisation :Par définition $U_o = 3 \quad \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 3$ *donc la proprieté est initialisée*

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n c'est à dire $0 \leq U_n \leq 3$ et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

On a : $,0 \leq U_n \leq 3$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{3}U_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{3}U_n + 2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \leq \frac{1}{3}U_n + 2 \leq 3$$

Donc $\mathbf{0 \leq U_{n+1} \leq 3}$; *la proprité est vraie au rang* $n+1$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}; \mathbf{0 \leq U_n \leq 3}$$

II. Suites arithmétiques, suites géométriques

1. Suites arithmétiques

a. Définition :

Une suite (U_n) *est dite arithmetique s'il existe un reel r tel que* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}$. *Le reel r est appelé raison de la suite* .

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique , il faut montrer que $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n = r}$

<u>Exemple</u> : Soit la suite $U_n = 2n - 3$. *Montrer que* (U_n) *est une suite arithmetique*

$U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2$ *donc la suite* (U_n) *est une suite arithmetique*

b. Terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0

On a :

$$U_1 = U_0 + r$$
$$U_2 = U_1 + r$$
$$U_3 = U_2 + r$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$U_n = U_{n-1} + r$$

$$U_n = U_0 + nr$$

De même si a est un entier , on a $U_a = U_{0+}ar$

$$U_n - U_a = U_0 + U_0 + nr + ar$$

Donc le terme générale *est* $\boldsymbol{U_n = U_a + (n-a)r}$

Si le premier terme est U_0, *on a* : $\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$

Si le premier terme est U_1, *on a*: $\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)r}$

c. Sens de variation d'une suite arithmétiques

Soit (U_n) *une suite arithmetique de raison r*

- **Si r > 0 *alors la suite* (U_n) *est croissante***
- **Si r< 0 *alors* (U_n) *est decroissante***
- **Si r=0 alors la suite (U_n) est constante**

d. Somme des n termes consécutifs d'une suite arithmétiques

Soit $(\boldsymbol{U_n})$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme $(\boldsymbol{U_0})$

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \dots \dots . + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$
$$S = U_n + U_{n-1} + U_{n-1} + \cdots \dots \dots\ U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S=(U_0+U_n)+(U_1+U_{n-1})+(U_2+U_{n-2})+\cdots\ldots\ldots(U_n+U_0)$$

$$\boldsymbol{or\ U_p+U_{n-p}=U_0+U_n}$$

Donc $$2S=(U_0\ +U_n)+(U_0+U_n)+\cdots\ldots\ldots(U_0+U_n)$$

$$2S=(n+1)(U_0+U_n)$$

$$S=\frac{(\boldsymbol{n+1})(\boldsymbol{U_0+U_n})}{\boldsymbol{2}}$$

De manière générale $S=\dfrac{\boldsymbol{nombre\ de\ terme}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{1^{er}\ terme+dernier\ terme})$

<u>Exercice d'application</u> :

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ definie\ par\ (\forall n\in\mathbb{N})\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=\dfrac{5U_n-1}{U_n+3}\end{cases}$$

1) Calculer $U_1\ et\ U_2$
2) Démontrer par récurrence que :$\forall\ n\in\mathbb{N}: U_n\geq 1$
3) Etudier le sens de variation de (U_n)
4) Soit $V_n, une\ suite\ definie\ par: (\forall\ n\in\mathbb{N}), V_n=\frac{1}{U_n-1}$

   a)Montrer que (V_n)$est\ une\ suite\ arithmetique\ dont\ on\ precisera\ sa\ raison\ et\ son$ premier terme.

   b)Ecrire $V_n\ en\ fonction\ de\ n\ puis\ en\ deduire\ U_n\ en\ fonction\ de\ n$,

5) Déterminer $S_n=V_0+V_1+\cdots\ldots.+V_n$
6) Déduire $S'_n=U_0+U_1+\cdots\ldots.+U_n$

<u>Solution</u>

$$Soit\ la\ suite\ (U_n)\ definie\ par\ (\forall n\in\mathbb{N})\begin{cases}U_0=2\\U_{n+1}=\dfrac{5U_n-1}{U_n+3}\end{cases}$$

1)$Calculons\ U_1 et\ U_2$

$$U_1=\frac{5U_0-1}{U_0+3}=\frac{5\times 2-1}{2+3}=\frac{9}{5}$$

$$U_2=\frac{5U_1-1}{U_1+3}=\frac{5\times\frac{9}{5}-1}{\frac{9}{5}+3}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$$

2)Démontrons par récurrence que :$\forall\ n\in\mathbb{N}: U_n\geq 1$

Initialisation :$U_0\ =2>1\ vrai\ au\ premier\ rang$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : Supposons que c'est vraie jusqu'au rang n $(U_n>1)$ et montrons qu'elle sera vraie au rang n+1 c'est-à-dire $U_{n+1}\geq 1$

$$On\ a: U_n\geq 1$$

$$5U_n\geq 5$$

$$5U_n-1\geq 4\qquad(1)$$

De même $$U_n\geq 1$$

$$U_n + 3 \geq 4 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} \geq \frac{4}{4} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 1$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ d'où :$\forall\, n \in \mathbb{N}: U_n \geq 1$

3)Etudier le sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} - U_n = \frac{5U_n - 1 - {U_n}^2 - 3U_n}{U_n + 3} = \frac{-{U_n}^2 + 2U_n - 1}{U_n + 3} = -\frac{(U_n - 1)^2}{U_n + 3} < 0$$

Donc (U_n) *est decroissante*

4)Soit V_n, *une suite definie par*: $(\forall\, n \in \mathbb{N}), V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a)Montrons que (V_n) *est une suite arithmetique dont on precisera sa raison et son* premier terme.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{5U_n - 1}{U_n + 3} - 1} = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{4(U_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

$$donc\ (V_n)\ est\ une\ suite\ arithmetique\ de\ raison\ r = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{V_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1}$$

b) Ecrivons V_n *en fonction de n pui deduisons en* U_n *en fonction de n*

$$V_n = V_0 + nr$$

$$Vn = 1 + \frac{1}{4}n$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{U_n - 1} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}n} + 1}$$

5) Déterminer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots \ldots + V_n$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{4}n\right) = \frac{n+1}{2}\left(2 + \frac{1}{4}n\right)}$$

2. Suites géométriques

a. Définition

Une suite (V_n) est dite geometrique s'il existe un réel q tel que$\forall\, n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = q.V_n$. Le réel q est appelé raison de la suite .

Pour montrer qu'une suite (V_n) est une suite géométrique , on peut montrer que :$\frac{V_{n+1}}{V_n}$=q

<u>Exemple</u> :

Soit $V_n = 2^n$. *Montrons* (V_n) *est une suite geometrique*

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 \; donc \; (V_n) \; est \; une \; suite \; geometrique \; de \; raison \; q = 2$$

b. Terme général d'une suite géométrique

Soit (V_n) une suite arithmétique de premier terme V_0 et de raison q

$$V_1 = V_0 \times q$$
$$V_2 = V_1 \times q$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$V_{n-1} = V_{n-2} \times q$$
$$V_n = V_{n-1} \times q$$

En faisant le produit membre à membre , on aura

$$\boldsymbol{V_n = V_0 \times q^n}$$

De manière générale $\forall \, a \in \mathbb{N}$; $\boldsymbol{V_n = V_a \times q^{n-a}}$

c. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (V_n) *une suite geometrique de raisons q et de premier terme* V_0

$$Si \; V_0 > 0 \; alors \; on \; a \begin{cases} (V_n) croissante \; si \; q > 1 \\ (V_n) \; decroissante \; si \; 0 < q < 1 \\ (V_n) \; constante \; si \; q = 1 \end{cases}$$

d. Somme des n termes consécutifs d'une suite géométriques

Soit (V_n) *une suite geometrique de premier terme* V_0 *et de raison q*

$$S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + V_{n-1} + V_n$$
$$S = V_0 + V_0 \times q + V_0 \times q^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots + V_0 \times q^{n-1} + V_0 \times q^n$$
$$S = V_0(1 + q + q^2 + \cdots \dots \dots .. + q^{n-1} + q^n)$$
$$or \; 1 + q + q^2 + \cdots \dots \dots .. + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (deja \; demontré \; avec \; le \; calcul \; dans \; \mathbb{R})$$
$$S = \frac{V_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} \quad avec \; q \neq 1$$
$$De \; maniere \; generale \; \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{1^{er} \; terme(1 - q^{nombre \; de \; terme})}}{\boldsymbol{1 - q}} \quad avec \; q \neq 1$$

Exercice d'application

Soit (U_n) , *la suite definie par* $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases}$

1) Calculer U_2 *et* U_3
2) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$

a) Montrer V_n *est une suite geometrique dont on precisera la raison et le* 1^{er} *terme*

b) *Exprimer* V_n *en fonction de n puis en deduire une formule explicite de* U_n

3 Soient $S_n = V_1 + V_2 + \cdots \dots . + V_n$ *et* $S'_n = U_1 + U_2 + \cdots \dots .. U_n$

Déterminer S_n *puis deduire* S'_n

Solution :

1) Calculons U_2 *et* U_3

$$U_2 = \frac{1 + 1}{3 \times 1} U_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$
$$U_3 = \frac{2 + 1}{3 \times 2} U_2 = \frac{3}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

3) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$

a)Montrons V_n *est une suite geometrique dont on precisera la raison et le* 1^{er} *terme*

$$\boldsymbol{V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}U_n}{n+1} = \frac{U_n}{3n} = \frac{1}{3}V_n}$$

$$Donc\ (V_n)\ est\ une\ suite\ geometrique\ de\ raison\ q = \frac{1}{3}$$

$$V_1 = \frac{U_1}{1} = \frac{1}{3}$$

b)Exprimons V_n *en fonction de n puis deduisons en une formule explicite de* U_n

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^{n-1} = (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3^n}}$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{U_n}{n} \Leftrightarrow U_n = nV_n = \frac{n}{3^n}}$$

3 Soient $S_n = V_1 + V_2 + \cdots \ldots . +V_n$ $et\ S'_n = U_1 + U_2 + \cdots \ldots . . U_n$

Déterminons $S_n\ puis\ deduire\ S'_n$

$$S_n = V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{3}^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})}$$

III. Convergence d'une suite numérique

1. Définition

Une suite (U_n) est dite convergente quand elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.Une suite qui admet une limite infinie ou n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$ est dite divergente .

<u>Exemple</u> :

Etudions la convergence des suites suivantes

$$U_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0\ donc\ (U_n)\ converge\ vers\ 0$$

$$V_n = \sqrt{2n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty\ donc\ (V_n)\ est\ divergente$$

$$W_n = (-1)^n$$

$$W_n = \begin{cases} 1\ si\ n\ est\ pair \\ -1\ si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

$$(W_n)\ n'admet\ pas\ de\ limite\ en + \infty\ alors\ elle\ est\ divergente$$

2. Théorème

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge
- Si f *est une fonction definie sur* $[b;+\infty[$ $(b \geq 0)$ *et* (U_n) *une suite definie par*

$U_n = f(n); si\ en +\infty , f\ a\ pour\ limite\ l \in \mathbb{R}\ (resp -\infty\ ou +\infty) alors\ (U_n)\ a\ pour\ limite\ l \in \mathbb{R}\ (resp\ en -\infty\ ou +\infty)$

- $Si\ U_{n+1} = f(U_n)\ et\ (U_n)\ converge\ vers\ l\ alors\ l\ verifie\ la\ relation\ f(l) = l$

Exemple :

$$Soit\ (U_n)\ la\ suite\ telle\ que \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases}$$

1)$Montrer\ que\ \forall\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$

2) Etudier le sens de variation de (U_n)

3)En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite

Solution

1) $Montrer\ \ par\ recurrence\ que\ \forall\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$

$$U_0 = 1 \Longrightarrow 0 \leq U_0 \leq 2\ vrai\ au\ premier\ rang$$

Supposons qu'elle reste vraie jusqu'au rang n ($0 \leq U_n \leq 2$) et montrons qu'elle sera vrai au rang n+1 c'est à dire $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

On a $0 \leq U_n \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 3U_n \leq 6$

$\Rightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 10 \qquad (1)$

On a aussi $0 \leq U_n \leq 2 \quad \Longrightarrow 3 \leq U_n + 3 \leq 5 \qquad (2)$

(1) et (2)$\Rightarrow \ \frac{4}{3} \leq \frac{3U_n+4}{U_n+3} \leq \frac{10}{5} \Longrightarrow 0 \leq \frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq 2$

d'où $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$\forall\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 2$

2) Etudions le sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} - U_n = \frac{3U_n + 4 - {U_n}^2 - 3U_n}{U_n + 3} = \frac{(2 - U_n)(2 + U_n)}{U_n + 3} > 0$$

$$(U_n)\ est\ croissante$$

3) Déduisons en qu'elle converge et déterminons sa limite

Comme (U_n) est croissante et majorée alors elle converge

Soit l sa limite

On a (U_n) qui converge vers l et $U_{n+1} = f(U_n)\ donc\ l\ verifie\ f(l) = l$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{3l + 4}{l + 3} = l \Leftrightarrow 3l + 4 = l^2 + 3l \Leftrightarrow l = 2\ ou\ l = -2$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$$

- $Soit\ une\ suite\ geometrique\ de\ raison\ q\ et\ de\ terme\ general\ U_n$
  - ✓ Si $|q| > 1\ alors\ (U_n)\ diverge$
  - ✓ Si$|q| < 1\ alors\ U_n\ converge\ et\ \lim_{n\to\infty} U_n = 0$

Exemple :

$$U_n = 2^n\ \ donc\ \lim_{n\to+\infty} U_n = 0\ car\ |2| > 1$$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

$$V_n = (\frac{1}{3})^3 \; donc \; \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \; car \left|\frac{1}{3}\right| < 0$$

3. Suites adjacentes

Lorsque $\begin{cases} (U_n) est \; croissante \\ (V_n) \; decroissante \\ \lim_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0 \end{cases}$ alors $(U_n) \; et (V_n) \; sont \; adjascentes$

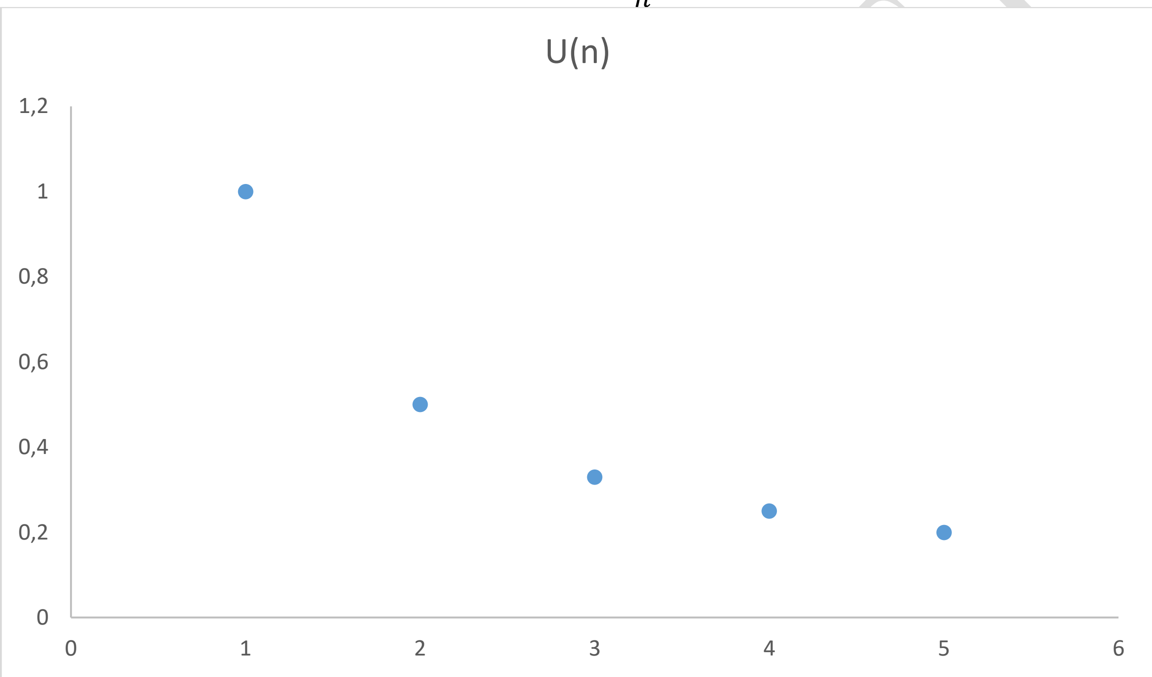
- Si $(U_n) \; et(V_n) \; sont \; adjascentes \; alors \; elles \; converges \; vers \; la \; meme \; limite \; l$
- $\forall \, n \in \mathbb{N} \, , on \; a \; U_n \leq U_{n+1} \leq l \leq V_{n+1} \leq V_n$

IV. Représentation graphique d'une suite

1. Représentation du type $U_n = f(n)$

On se place dans un repère $(o \,, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La représentation graphique d'une suite $U_n = f(n) \; est$ l'ensemble des points $(n; U_n)$

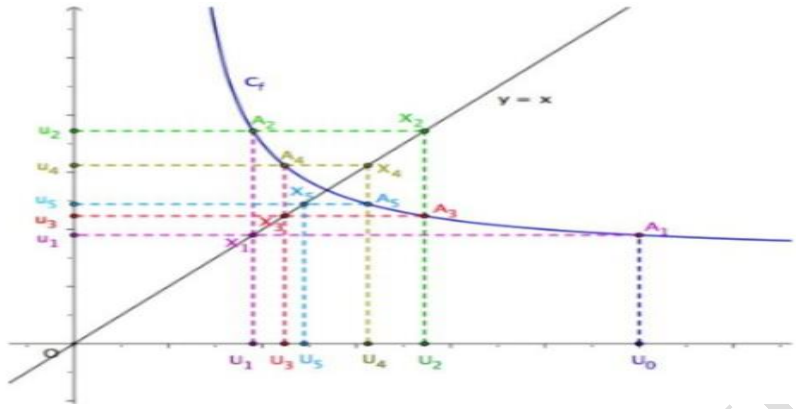
$$U_n = \frac{1}{n}$$



2. Représentation du type $U_{n+1} = f(U_n)$

Dans ce cas , on ne cherche pas en générale à représenter la suite suivant la définition ci-dessous, mais on préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses. Pour le faire , on suit les étapes suivantes :

- Tracer la courbe de f définissant la suite récurrente et la première bissectrice d'équation $y = x$
- Placer le premier terme U_0 sur l'axe des abscisses.
- Utiliser la courbe de f pour construire $U_1 = f(U_0)$
- Reporter U_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
- Utiliser la courbe de f pour construire $U_2 = f(U_1)$ sur l'axe des abscisses et on répète la procédure.



V. **Progression arithmétique et géométrique**

- Trois réels a, b et c sont en progression arithmétique si $b = \frac{a+c}{2}$

<u>Preuve</u>

$$b = a + r \Leftrightarrow r = b - a$$
$$c = b + r \Leftrightarrow r = c - b$$
$$donc\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

- Trois a , b et sont en progression géométrique si $b^2 = ac$

<u>Preuve</u>

$$b = a \times r \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$
$$c = b \times r \Leftrightarrow r = \frac{c}{b}$$
$$donc\ \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

DENOMBREMENT

Pré requis :

- Connaitre la notion d'ensemble
- Déterminer l'union et l'intersection de deux ensemble

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre le vocabulaire suivant :ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini, produit cartésien- listes , arrangement ,permutation , combinaison , anagramme
- Utiliser les représentation pour dénombrer
- Connaitre et utiliser les formules des p-listes , arrangement , combinaison
- Connaitre les notations $n!$
- Modéliser les situations concrètes pour résoudre des problèmes de dénombrement
- Utiliser la formule du Binôme de Newton

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cour)

Déroulement possible

I. Théorie des ensembles

1. Ensemble fini et cardinal

a. Cardinal d'un ensemble fini

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble .Il est noté $card\ (E)$

Exemple :

A=$\{a; x\ 1\ ; 2\}$ $card(A) = 4$

B=$\{a; z\}$ $card(B) = 2$

Card$(\emptyset) = 0$

b. Cardinal de la réunion ou l'intersection de deux ensembles

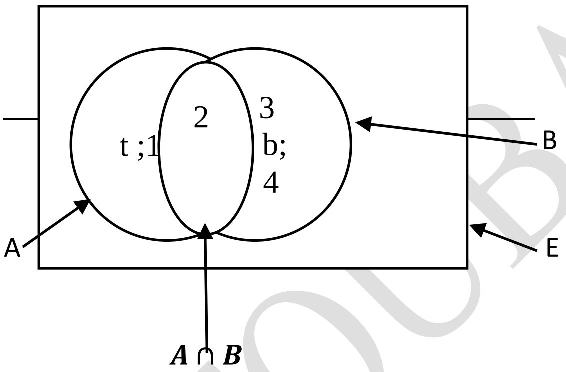
Soient A et B deux ensembles finis contenus dans un ensemble E , $(A \subset E\ et\ B \subset E)$

$$x\ \in A \cup B = \{x \in E\ \ / x \in A\ ou\ x \in B\}$$
$$x \in A \cap B = \{x \in E\ /x \in A\ et\ x \in B\}$$

Propriétés :

Soient A et B deux ensembles finis on a

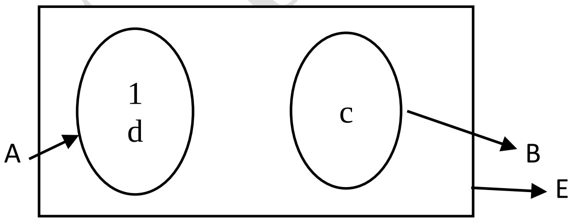
Card$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{Card}\ (\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{Card}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$



Card (A)=3 ; Card (B)=4 Card$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{1}$

$Card(E) = Card(A \cup B) = 3 + 4 - 1 = 6$

Si A et B sont disjoints alors $A \cap B = \emptyset\ \ on\ a: (A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

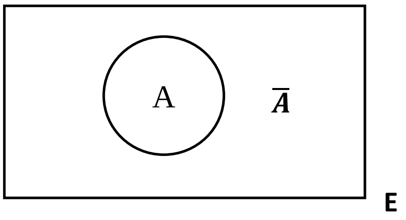


$Card(A) = 2\quad Card\ (B) = 1\quad Car(A \cap B) = 0$

$Card(E) = Card(A \cup B) = 2 + 1 = 3$

c. Cardinal du complémentaire d'un ensemble

Soit A une partie de E , le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments qui sont dans E et non dans A.Il est noté $\overline{A}$ ou E\ A



on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$Card(A \cup \bar{A}) = Card(A) + Card(\overline{A}) \quad ; Card(E) = Card(A) + Card(\bar{A});$$

$$\boldsymbol{Card(A) = Card(E) - Card(\bar{A})}$$

Remarque :$A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$; $A \cap B \subset A \cup B$

Propriétés :

$$\forall\ \boldsymbol{A, B, C \text{ des ensembles de } E, \text{on } a}:$$

- $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $\overline{AUB} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C$

Card$\boldsymbol{(A \cup B \cup C) = car(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$

Exemple :

Dans une classe de 42 élèves , 25 pratiquent le football ; 30 pratiquent le basket et 20 pratiquent les deux.

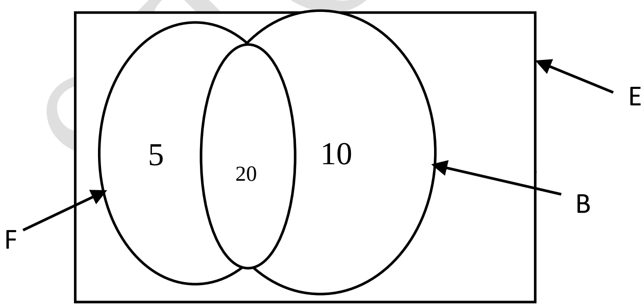
a) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football
b) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket
c) Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent ni le football ni le basket

Solution

Soit E l'ensembles des élèves de cette classe $card\ (E) = 42$

F : l'ensemble ses élèves qui pratiquent le football, $card(F) = 25$

B :L'ensemble des élèves qui pratiquent le basket , $card\ (B) = 30$



a)Le nombre d'élèves qui font uniquement le foot est 5

b) Le nombre d'élèves qui font uniquement le basket est 10

Autre méthode

$$a) \quad card(F \setminus B) = card(F) - card(F \cap B) = 25 - 20 = 5$$

$$b) \quad card(B \setminus F) = card(B) - card(B \cap F) = 30 - 20 = 10$$

$$Card(\overline{FUB}) = card(E) - card(F \cup B) = 42 - (25 + 30 - 20) = 7$$

Donc il y a 7 élèves qui ne pratiquent ni le foot Ball ni le basket.

d. Produit cartésien

Définition :

Soit A et B deux ensembles finis .On appelle le produit cartésien de A par B noté A$\times B$, l'ensemble des couples (a,b) tel que $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A , b \in B\}$$

Propriété :

Soit A et B deux ensembles finis :card(A$\times B) = card(A) \times card(B)$

Exemple :

Fatou dispose de 5 foulards , 4 bodys et 3 pantalons .Le nombre de façon possibles qu'elle peut les porter est :4$\times 3 \times 5 = 60$

II. Modélisation

1. P-listes ou P-uplets

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p$\in \mathbb{N}^*$; $E = \{x_1, x_2, \dots \dots x_n\}$.On appelle p-liste d'éléments de E ,toute liste $(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$ de E distinct ou non.

Exemple : Les mots : maths ,chimie ,compo sont des 5 listes des 26 lettres de l'alphabet français.

Remarque :

Dans une $p - liste$,l'ordre des éléments est important et la répétition est permise.

Dans un tirage , on utilise l'outil $p - liste$ si le tirage st successif avec remise

b. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel. Le nombre de p- liste dans E est $\boldsymbol{n^p}$

Exemple 1 :

1)Le nombre de codes de 4 chiffres qu'on peut former avec les 10 chiffres est :$10^4 = 10000$

2) L e nombre de mots de 3 lettres (ayant un sens ou non) qu'on peut former est :

$$26^3 = 17576$$

1) Le nombre de codes de 2 lettres suivis de 2 chiffres qu'on peut former est :$26^2 \times 10^2 = 67600$

Exemple 2 :

Une urne contient 2 boules rouges , 3 noires et 1 blanche .On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne .

1) Déterminer le nombre de tirages possibles
2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :
   A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire »
   B : « un tirage unicolore »
   C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges »

Solution

1) Le nombre de tirages possibles :$6^3 = 216$
2) Les cardinaux des ensembles suivants
3) A : « 2 boules rouges suivies d'une boules noire »
   Card(A)= $2^2 \times 3^1 = 12$
   B : « un tirage unicolore »
   Card(B) =$2^3 + 3^3 + 1^3 = 36$
   C : « Le tirage ne contient pas de boules rouges »
   Card(C) = $4^3 = 64$

2. P -listes éléments distincts : Arrangement

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.On appelle arrangement de p-éléments parmi n éléments , toute p -liste d'éléments de E deux à deux distincts.
Autrement dit , un arrangement est une p- liste dans laquelle il n'y a pas de répétition.

Remarque :

Dans un arrangement , l'ordre est important et la répétition n'est pas permise .
Dans un tirage , on utilise l'outil arrangement si le tirage st successif sans remise

b. Propriétés

Le nombre d'arrangement de p- éléments pris dans un ensemble à n éléments est noté A_n^p et définie par :$A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots \ldots \times (n-p+1)$

Exemple : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

c. Notation factorielle

Soit n un entier , on appelle factorielle n le réel noté n ! défini par :

$$n! = \begin{cases} 0 \; si \; n = 0 \\ n(n-1)(n-2) \ldots \ldots . \times 3 \times 2 \times 1 \quad si \; n \neq 0 \end{cases}$$

Remarque :$\boldsymbol{n! = n(n-1)!}$

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \ldots .(n-p+1) \quad \times (n-p) \times \ldots \ldots \ldots .3 \times 2 \times 1}{(n-p) \times \ldots \ldots . \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple :$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 20$

Propriété :

$$A_n^0 = 1 \quad ; A_n^1 = n \quad ; A_n^n = n!$$

Permutation :

Une permutation est un arrangement de n éléments parmi n éléments. Le nombre de permutation de n éléments est $A_n^n = n!$

<u>Exemple</u> :

Le nombre de permutations possibles avec les lettres du mot Touba est $A_5^5 = 5! = 120$

Anagramme :

Un anagramme est une permutation de deux éléments distincts ou non

Le nombre d'anagramme du mot chimie est :$\frac{6!}{2!}$=360

Le nombre d'anagramme du mot PAPA est :$\frac{4!}{2! \times 2!}$=6

Exemple :

Dans une classe de 20 élèves dont 12 garçons et 8 filles , on veut élire un comité comprenant : un président , un vice président et un trésorier(pas de cumul de poste) .

1) Déterminer le nombre de comités qu' on peut former
2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants

   A « un comité comprenant que des filles »

   B «un comité comprenant des personnes de même sexe »

   C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon »

   D « le président est un garçon »

   E « un comité comprenant au moins une fille »

   F « un comité comprenant au plus une fille »

<u>Solution :</u>

1)Le nombre de comités qu'on peut former est $A_{20}^{3} = 6840$
2) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :

A « un comité comprenant que des filles »

$$card(A) = A_8^3 = 336$$

B «un comité comprenant des personnes de même sexe »

$$card(B) = A_8^3 + A_{12}^3 = 1656$$

C « un comité comprenant 2 filles et 1 garçon »

$$card(C) = A_8^2 \times A_{12}^1 \times \frac{(2+1)!}{2! \times 1!} = 2016$$

D « le président est un garçon »

$$Card(D) = A_{12}^1 \times A_{19}^2 = 4104$$

E « un comité comprenant au moins une fille »

Première méthode :

On a 1 fille ou 2 filles ou 3 filles

$$card(E) = A_8^1 \times A_{12}^2 \times 3 + A_8^2 \times A_{12}^1 \times 3 + A_8^3 = 5520$$

Deuxième méthode :

Le complémentarité de E est $\bar{E}$: " $Ne\ pas\ obtenir\ de\ fille\ dans\ le\ comité$"

$$card(\bar{E}) = A_{12}^3 = 1320$$

$$card(E) = 6840 - card(\bar{E}) = 6840 - 1320 = 5520$$

F « un comité comprenant au plus une fille »

$$card(F) = A_8^1 \times A_{12}^2 \times 3 + A_{12}^3 = 4488$$

3. Combinaison

a. Définition :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.Une combinaison de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est une partie ou un sous ensemble de E.

Exemple :

$$A = \{0; 1; 2; 3; \dots \dots \dots .9\}$$

(1 ;2 ;3) ;(4 ;5 ;6) ;(9 ;0 ;1) sont des parties de 3 éléments de A.

Remarque :

Dans une combinaison , l'ordre n'est pas important et la répétition n'est pas permise.
Dans un tirage , on utilise l'outil combinaison si le tirage est simultané

b. Propriétés :

Le nombre de p-combinaison pris dans un ensemble à n éléments est noté C_n^p et est défini par :

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$$

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Exemple :

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$$

$$\boldsymbol{C_n^0 = 1 \quad ; C_n^1 = n \quad ; C_n^n = 1 \quad ; C_n^{n-1} = n \quad ; C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

On a :

$$\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

$$\boldsymbol{C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}$$

Or $\boldsymbol{(n-p+1)! = (n-p)! \times (n-p+1)}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{p! = (p-1)! \times p}$

Donc $\boldsymbol{(n-p)! = \frac{(n-p+1)!}{(n-p+1)}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{(p-1)! = \frac{p!}{p}}$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = n!\frac{n+1-p}{p!\,(n-p+1)!} + n!\frac{p}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$C_n^p + C_n^{p-1} = \frac{(n+1)!}{p!\,(n-p+1)!}$$

$$\boldsymbol{C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p}$$

Exemple :

Une urne contient 3 boules rouges , 2 boules noires et 4 boules blanches .On tire simultanément 3 boules .

1) Déterminer le nombre de tirages possibles
2) Dénombrer les cardinaux des ensembles suivants :

   A : « obtenir 2 boules rouges et une boules noire »

   B : « obtenir un tirage unicolore »

   C : « obtenir un tirage tricolore »

Solution :

1)Le nombre de tirage possible :$C_{11}^3 = 165$

2) Les cardinaux des ensembles suivants :

A : « obtenir 2 boules rouges et une boule noire »

$$card(A) = C_3^2 \times C_2^1 = 6$$

B : « obtenir un tirage unicolore »

$$card(B) = C_3^3 + C_4^3 = 5$$

C : « obtenir un tirage tricolore »

$$card(C) = C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24$$

Formule du binôme de Newton :

Soient a et b des réels et n un entier naturel on a :

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^k b^{2-k} = C_2^0 a^0 b^{2-0} + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^{2-2} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^k b^{3-k} = C_3^0 a^0 b^{3-0} + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^2 a^2 b^1 + C_3^1 a^3 b^0$$

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 + 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}^3$$

Triangle de Pascal :

La relation de Pascal nous permet de calculer les coefficients binomiaux :

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	2	35	35	21	7	1

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES ET ISOMETRIE

Pré requis :

- Vecteurs
- Connaitre les notions :Translation, rotation ,homothétie , symétrie orthogonale

Objectifs :

Apres cette leçon ,l'élève doit être capable de :

- Reconnaitre une translation , une rotation , une homothétie , une symétrie orthogonale
- Utiliser la propriété caractéristique d'une translation ,rotation , homothétie
- Déterminer une expression analytique d'une translation , d'une rotation ,d'une homothétie , d'une symétrie orthogonale
- Utiliser ces transformations dans :des démonstrations , des problèmes de construction , de la détermination des lieux géométriques
- Décomposer une translation et une rotation en produit de symétries orthogonales
- Reconnaitre un déplacement , un anti déplacement
- Utiliser les critères d'isométries des triangles dans des résolutions de problèmes

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

Déroulement possible

I. Transformation du plan

1. Définition

On appelle transformation du plan , toute application bijective du plan dans le plan

Exemple :

La translation ,la symétrie orthogonale , la symétrie centrale sont des transformations

La projection sur une droite n'est pas une transformation

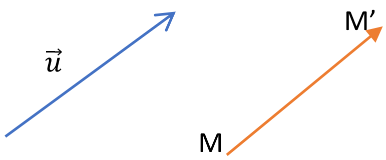
2. Etude des transformations usuelles du plan

a. Translation

a_1.Définition

Soit u un vecteur donné .On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, la translation notée $t_{\vec{u}}$ définie par :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'}$$



a_2.Propriétés

- $t_{\vec{0}} = id_p$
- **Réciproque**

- $t^{-1}{}_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}}$

- **Composée de translation**

- $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

- **Propriété caractéristique** :Une transformation f est une translation si et seulement si pour tout point M et N d'image respectives M' et N' on a :$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

a_3.Expression analytique

Le plan étant muni d'un repère$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $Soient\ \vec{u}\binom{a}{b}, M\binom{x}{y}\ et\ M'\binom{x'}{y'}$

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases} \quad (f)$$

Le système (f) st appelé expression analytique de $t_{\vec{u}}$

Application :

Soit $\vec{u}(2, -3)$

a) Déterminer l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$
b) Déterminer l'image de A(-5 ;1) et l'antécédent de B'(4 ;-7)

Solution

a) L'expression analytique de $t_{\vec{u}} \begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = -3 + y \end{cases}$

b) Soient A' l'image de A par $\vec{u}$;A'$\binom{x'}{y'}$

$\begin{cases} x' = 2 - 5 = -3 \\ y' = -3 + 1 = -2 \end{cases}$ A'$\binom{-3}{-2}$

Soient B$\binom{x}{y}$ l'antécédent de B'

$\begin{cases} 4 = 2 + x \\ -7 = -3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ $\qquad B\binom{2}{-4}$

b. Homothétie

b_1 Définition :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k la transformée notée h(Ω,k) définie par :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Exemple :
Soit ABC un triangle .Déterminer $h\left(A,\frac{1}{2}\right)(B)$; $h(B.-2)(C)$; $h(C;\frac{2}{3})(A)$

$$h\left(A,\frac{1}{2}\right)(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$h(B,-2)(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = -2\overrightarrow{BC}$$
$$h\left(C;\frac{2}{3}\right)(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{CA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$$

b_2 Propriétés

- $h(\Omega, 1) = Id_p \quad et\ h(\Omega, -1) = S_\Omega$
- **Points invariants** :
  - Si k=1 alors tous les points du plan sont invariants par $h(\Omega, k)$
  - Si k≠ 1 alors le seul point invariant est Ω
- **Réciproque** :
  - $h(\Omega, k) = h(\Omega, \frac{1}{k})$
- **Composée d'homothéties de même centre**
  - $h(\Omega, k)\ o\ h(\Omega, k') = h(\Omega, kk')$

Preuve

Soient M , M' et M'' trois points du plan tel que

$$\begin{cases} h(\Omega, k)(M) = M'' \\ h(\Omega, k)(M) = M' \end{cases}$$

$$Donc\ h(\Omega, k')o\, h(\Omega, k)M = M'$$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ \overrightarrow{\Omega M'} = k'\overrightarrow{\Omega M''} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k'(k\overrightarrow{\Omega M}) = k'.k\overrightarrow{\Omega M}$

D'où $h(\Omega, kk')(M) = M'$

Par suite $h(\Omega, k)\ o\ h(\Omega, k') = h(\Omega, kk')$

- **Propriété caractéristique** :

Une transformation f est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M'et N'par f on a : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

b_3 Expression analytique

Le plan étant muni d'un repère$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $Soient\ \vec{\Omega}\binom{a}{b}, M\binom{x}{y}\ et\ M'\binom{x'}{y'}$

$$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(x-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=k(x-a)+a \\ y'=k(y-a)+b \end{cases}$$

Ce système est une définition analytique de l'homothétie h(Ω,k)

c. Rotation

c_1 Définition

Soit Ω un point du plan et θ un reel donné .On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ , la transformation notée $r(\Omega,\theta)$ définie par :

- $r(\Omega)=\Omega$
- Si M$\neq\Omega$ alors $r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta[2\pi] \end{cases}$

<u>Exemple</u> :

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre déterminer les points A',B',C' et définie par :

A'= $r(O,\frac{2\pi}{3})(A)$; $B'=r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)(B)$; $C'=r\left(O,-\frac{4\pi}{3}\right)(C)$; $O'=r(A,-\frac{\pi}{6})$

c_2 Propriétés

- $r(\Omega,0)=Id_p$ $\quad r(\Omega,\pi)=S_\Omega$
- **Réciproque**
  - $r^{-1}(\Omega,\theta)=r(\Omega,-\theta)$
- **Composée de deux rotations de même centre**
  - $r(\Omega,\theta_1)\ o\ r(\Omega,\theta_2)=r(\Omega,\theta_2)\ o\ r(\Omega,\theta_1)$
- **Points invariants**
  - Si $\theta=0[2\pi]$ alors tous les points du plan sont invariants par $r(\Omega,\theta)$
  - $Si\ \theta\neq 0[2\pi]$ alors Ω est le seul point invariant par $r(\Omega,\theta)$
- **Propriété caractéristique**

Une transformation est une rotation d'angle θsi et seulement pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a :

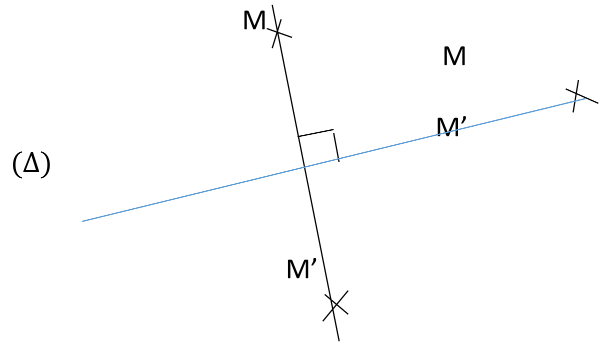
$$\begin{cases} MN=M'N' \\ (\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'})=\theta[2\pi] \end{cases}$$

d. Symétrie orthogonale

d_1 Définition :

Soit (Δ) une droite donnée , on appelle symétrie orthogonale d'axe (Δ) la transformation notée $S_{(\Delta)}$ définie par :

- Si M$\in(\Delta)$ $alors\ S_{(\Delta)}$(M)=M
- $Si\ M\notin(\Delta)\ alors\ S_{(\Delta)}(\mathrm{M})=\mathrm{M}'\Leftrightarrow(\Delta)\ est\ la\ mediatrice\ de\ [MM]$



d_2 Propriétés

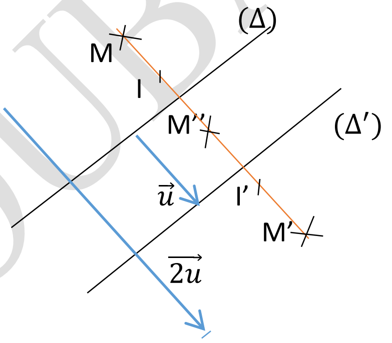
- $S_{(\Delta)}{}^{-1} = S_{(\Delta)}$
- $S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)} = Id_p$
- **Points invariants :** l'ensemble des points invariants par $S_{(\Delta)}$ est (Δ)
- **Cas où les axes sont parallèles :**
  - ✓ Soit (Δ) et (Δ') deux droites strictement parallèles et $\vec{u}$ le vecteur tel que $t_{\vec{u}}(\Delta) = (\Delta')$
    On a :$\boldsymbol{S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')} = t_{2\vec{u}}}$

Preuve :

Soient M, M' et M'' les points tels que :

$$\begin{cases} S_{(\Delta)}(M) = M'' \\ S_{(\Delta)}(M'') = M' \end{cases}$$

Donc $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}(M) = M'$



Soient I et I' les milieux respectifs de $[MM'']$ et $[M''M']$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''M'}$$
$$= 2\overrightarrow{IM''} + 2\overrightarrow{M''I'}$$
$$= 2\overrightarrow{II'}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = 2\vec{u}}$$

Par suite $t_{2\vec{u}}(M) = M'$

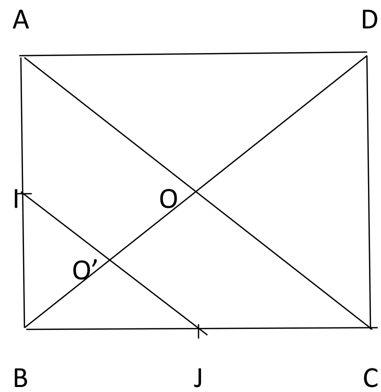
Donc $\boldsymbol{S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')} = t_{2\vec{u}}}$

Application :

Soit ABCD un carré direct de centre O.I et J les milieux respectifs de de $[AB]$ et $[BC]$ et O' milieu de $[IJ]$ .Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = S_{(AB)}\ o\ S_{(DC)} \quad ; g = S_{(IJ)}\ o\ S_{(AC)} \quad ; \quad h = S_{(DC)}\ o\ S_{(OJ)}$$

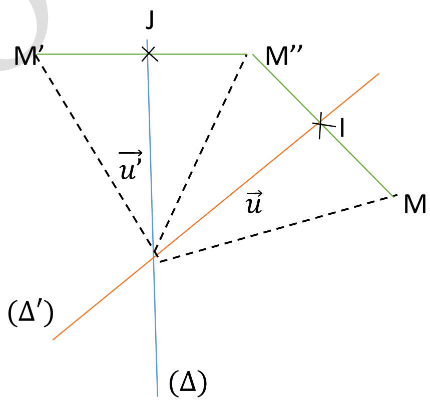
Solution :



- $f = S_{(AB)}\ o\ S_{(DC)}$
  - Nature : f est une translation car $(AB) \parallel (DC)$
  - $Vecteur\ de\ f$
    $\vec{u}$=2$\overrightarrow{CB}$; $f = t_{2\overrightarrow{CB}}$
- $S_{(IJ)}\ o\ S_{(AC)}$
  - Nature :g est une translation car $(IJ) \parallel (AC)$
  - Vecteur de g
    $\vec{u}$=2$\overrightarrow{OO'}$=$\overrightarrow{OB}$; $g = t_{2\overrightarrow{OB}}$
- $h = S_{(DC)}\ o\ S_{(OJ)}$
  - Nature :h est une translation car $(DC) \parallel (OJ)$
  - Vecteur de h
  - $\vec{u} = 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}$ $\vec{u} = t_{\overrightarrow{BC}}$

- **Cas où les axes sont sécants**

Soient $(\Delta)\ et\ (\Delta')$ deux droites sécantes en O ,$\vec{u}$ et $\vec{u}$' deux vecteurs directeurs respectifs de $(\Delta)\ et\ (\Delta')$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{u'})$



On a : $\boldsymbol{S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = r(O; 2\theta)}$

Preuve :

Soient M, M'et M'' les points tel que :

$$\begin{cases} S_{(\Delta)}(M) = M'' \\ S_{(\Delta')}(M'') = M' \end{cases}$$

Donc $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}(M) = M'$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}) &= (\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM''})(\overrightarrow{OM''}\,;\overrightarrow{OM'}) \\ &= 2(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}) + 2(\overrightarrow{OM''}\,;\overrightarrow{OJ}) \\ &= 2[(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM''}) + 2(\overrightarrow{OM''}\,;\overrightarrow{OJ})] \\ &= 2(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}) = 2\theta[2\pi]}$$

De plus $\begin{cases} OM = OM'' \\ OM'' = OM' \end{cases}$ Donc OM=OM'

Ainsi on a : $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 2\theta[2\pi] \end{cases}$

Par suite $r(O; 2\theta)(M) = M'$

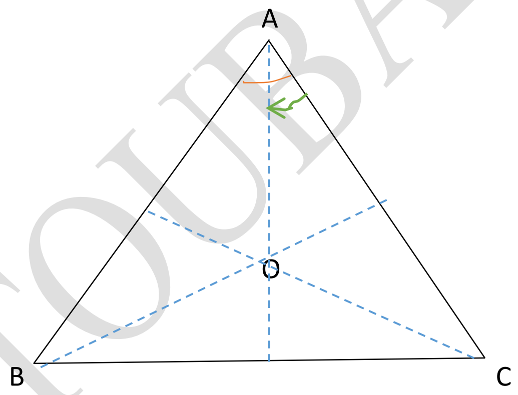
D'où : $\boldsymbol{S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = r(O; 2\theta)}$

Application :

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O Déterminer la nature et les caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = S_{(AB)}\ o\ S_{(AC)} \quad ; g = S_{(OC)} o\ S_{(OB)} \quad ; h = S_{(AO)}\ o\ S_{(AC)}$$

Solution :



$$f = S_{(AB)}\ o\ S_{(AC)}$$

Nature : f est une rotation car les droites (AB) et (AC) sont sécantes

Eléments caractéristiques : Le point A est le centre ; Angle $=2 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$

$$\boldsymbol{f = r(A; -\frac{2\pi}{3})}$$

$$g = S_{(OC)} o\ S_{(OB)}$$

Nature : g est une rotation car les droites (OB) et (OC) sont sécantes

Eléments caractéristiques : Le point O est le centre ; Angle $=2 \times \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$

$$\boldsymbol{g = r(O; \frac{4\pi}{3})}$$

$$h = S_{(AO)}\ o\ S_{(AC)}$$

Nature : h est une rotation car les droites (AO) et (AC) sont sécantes

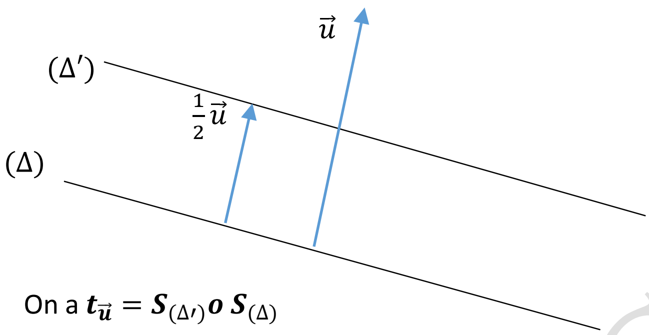
Eléments caractéristiques : Le point A est le centre ; Angle $=2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\boldsymbol{h = r(A; -\frac{\pi}{3})}$$

e. Décomposition d'une translation et d'une rotation

Pour décomposer une translation de vecteur $\vec{u}$, il suffit de :

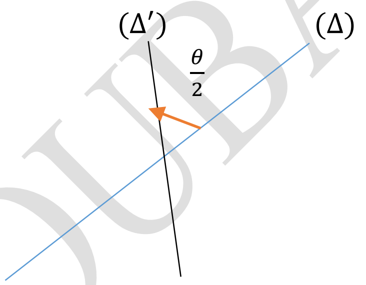
- Choisir une droite (Δ) ayant pour vecteur normal $\vec{u}$
- Construire la droite (Δ) vérifiant : $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta) = (\Delta')$



On a $\boldsymbol{t_{\vec{u}} = S_{(\Delta')} o\, S_{(\Delta)}}$

Pour décomposer une rotation de centre O et d'angle θ , il suffit de :

- Choisir *une droite* (Δ) qui passe par O
- Construire la droite (Δ') passant par O et vérifiant : $r\left(O; \frac{\theta}{2}\right)(\Delta) = (\Delta')$



On a :$\boldsymbol{r(O;\theta) = S_{(\Delta')}\ o\ S_{(\Delta)}}$

f. Composée d'une translation et d'une rotation

f_1 Propriété

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle θ est une rotation d'angle θ

<u>Preuve :</u>

Soient r une rotation d'angle θ et t une translation .Montrons que rot ou tor sont des rotations d'angle θ.

Soient M, N,M',N' ,M'',N'' les points tels que :

$$\begin{cases} t(M) = M'' \\ t(N) = N'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r(M'') = M' \\ r(N'') = N' \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} rot(M) = M' \\ rot(N) = N' \end{cases}$ 1)

D'après la relation caractéristique d'une rotation , on a :$\overrightarrow{MN}$=$\overrightarrow{M''N''}$

D'après la propriété caractéristique d'une rotation , on a :

$$\begin{cases} M''N'' = M'N' \\ (\overrightarrow{M''N''};\overrightarrow{MN}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

Ainsi on a :

- MN=M''N''=M'N'
- $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'})=0[2\pi]$ car $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M''N''}$

On a : $\begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}) = 0[2\pi] \end{cases}$ 2)

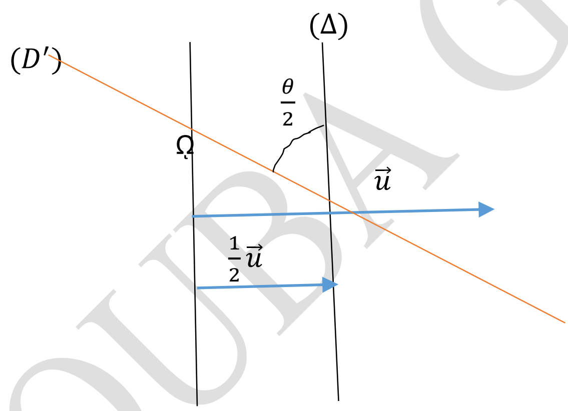
D'après les deux systèmes 1) et 2) rot est une rotation d'angle θ.
On montre de la même manière que tor est une rotation d'angle θ

❖ Construction des centres de rot et tor

<u>Centre de rot</u>

Soit O,le centre de r et $\vec{u}$ le vecteur directeur de t. Soit (Δ) passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$. Les droites (D) et (D')sont telles que :

$$\begin{cases} r = S_{(D')} o\, S_{(\Delta)} \\ t = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D)} \end{cases}$$



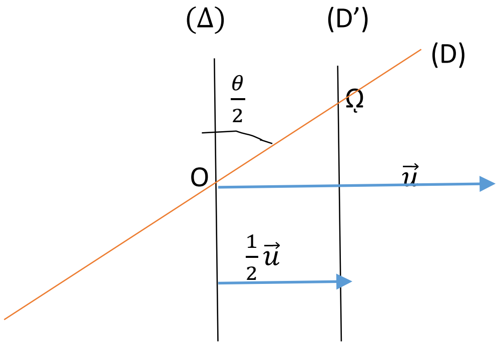
$$rot = \left(S_{(D')} o S_{(\Delta)}\right) o \left(S_{(D)} o S_{(\Delta)}\right)$$
$$rot = S_{(D')}\ o\ \left(S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}\right)\ o\ S_{(D)}$$
$$rot = S_{(D')}\ o\ Id_p\ o\ S_{(D)}$$
$$\boldsymbol{rot = S_{(D')}\ o\ S_{(D)}}$$

Par suite le centre de rot est le point Ω intersection de (D) et (D')

Centre de tor

Soient (Δ) la droite passant par normal $\vec{u}$.Les droites (D) et (D') sont telles que :

$$\begin{cases} r = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D)} \\ t = S_{(D')}\ o\ S_{(\Delta)} \end{cases}$$



$$rot = \left(S_{(D')} o S_{(\Delta)}\right) o \left(S_{(D)} o S_{(\Delta)}\right)$$
$$rot = S_{(D')}\ o\ \left(S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}\right)\ o\ S_{(D)}$$
$$rot = S_{(D')}\ o\ Id_p\ o\ S_{(D)}$$
$$\boldsymbol{rot = S_{(D')}\ o\ S_{(D)}}$$

Par suite le centre de tor est le point Ω intersection de (D) et (D')

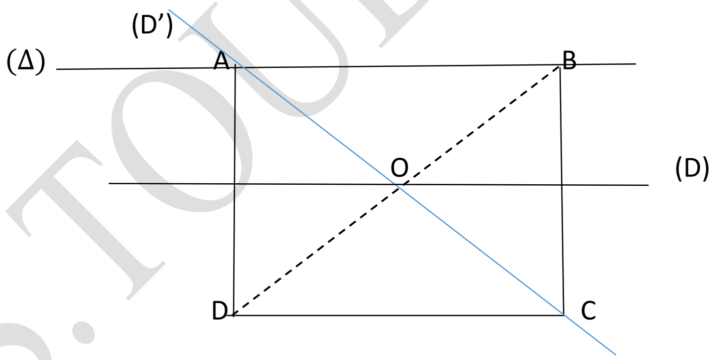
Application :

Soit ABCD un carré de centre O .Déterminer la nature et les caractéristiques des transformations suivantes :

$f = t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$; $g = r\left(O;-\frac{\pi}{2}\right) o\ t_{\overrightarrow{BC}}$; $h = r(C;\pi)\ o\ t_{\overrightarrow{BD}}$

Solution :

$$f = t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$$



$$f = t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$$

Nature :f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

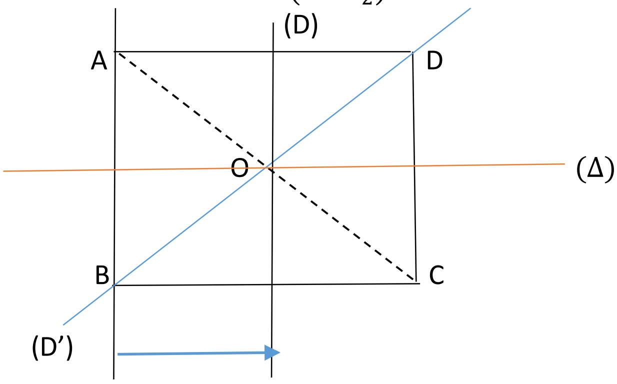
Centre de f: $Soit$ (Δ), la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ $donc$ $(\Delta) = (AB)$.

Soient (D) et (D') les droites telles que :

$$\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(D)}\ o\ S_{(\Delta)} \\ r\left(A;\frac{\pi}{2}\right) = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D')} \end{cases}$$

$$Le\ centre\ de\ f\ est\ le\ point\ O : f = r(O;\frac{\pi}{2})$$

$$g = r\left(O; -\frac{\pi}{2}\right) o\ t_{\overrightarrow{BC}}$$



Nature : g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

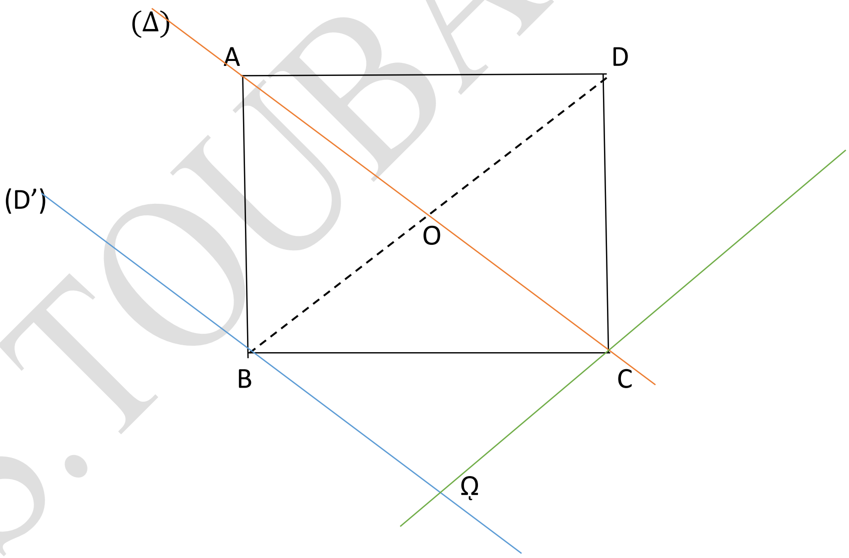
Centre : Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

Soient (D) et (D') les droites telles que :

$$\begin{cases} r\left(o; -\frac{\pi}{2}\right) = S_{(D)}\ o\ S_{(\Delta)} \\ t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D')} \end{cases}$$

$$Le\ centre\ de\ f\ est\ le\ point\ O: g = r(O; -\frac{\pi}{2})$$

$$h = r(C; \pi)\ o\ t_{\overrightarrow{BD}}$$



Nature :Rotation

Angle :π

Centre :Soit (Δ) la droite passant par C et de vecteur $\overrightarrow{BD}$; $(\Delta) = (AC)$.Soient (D) et (D') les droites telles que :

$$\begin{cases} r(C, \pi) = S_{(D)}\ o\ S_{(\Delta)} \\ t_{\overrightarrow{BD}} = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D\prime)} \end{cases}$$

Donc le centre de $r(C; \pi)\ o\ t_{\overrightarrow{BD}}$ est le point Ω intersection de (D) et (D').

g. Composée de deux rotations de centres distincts

g_1 Proprieté

Soient r et r' deux rotations de centre θ et $\theta'(\theta \neq \theta')$ et d'angles respectifs α et α'.

- Si $\alpha + \alpha' = 0[2\pi]$ *alors* $r\ o\ r'$ *et* $r'o\ r$ sont des translations
- Si $\alpha + \alpha' \neq 0[2\pi]$ *alors* $r\ o\ r'$ *et* $r'o\ r$ sont des rotations d'angles $\alpha + \alpha'$

<u>Preuve :</u>

Soient M, N , M' ,N' , M'' et N'' des points tels que :

$$\begin{cases} r'(M) = M'' \\ r'(N) = N'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} r'(M'') = M' \\ r'(N'') = N' \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} r\ o\ r'(M) = M' \\ r\ o\ r'(N) = N' \end{cases} \qquad 1)$$

D' après les propriétés caractéristiques d'une rotation , on a :

$$\begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) = \alpha'[2\pi] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} M''N'' = M'N' \\ (M''N'', M'N') = \alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) + (\overrightarrow{M''N''}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha + \alpha'[2\pi] \end{cases}$$

D'après Chasles , on a

$$\text{D'où} \begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) = \alpha + \alpha'[2\pi] \end{cases} \qquad 2)$$

Si $\alpha + \alpha' = 0[2\pi]$ alors on a :

$$\begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = 0[2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \qquad 3)$$

D' après 1) et 3) r o r' est une translation .

Si $\alpha + \alpha' \neq 0[2\pi]$, d'apres 1) et 3) r o r' est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$

✓ **Construction du vecteur de r o r' dans le cas d'une translation**

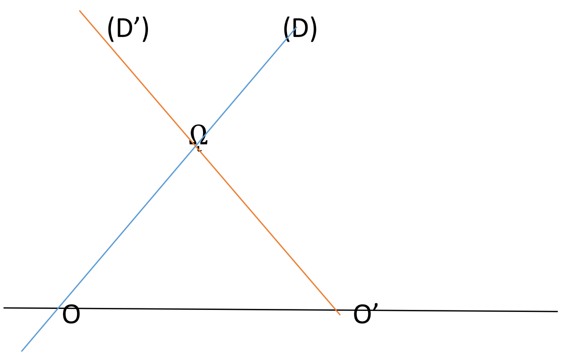
$$r\ o\ r'(O') = r[r'(O')] = r(O')$$

Donc le vecteur de r o r' est $\overrightarrow{O'O''}$

✓ **Construction du centre de r o r' dans le cas d'une rotation**

Soient (D) et (D') les droites telles que :

$$\begin{cases} r = S_{(D)}\ o\ S_{(oo')} \\ r' = S_{(oo')}\ o\ S_{(D')} \end{cases}$$



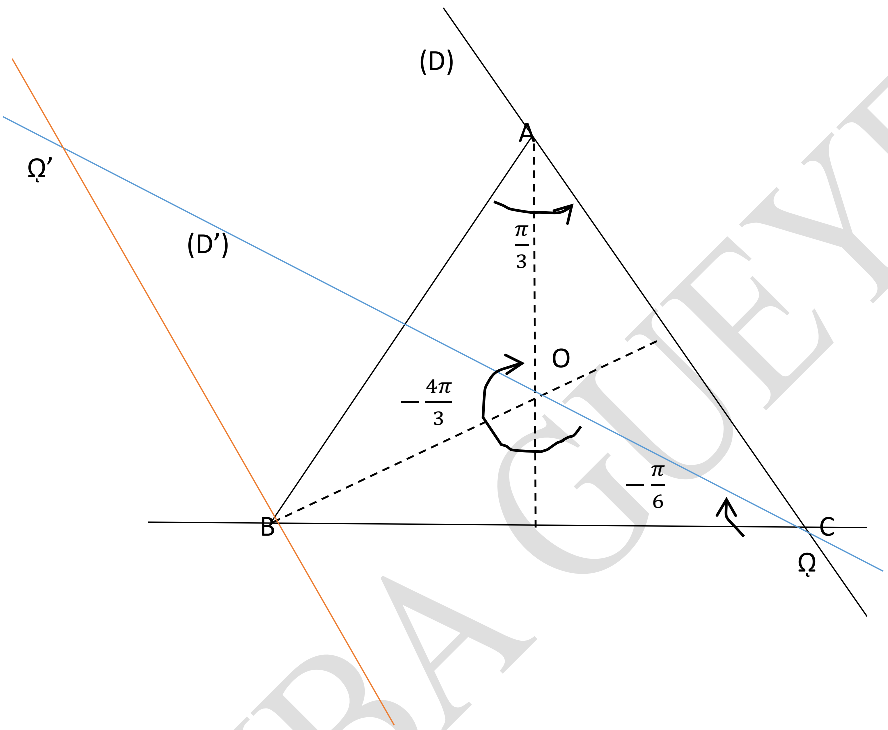
<u>Application</u> :

Soit ABC un triangle équilatérale direct de centre Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) o\, r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad g = r\left(O;-\frac{4\pi}{3}\right) o\, r\left(C;-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$h = r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) o\, r\left(O;-\frac{2\pi}{3}\right) ; i = r\left(C;-\frac{\pi}{3}\right) o\, r\left(B;\frac{2\pi}{3}\right)$$

Solution



$$f = r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) o\, r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)$$

f est une translation car $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$

$$; \quad g = r\left(O;-\frac{4\pi}{3}\right) o\, r\left(C;-\frac{2\pi}{3}\right)$$

g est une translation car $\frac{-4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} =$

$$f(c) = r\left(O;-\frac{4\pi}{3}\right) o\, r\left(C;-\frac{2\pi}{3}\right)(C)$$

$$f(C) = r(O;-\frac{4\pi}{3})(C)$$

$$h = r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) o\, r\left(O;-\frac{2\pi}{3}\right)$$

h est une rotation car $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \neq 0[2\pi]$

Angle :$-\frac{\pi}{3}$; $(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3})$

Le centre est le point Ω intersection de (D) et (D') telles que :

$$\begin{cases} r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) = S_{(D)}\ o\ S_{(AO)} \\ r\left(O;-\frac{2\pi}{3}\right) = S_{(AO)}\ o\ S_{(D')} \end{cases}$$

$$h = r(\Omega;-\frac{\pi}{3})$$

$$i = r\left(C;-\frac{\pi}{3}\right) o\ r(B;\frac{2\pi}{3})$$

i est une rotation car $-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\neq 0[2\pi]$

Le centre est le point Ω' ; $\begin{cases} r(C;-\frac{\pi}{3}\circ = S_{(D)} o\ S_{(CB)} \\ r\left(B;\frac{2\pi}{3}\right) = S_{(CB)}\ o\ S_{(D')} \end{cases}$

Par suite $i = r(\Omega';\frac{\pi}{3})$

h. Composée d'une translation, d'une rotation et d'une symétrie orthogonal

$\boldsymbol{h_1}$. ***Cas où le vecteur de la translation est un vecteur normal de l'axed de la symetrie***

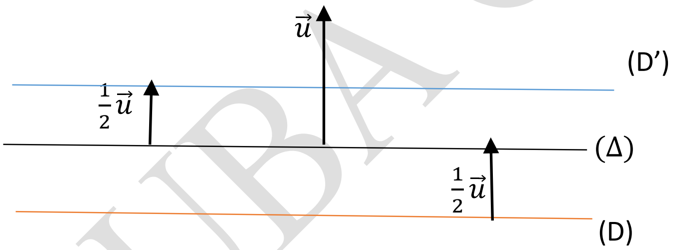
✓ **Propriété**

Soit u un vecteur normal de (Δ) *alors* : $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}$ *et* $S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}}$ sont des symétries orthogonales.

<u>Preuve :</u>

Soient (D) et (D') les droites telles que :

$$\begin{cases} t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(D)} \\ t_{\vec{u}} = S_{(D')}\ o\ S_{(\Delta)} \end{cases}$$



On a :$t_{\vec{u}} o S_{(\Delta)} = \left(S_{(D')} o\ S_{(\Delta)}\right) o S_{(\Delta)}$

$t_{\vec{u}} o S_{(\Delta)} = S_{(D')} o (S_{(\Delta)}\ o\ S_{(\Delta)})$

$\boldsymbol{t_{\vec{u}} o S_{(\Delta)} = S_{(D')}}$

$S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)} o (S_{(D)} o S_{(\Delta)})$

$S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = (S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}) o S_{(D)}$

$\boldsymbol{S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = S_{(D')}}$

h_2.Cas où le vecteur de la translation est un vecteur directeur normal de l'axe de la symétrie

✓ **Propriété**

Si u est un vecteur directeur de (Δ) alors o :

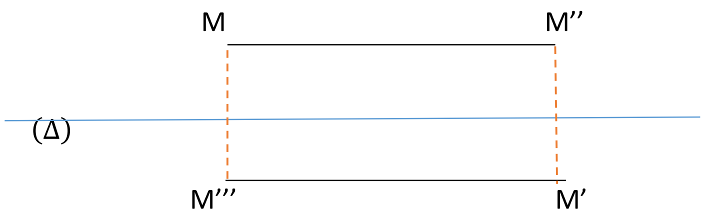
- $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}}$
- $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}$ n'a pas de point invariant

<u>Preuve :</u>

Soient M , M', M'' , M''' les points tels que :

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

$$\begin{cases} S_{(\Delta)}(M) = M''' \\ t_{\vec{u}}(M'') = M' \\ t_{\vec{u}}(M) = M'' \end{cases}$$



$$M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$$

$$\xrightarrow[t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}]{}$$

On a : $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}(M) = M'$

$$\begin{cases} t_{\vec{u}}(M''') = M' \\ t_{\vec{u}}(M) = M'' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'''M} = \overrightarrow{M'M''}$$

Donc MM''M'M''' est un parallélogramme ;

De plus $\begin{cases} (M'''M') \parallel (\Delta) \\ (M'M''') \perp (MM''') \end{cases}$

Donc $(M'''M') \perp (MM''')$

Par suite $\widehat{MM'''M'}$ est un angle droit d' où MM''M'M''' est un rectangle ;(Δ) médiatrice de $[MM''']$ donc (Δ) médiatrice de$[M'M'']$.

Ainsi $S_{(\Delta)}(M'') = M'$

Or $t_{\vec{u}}(M) = M''$

$$M \xrightarrow{t_{\vec{u}}} M'' \xrightarrow{S_{(\Delta)}} M'$$

$$\xrightarrow{S_{(\Delta)} o t_{\vec{u}}}$$

D'où :$S_{(\Delta)} o\ t_{\vec{u}}(M) = M'$

Conclusion :

$$t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} o t_{\vec{u}}(M) = M'$$

Donc $\boldsymbol{t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} o t_{\vec{u}}(M)}$

Montrons que $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}$ n'a pas de point invariant

$\mathbf{1^{er}}$ ***cas*** : $Si\ M \in (\Delta)$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M) = M$

On a $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}(M) = t_{\vec{u}}(M)$

$t_{\vec{u}}(M) = M'$

De plus $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}(M) = M \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ce qui est absurde car $\vec{u} \neq \vec{0}$

$\mathbf{2^{eme}}$ ***cas*** : $Si\ M \notin (\Delta)$

Soit M le point tel que :$S_{(\Delta)}(M) = M'$, Donc $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal de (Δ)

On a :$t_{\vec{u}} o S_{(\Delta)}(M) = M$

$t_{\vec{u}}(M') = M$

$\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ d'où $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur directeur de (Δ) ce qui est absurde

Conclusion :

$\forall\, M \in (P); t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}(M) \neq M \quad donc\ t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}$ n'a pas de point invariant

- **Symétrie glissée**

On appelle symétrie glissée la composée d'une translation est une symétrie orthogonale tel que le vecteur de la translation a la même direction que l'axe de symétrie .Ces éléments caractéristiques représentent le vecteur et l'axe .

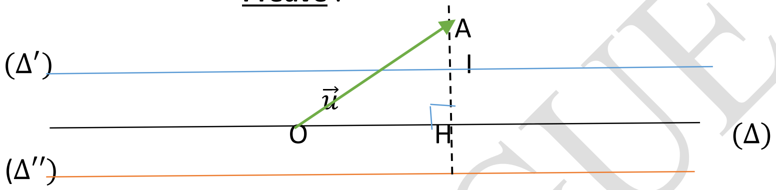
h_3 .Cas où le vecteur de la translation n'est ni un vecteur directeur ni un vecteur normal

Propriété :

Si u n'est ni un vecteur directeur ni un vecteur normal de la droite (Δ) alors :

$t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}\ et\ S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}}$ sont des symétries glissées.

Preuve :



Soit O un point de (Δ) et A le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.Soit H le projeté orthogonal de A sur (Δ) et I le milieu de $[AH]$.Soient (Δ') la droite passant par I et parallèle à (Δ) et (Δ'') la symétrie de (Δ') par rapport à (Δ')

On a : $\begin{cases} t_{\overrightarrow{HA}} = S_{(\Delta')}\ oS_{(\Delta)} \\ t_{\overrightarrow{HA}} = S_{(\Delta)}\ oS_{(\Delta'')} \end{cases}$

$\vec{u}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}$

$$\boldsymbol{t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}} = t_{\overrightarrow{OH}}\ o\ t_{\overrightarrow{HA}} = t_{\overrightarrow{HA}} o t_{\overrightarrow{OH}}}$$

$$t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = \left(t_{\overrightarrow{OH}}\ o\ t_{\overrightarrow{HA}}\right) oS_{(\Delta)}$$

$$t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{OH}} o\ \left(t_{\overrightarrow{HA}}\ o\ S_{(\Delta)}\right)$$

$$t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{OH}}\ o(S_{(\Delta_1)} o\ S_{(\Delta)} o\ S_{(\Delta)})$$

$$\boldsymbol{t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{OH}}\ o(S_{(\Delta_1)})}$$

Par suite $t_{\vec{u}}\ o\ S_{(\Delta)}$ est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{OH}$

De même

$$S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)} o(t_{\overrightarrow{HA}}\ o\ t_{\overrightarrow{OH}})$$

$$S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = (S_{(\Delta)} o t_{\overrightarrow{HA}})\ o\ t_{\overrightarrow{OH}})$$

$$S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = (S_{(\Delta)} o\ S_{(\Delta)} o\ S_{(\Delta_2)}) o t_{\overrightarrow{OH}}$$

$$\boldsymbol{S_{(\Delta)}\ o\ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta_2)} o t_{\overrightarrow{OH}}}$$

II. Isométrie

1. Définition

On appelle isométrie , toute transformation qui conserve la distance c'est-à-dire une transformation est une isométrie si pour tout point M et N d'images respectives M' et N' ,on a MN=M'N' .

2. Ensemble des isométries

Les isométries du plan sont : l'application identique, la translation , la rotation , la symétrie orthogonale et la symétrie glissée.

3. Propriétés

- Toute composée d'isométries est une isométrie

- La réciproque d'une isométrie est une isométrie

$$\begin{cases} f^{-1}(M) = M' \\ f^{-1}(N) = N' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(M') = M \\ f(N') = N \end{cases}$$

- Toutes les isométries conservent : la distance , les aires , la mesures des angles géométriques , le parallélisme , l'orthogonalité ,les points de contact , le barycentre , la nature des figures géométriques

4. Déplacement et antidéplacement

a. Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés .
On appelle antidéplacement toute isométrie qui transforme les angles orientés en leurs opposés .

b. Ensemble des déplacements et antidéplacements

Les déplacements sont :l'application identique ,la translation et la rotation
Les antidéplacements sont : la symétrie orthogonale te la symétrie glissée

c. Propriété

- La composée de deux déplacements est un déplacement
- La composée de deux antidéplacement est un déplacement
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement

5. Classement des isométries suivant leurs nombres de points invariants

- Toute isométrie qui laisse qui laisse trois points non alignés est l'application identique
- Toute isométrie qui laisse deux points distincts A et B invariant et qui n' est pas l'application identique est la symétrie orthogonale d'axe (AB)
- Toute isométrie qui laisse invariant un point A et qui n'est pas l'application identique ni la symétrie orthogonale est la rotation de centre A
- Toute isométrie qui ne laisse aucun point est soit la translation de vecteur non nul soit la symétrie glissée

6. Triangles isométriques

a. Définition

Deux triangles sont isométriques(superposables) si l'un est l'image de l'autre par isométrie .
De plus si l'isométrie est un déplacement alors les triangles sont dits directement superposables.
Si l'isométrie est un antidéplacement alors les triangles sont dits superposables prés .

b. Critère d'isométriques

Pour que deux triangles soit isométriques , il suffit que l'un des critères suivant soit vérifié

- Les deux triangles ont leurs cotés deux à deux de même longueur

- Les deux triangles ont des angles géométriques de même mesure compris entre deux cotés deux à deux de même mesure

- Les deux triangles ont un coté de même longueur compris entre deux angles géométriques deux à deux de même mesure

STATISQUE

Pré requis

- Statistique

Objectifs :

Apres cette leçon , l'élève doit être capable de :

- Connaitre le vocabulaire :populations , caractère , individu, échantillon, mode , modalité
- Calculer et interpréter les paramètres de dispersion
- Représenter une série à deux variables
- Calculer les coordonnées du point moyen
- Déterminer une droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés et la méthode de Mayer
- Calculer et interpréter le coefficient de corrélation
- Utiliser la droite de régression pour faire des extrapolations ou interpolations linéaires

Sources et supports pédagogiques

- Collection Hachettes
- CIAM 1S
- Programme de mathématiques du second cycle (Sénégal)-Année 2006
- Cours des collègues(Doyens)
- Internet
- Sunu daara

Plan :(voir cours)

Déroulement possible

La statistique est un recueil de données et l'interprétation de ces données. L'origine du mot statistique remonte du latin classique statuts (état) qui, par d'évolutions successives , aboutit au français statistique , pour la première fois en 1771.
La statistique trouve son application dans beaucoup de domaines : économie , biologie , commerce , physique, politique, sociologie ….

A. Série à un caractère

I. Vocabulaire

1. Population

Une étude statistique porte toujours sur un ensemble de personnes , d'animaux , d'animaux , de végétaux ou de chose. La population est l' ensemble sur lequel porte une étude statistique .

2. Individu

C'est tout élément de la population.

3. Echantillon

La partie de la population effectivement utilisée pour l'étude statistique est appelée échantillon

4. Caractère

Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population
Exemple :Considérons l' ensemble des élèves de S_1 Du Sénégal
L' ensemble des élève de S_1 est une population
Chaque élève de S_1 est un individu
Un sous ensemble d'élèves de S_1 est un échantillon
Un caractère peut être quantitatif ou qualitatif .
Un caractère est dit quantitatif lorsqu'il est mesurable
Un caractère est dit qualitatif lorsqu'il n'est pas mesurable

5. Modalité

On appelle modalité toute valeur possible d'un caractère

6. Effectif

L' effectif d'une modalité n_i est le nombre de fois que cette modalité est observée

7. Fréquence

La fréquence f_i d'une modalité m_i est le quotient $f_i = \frac{n_i}{n}$ où n_i est l' effectif de cette modalité et n l'effectif total

- Effectif cumulé croissant d'une valeur x_i :

C'est le nombre d'individus présentant une valeur du caractère inferieur ou égale à x_i

L'ensemble des couples $(x_i; n_i)$ ou l' ensemble des couples $(x_i; f_i)$ est appelé série statistique à un caractère

- Caractère qualitatif

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

Modalité m_i	m_i	m_2	…………	m_k
Effectifs n_i	n_1	n_2	…………..	n_k
Fréquence f_i	f_1	f_2	……………	f_k

- Caractère quantitatif discret

Modalité x_i	x_i	x_2	…………	x_k
Effectifs n_i	n_1	n_2	…………..	n_k
Fréquence f_i	f_1	f_2	……………	f_k

On peut ajouter dans le tableau :les ECC et les ECD

- Caractère quantitatif continu

Classes C_i	$[a_1, a_2[$	$[a_2, a_3[$	……………	$[a_{k-1}, a_k[$
Centres x_i	x_i	x_2	…………	x_k
Effectifs n_i	n_1	n_2	…………..	n_k
Fréquence f_i	f_1	f_2	……………	f_k

On peut ajouter dans le tableau :les ECC et les ECD

Le centre de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$

L'amplitude de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $a_{i+1} - a_i$

La densité de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $d_i = \frac{n_i}{a_{i+1} - a_i}$

II. Paramètre de position

1. La moyenne $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{k} n_i x_i = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots .. + n_kx_k}{n}$$

$$\bar{x} = \sum_{i}^{k} n_i f_i = n_1f_1 + n_2f_2 + \cdots .. + n_kf_k$$

2. Les quartiles

On appelle quartile d'ordre a% la valeur x_i du caractère telle que a% des valeurs observées soient inferieur ou égales à x_i
La médiane M_e ou Q_2 est le quartile d'ordre 50%.Elle partage les valeurs de la série rangées dans l'ordre croissant en deux sous séries de même effectif.

- Les quartiles Q_1, Q_2, Q_3 partagent la série en 4 séries de même taille , lorsque les valeurs x_i sont rangées dans l'ordre croissant :pour le premier quartile Q_1 , 25% des valeurs observées sont inferieures ou égales à Q_1 et pour le troisième quartile Q_3 75% des valeurs observées sont inferieurs ou égales à Q_3.
- Les 9 déciles $Q_{10}, Q_{20}, Q_{30}, Q_{40} \ldots \ldots \ldots \ldots, Q_{90}$ partagent la série en 10 séries de même

- Détermination des quartiles

- Cas d'un caractère quantitatif discret

On range les valeurs x_i dans l'ordre croissant

- Si l'effectif total n =2p+1 est impair , la $(p+1)^{ieme}$ valeur est la médiane

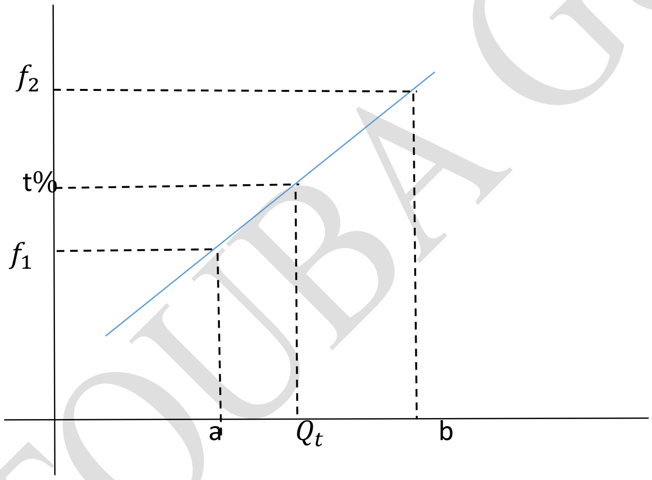
$$M_e = xp + 1$$

- Si l'effectif total n= 2p est pair et si la p^{ieme} $et\ la\ (p+1)^{ieme}$ valeur sont égales alors la médiane $M_e = xp$
- Si l'effectif total n= 2p est pair et si la p^{ieme} $et\ la\ (p+1)^{ieme}$ valeur sont différents alors la médiane $M_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$

- Cas d'un caractère quantitatif continu

Pour calculer un quartile d'ordre t%, on determine la classe $[a, b[$ dans laquelle les fréquences cumulées atteignent t%.
Si f_1 est la fréquence cumulée de la classe $[c, b[$ qui précède $[a, b[$ et si f_2 est la fréquence cumulée croissante de la classe $[a, b[$ alors on a :

$$\frac{t - f_1}{Q_t - a} = \frac{f_2 - f_1}{b - a}$$



Avec comme hypothèse l'équipartition des valeurs de chaque classe.

$$Q_t = a + \frac{t - f_1}{f_2 - f_1}(b - a)$$

Si t=50%, $Q_t = Q_2$, Si t=75%, $Q_t = Q_3$, Si t=25%, $Q_t = Q_1$

$$Q_1 = a + \frac{0{,}25 - f_1}{f_2 - f_1}(b - a)$$

$$Q_2 = a + \frac{0{,}5 - f_1}{f_2 - f_1}(b - a)$$

$$Q_3 = a + \frac{0{,}75 - f_1}{f_2 - f_1}(b - a)$$

3. Le mode

- Pour une série correspondant à un caractère quantitatif discret , on appelle mode une valeur du caractère d'effectif maximum

Une série qui a plusieurs modes est dite polymodale

Une série qui a un seul mode est dite unimodale

- Pour un caractère quantitatif continu ,dont les valeurs sont groupées en classe d'égales amplitude, on appelle classe modale , la classe qui a le plus grand effectif
- Si les classes sont d'amplitude inégales , la classe modale est la classe qui a la plus grande densité

III. Caractéristiques ou paramètre de dispersion

1. La variance

La variance est la mesure de la dispersion des échantillons autour de la moyenne ,autrement dit c'est la moyenne des carrés des écarts entre les modalités et la moyenne.

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots \ldots + x_k(x_2-\overline{x})^2}{n}}$$

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots \ldots + f_k(x_k - \overline{x})^2}$$

<u>Formule de Koenig</u>

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i}^2 - 2n_i x_i \overline{x} + \overline{x}^2}$$

$$\textbf{Or } \boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} 2n_i x_i = 2\overline{x}}$$

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\, {x_i}^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2}$$

$$\boldsymbol{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\, {x_i}^2 - \overline{x}^2}$$

2. Ecart type

L'écart type est l'écart moyen entre les modalités et la moyenne. Autrement dit la variance est la racine carré de la variance

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$$

Plus l'écart type est grand, plus la dispersion est importante, plus l'écart type est petit plus x_i se resserrent autour de $\bar{x}$

3. Coefficient de variation

Le coefficient de variation est quotient entre l' écart type $\boldsymbol{\sigma(x)}$à la moyenne $\bar{x}$.Il permet de comparer des séries dont les caractères de même nature mesurés avec des unités différentes , quant à la dispersion des valeurs autour de la moyenne .

$$\boldsymbol{CV = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}}$$

4. Ecart absolu moyen par rapport à la moyenne

L'écart absolu moyen par rapport à la moyenne est la moyenne de la valeur absolue des écart à la moyenne. Autrement dit, c'est la distance moyenne à la moyenne.

$$e_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i|x_i - \bar{x}| = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \cdots \ldots + n_k|x_k - \bar{x}|}{n}$$

5. Ecart absolu moyen par rapport à la médiane

L'écart absolu moyen par rapport à la médiane est la moyenne de la valeur absolue des écart à la médiane

$$e_{M_e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i|x_i - M_e| = \frac{n_1|x_1 - M_e| + n_2|x_2 - M_e| + \cdots \dots + n_k|x_k - M_e|}{n}$$

On a :$e_{M_e} \leq e_{\bar{x}} \leq \sigma(x)$

6. Intervalle interquartile

On appelle intervalle interquartile , l'intervalle $[Q_1; Q_3]$ contenant 50% des observations centrales , formé du premier et du dernier quartile .Son amplitude $Q_1 - Q_3$ est appelée écart interquartile. Cet écart permet de mesurer la dispersion des valeurs de la série autour de la médiane .

7. Etendue

L'étendue d'une série est égale à la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur observée.

B. Série statistique à deux variables

I. Série statistique double

Il arrive qu' on étudie simultanément deux caractères X et Y sur les individus s'une population donnée. Dans ce cas , l'ensemble des couples $(x_i; y_i)$ est appelée série statistique double .

1. Tableau à double entrée

Exemple :
Une enquête effectuée sur un personnel portant sur le nombre d'années d'exercices X et le nombre de jours d'absence Y a donné les résultats suivants

Y \ X	2	4	5	6	7	TOTAUX
0	1	2	4	3	0	10
1	0	5	2	3	4	14
2	0	0	5	2	1	8
TOTAUX	1	7	11	8	5	32

Exemple de lecture :
Il y a 5 personnes qui ont une ancienneté de 4 ans avec 1 jours d'absence.
Il y a 2 personnes qui ont une ancienneté de 6 ans avec 2 jours d'absences
Il y a 5 personnes qui ont une ancienneté de 7ans .
Il y'a 8 personnes qui ont 2 jours d'absence
32 personnes sont concernées par l'étude .
Remarque :
Dans certains cas , il n'est pas nécessaire d'avoir un tableau à double entrée pour organiser les données.
Exemple :(série injective)
Le tableau suivant donne pour 7 entreprises donne l'investissement X(en millions) et le bénéfice Y(en millions).

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	6 ,3	6,4	6,7	6,9	7,2	7,4	7,5

2. Séries marginales

A partir d'une série double , on peut extraire deux séries marginales X et Y

Exemple :Dans le tableau (A), les séries marginales sont :

X	2	4	5	6	7
Effectifs	1	7	11	8	5

Y	0	1	2
Effectifs	10	14	8

3. Séries conditionnelles

On peut déterminer la distribution suivant un aspect d' une des deux variables .Une telle distribution est dite conditionnelle .
Exemple :
La distribution de X sachant que Y=1 est appelé série conditionnelle définie par le tableau suivant

L'effectif de la modalité est 0 alors le tableau peut être sous cette forme

X/Y=1	4	5	6	7
Effectifs	5	2	3	4

Ce tableau correspond à la distribution des personnes qui ont 1 jour d'absence

4. Nuages de points

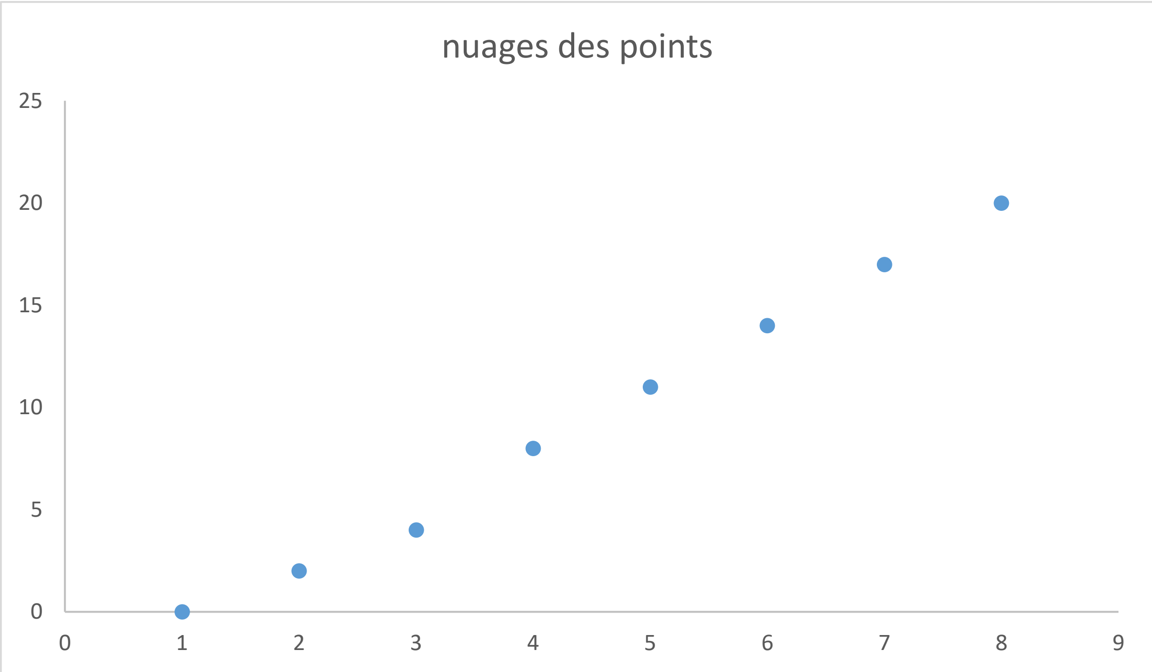
Dans toute la suite on travaillera sur l'exemple (S)
Exemple (S) :
Une entreprise fabrique et vend 8 lots de pompes à injection. Le tableau ci-dessous donne le % Y de pompe d'un lot qui a une pompe au cours de X années.

X(années)	1	2	3	4	5	6	7	8
Y(pourcentage)	0	2	4	8	11	14	17	20

X	x_1	x_2	……………….	x_n
Y	y_1	y_2	………………	y_n

Dans le plan muni d'un repère ortho normal$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'ensemble des points M$\binom{x_i}{y_i}$ est appelé nuages de points .

Représentons le nuage des points .



5. Moyenne de X et Y

L'effectif total n est le nombre d'individus de la population. Dans l'exemple (S) n=8
La moyenne de X notée $\bar{X}$ est définie par :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots..+x_n}{n}$$

La moyenne de Y notée $\bar{Y}$ est définie par :

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{y_1 + x_2 + \cdots..+y_n}{n}$$

Dans l'exemple (S) :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$$

$$\bar{X} = 4{,}5$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{0+2+4+8+11+14+17+20}{8} = 9{,}5$$

$$\bar{Y} = 9{,}5$$

6. Point moyen

On appelle point moyen le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$
Dans l'exemple (S)

$$G(4{,}5; 9{,}5)$$

7. Variance et écart type de X et Y

La variance de X est le réel positif noté V(X) et définie par :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots..+{x_n}^2}{n} - \bar{x}^2$$

La variance de Y est le réel positif noté V(Y) et définie par :

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \bar{y}^2 = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots..+{y_n}^2}{n} - \bar{y}^2$$

Dans l'exemple (S) :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2}{8} - (4{,}5)^2$$

V(X)=5,25

$$V(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - \bar{y}^2 = \frac{0^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2}{8} - (9{,}5)^2$$

V(Y)=46

L'écart type de X noté $\sigma(X)$ est le réel positif défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart type de Y noté $\sigma(Y)$ est le réel positif défini par :

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

Dans l'exemple (S) :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}25} = \mathbf{2{,}29}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{46} = \mathbf{6{,}78}$$

8. Covariance de X et Y

La covariance d'un couple (X,Y) est le réel noté $cov(X,Y)$ et défini par :

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots.+x_ny_n}{n} - \bar{X}\bar{Y}$$

Dans l'exemple (S) :

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \frac{1\times 0 + 2\times 2 + 3\times 4 + 4\times 8 + 5\times 4 + 6\times 14 + 7\times 17 + 8\times 20}{8} - (4{,}5 \times 9{,}5)$$

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = 15{,}5}$$

9. Coefficient de corrélation linéaire (CCL)

Le coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Y) noté r est défini par :

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} \qquad -1 \le r \le 1$$

Le CCL nous renseigne sur l'existence ou non d'une dépendance ou d'une corrélation entre les deux caractères étudiés.

- SI r est voisin de 1 ou -1 , on dit qu'il y'a une forte corrélation entre X et Y
- Si $|r| = 1$, on dit qu'il y a une corrélation parfaite (tous les points du nuage sont alignés)
- Si r est voisin de 0 alors il y'a une faible corrélation
- Si r=0 alors il y'a pas de corrélation

77 726 78 68 S.Touba Gueye toubatoubisto@gmail.com

NB :On dit qu'il y'a une une bonne corrélation si $|r| \geq 0{,}86$

Dans l'exemple (S) $r = \frac{15{,}5}{2{,}29 \times 6{,}78} = 0{,}99$ donc il y'a une bonne corrélation

II. Ajustement linéaire

Ajuster de manière linéaire un nuage c'est trouver une droite qui est plus proche de tous les points du nuages .

1. Ajustement par la méthode des moindres carrées

Ici la droite recherchée est appelée droite de régression.

a. Droite de régression de Y en X

La droite de régression de Y en X notée$D_{Y/X}$ s'écrit sous la forme :

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} \qquad b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

Dans l'exemple (S) :

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{15{,}5}{5{,}25} = 2{,}95;\ b = \bar{Y} - a\bar{X} = 9{,}5 - 2{,}95 \times 4{,}5 = -3{,}775$$

$$\boldsymbol{Y = 2{,}95X - 3{,}775}$$

b. Droite de régression de X en Y

La droite de régression de Y en X notée$D_{Y/X}$ s'écrit sous la forme :

$$X = a'Y + b'$$

$$\boldsymbol{a' = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}} \qquad \boldsymbol{b' = \bar{X} - a\bar{Y}}$$

2. Ajustement par la méthode de Mayer

Dans l'exemple (S) :

X	2	3	4
Y	2	4	8

Le point moyen est $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$

X	5	6	7	8
Y	11	14	17	20

Le point moyen est $G_2(6{,}5\,;15{,}5)$

La droite recherchée passe par $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$ et $G_2(6{,}5\,;15{,}5)$

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{15{,}5 - 3{,}5}{6{,}5 - 2{,}5} = 3$$

Y=3X+b et comme $G_1(2{,}5\,;3{,}5)$ passe par cette droite donc on a :

3,5=3(2,5)+b donc b=-4

Y=3X-4