Année scolaire : 2022 /2013	***SERIE 10 ; ISOMETRIES DU PLAN***	**Niveau : TS1**
Etablissement : LEG de Diourbel	**M.DIOP**	**Cellule: Mathématiques**

Exercice : 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M , de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 2) \\ y' = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 4 - 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

1. Exprimer x et y en fonction de x' et y' .En déduire que f est une transformation .
   Montrer que f est une isométrie .
2. Montrer que f possède un unique point invariant I. En déduire la nature de f.
3. O' désigne l'image de O par f , déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'})$.Déduire la nature de f

Exercice : 2 Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x, y$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie affine du plan P. est-telle un déplacement ? un antidéplacement ?
2) Démontrer que l'ensemble des points I milieux du segment [MM'] est une droite (D).
3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S par rapport à (D).
4) Déterminer t tel que :$f = S \circ t$

Exercice : 3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M, de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.Démontrer que :$f \circ f = f$.
2. a)Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice : 4 Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$; on désigne par I le milieu de [BC] . On note R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer $f = R_C o t o R_B$.
2. Préciser l'image par f du point B .Caractériser f .

Exercice : 5 Soit A, B et C trois points non alignés du plan et A' , B' et C' trois autres points tels que A'B' = AB , A'C' = AC et BC = B'C'.On suppose qu'il existe deux isométries f et g vérifiant f(A)=g(A)=A' ,f(B)=g(B)=B' et f(C)=g(C)=C'.Montrer que $g^{-1} \circ f = id_p$; en déduire que f = g .

Soit A et B deux points distincts du plan et A' et B 'deux autres points tels que A'B' = AB.

1. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha\ [2\pi]$ et f =$R_{(A',\alpha)} o t_{\overrightarrow{AA'}}$ .Montrer que f(A) =A' , f(B)=B'.
2. Soient g et f deux déplacements qui transforment A en A' et B en B'.
   Montrer que $g^{-1} \circ f$ est un déplacement qui possède deux points invariants distincts .
   En déduire que f = g .Conclure .
3. On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.Caractériser le déplacement f .
4. On suppose que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ et on pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = \alpha\ [2\pi]$ .Montrer que f est une rotation d'angle α dont le centre O appartient aux médiatrices (si elles existent) de [AA'] et [BB'].
5. Les données sont les même qu'au 2.
   a. f étant l'unique déplacement tel que f(A) =A' et f(B)=B' ; on pose h = $foS_{(AB)}$. Quelle est la nature de h ?Montrer que h(A)=A' et h(B)=B' .
   b. Soit h et k deux antidéplacements qui transforment A en A' et B en B'.En considérant $k^{-1}oh$, montrer que h = k.

Exercice : 6 On note H l'orthocentre d'un triangle équilatéral direct ABC . On désigne par r_A , r_B et r_C les rotations de centres respectifs A , B et C et de même angle $\frac{\pi}{3}$ et on pose $f = r_A o r_B$ et $g = r_C o r_B o r_A$

1. Calculer f(A), f(B) et g(B) et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g
2. On désigne par $s_{(AB)}$, $s_{(BC)}$ et $s_{(CA)}$ les réflexions d'axes respectifs (AB) , (BC) et (CA) et on pose $h = s_{(CA)} o\, s_{(AB)} o s_{(BC)}$ et soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par B.
   Montrer que $s_{(AB)} o s_{(BC)} = s_{(d)} o\, s_{(AB)}$.
3. Soit B' le milieu de [AC] . Montrer que $h = t_{2\overrightarrow{BB'}} o\, s_{(AB)}$.

Exercice : 7 Soit ABC un triangle non rectangle en A . On note respectivement σ_1 , σ_2 et σ_3 les réflexions d'axes (AB) , (BC) et (AC).On veut étudier l'isométrie $\sigma_3 o\, \sigma_2\, o \sigma_1$ qu'on note f.

Soit K le projeté orthogonal de C sur (AB) , H le projeté orthogonal de B sur (AC) .Soit D la droite (HK).

1. Montrer que B , C , h et K sont cocycliques et en déduire que f(K) appartient à D.
2. Montrer de même que f^{-1}(H) appartient à D .
3. En déduire que D est globalement invariante par restriction de f à D .
4. En choisissant une translation T convenable , montrer que $T^{-1}$of est la réflexion d'axe D . Conclure .

Exercice : 8 Soit AOO' un triangle rectangle et isocèle direct de sommet A tel que $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note (C) le cercle de centre O et de rayon OA , (C') le cercle de centre O' et de rayon O'A.
Les cercles (C) et (C') se recoupent en B .
1 a) Montrer que : $S_{(AB)}$(C)= (C').
b) Déduisez- en l'égalité angulaire : $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO'})$.
2. Déterminer la nature de l'isométrie R=$S_{(AB)} o S_{(AO)}$.
3. Déterminer l'image du cercle (C) par R ;
a. En déterminant l'image de (C) par chaque réflexion b. En utilisant directement la rotation R .
4. Soit f =$S_{(AO)} o S_{(AB)}$. Déterminer l'image (Γ) du cercle (C) par f , représentez- la. Montrer que (AO) est tangente à (Γ) en A.