République Du Sénégal Ministère De L'éducation IA Kaolack / IEF NIORO Lycée Maba Diakhou BÄ Annee: 2024/ 2025	DEVOIR N°2 / 1er Semestre Epreuve : **Mathématiques** 1S1- Coef : 8 / Durée : 04h Professeur : M. Sarr

EXERCICE : 1 *(1 point)*

Soient a et b deux entiers naturels tels que b = a + 1 .

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a^2 + b^{2n} - 1$ est divisible par ab . **0.5pt**

2°) En déduire un diviseur de $121 + 12^{2004} - 1$. **0.5pt**

EXERCICE : 2 *(5,5 points)*

A) Soit l'application $f : [1.+\infty[\to IR$ définie par $f(x) = (x+1)^{2n+1} + 2(x-1)^{2n}$

1) a) déterminer la somme des coefficients du polynôme f **0.25pt**

b) calculer $f(-1)$ **0.25pt**

f est elle injective ? justifier **0.5pt+0.25pt**

2) Montrer que $1 \leq (x+1)^{2n+1}$ pour tout $x \in [1.+\infty[$ **0.25pt**

3) En déduire que $1 \leq f(x)$ pour tout $x \in [1.+\infty[$ **0.5pt**

f est elle surjective ? justifier **0.5pt+0.25pt**

B) On considère la restriction de f a l'intervalle $]0;+\infty[$ notée h et définie par :

$$h :]0;+\infty[\to]0;+\infty[$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$$

a)Montrer que h est une application bijective. **1pt**

b)calculer $h(]2\,;3[)$ et $h^{-1}(]1\,;+\infty[)$ **0.5pt+0.5pt**

c) Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ **0.5pt**

d) En déduire $h^{-1}(2)$. **0.2 5pt**

EXERCICE :3 *(4 points)*

Soit ABC un triangle, $[AA']$ sa médiane issu de A, S son aire, p son demi-périmètre, (C) son cercle circonscrit, R le rayon de (C). On pose BC=a ; AC=b ; AB=c.

1) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$. (Al-Kashi) **0.5pt**

2) Démontrer que $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ **0.5pt**

3) En déduire que : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2s} = 2R$. (Théorème des sinus) **1pt**

4) Etablir les formules: $1+\cos\hat{A} = \frac{2p(p-a)}{bc}$; $1-\cos\hat{A} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$ **0.5pt+0.5pt**

5) En déduire que : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (Formule de HERON) **1pt**

EXERCICE : 4 ***(09,5 points)***

Partie A ***(04 points)***

Soit ABC un triangle quelconque, M un point du]BC[et G son centre de gravité.

On pose a =BC , b=AC , c=AB ; $x = \text{BM}$; $y = \text{CM}$.

1. En appliquant le théorème d'al-Kashi aux triangles MAB et MAC, établir que : $a\,\text{AM}^2 = x\,\text{b}^2 + y\,\text{c}^2 - axy$. (la relation de Stewart). **1pt**

2. On suppose que M est le milieu de [BC] ; Calculer la longueur de la médiane issue de A en fonction de a , b et c **0.5pt**
3. On suppose que M est le pied de la bissectrice intérieure issue de A.

a. Montrer que : $\dfrac{x}{\sin \hat{A}} = \dfrac{a}{\sin \hat{M}} = \dfrac{AM}{\sin \hat{B}}$ et $\dfrac{y}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{M}} = \dfrac{AM}{\sin \hat{B}}$ en considérant respectivement les triangles MAB et MAC **0.5pt+0.5pt**

b. En déduire que $\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$ **0.25pt**

c. En déduire que $x = \dfrac{ac}{b+c}$ et $y = \dfrac{ab}{b+c}$ **0.25pt+0.25pt**

d. En déduire la longueur de la bissectrice intérieure issue de A **0.75pt**

Partie B ***(05,5 points)***

1)a) montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \frac{1}{18}(b^2 + c^2 - 5a^2)$ **1pt**

b) En déduire les produits scalaires $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$ *et* $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$ **0.25pt+0.25pt**

2) A tout point M du plan on associe les nombres réels

$$f(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \quad et \quad g(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

a) Calculer $f(M)$ en fonction de MG et a,b,c. **1pt**
b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$ **1pt**
c) Montrer que $g(M) = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ **1pt**
d) $f(M) + g(M) = 6MG^2 + \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2)$ **0.5pt**
e) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) + g(M) = a^2 + b^2 + c^2$ **0 ,5pt**