COURS DE TERMINALE LITTÉRAIRE

Mamadou FAYE

12 décembre 2017

Table des matières

1 COMPOSITION D'APPLICATION **4**
1.1 Applications et fonctions 4
1.1.1 Applications 4
1.1.2 Fonction 4
1.2 Fonctions composées 5

2 FACTORISATION DES POLYNÔMES **6**
2.1 Rappel et définitions 6
2.1.1 Monômes 6
2.1.2 polynômes 6
2.2 Factorisation du polynôme 6
2.2.1 Définition 6
2.2.2 Signe d'un polynôme et d'une fonction rationnelle 7

3 LIMITES-CONTINUITÉ-DÉRIVABILITÉ **8**
3.1 Limites 8
3.1.1 Limites en l'infini 8
3.1.2 Limites en un réel fini x_0 8
3.1.3 Les formes indéterminées 9
3.2 Continuité 9
3.2.1 Continuité en un point x_0 9
3.2.2 Continuité à gauche - continuité à droite 10
3.2.3 Continuité sur un intervalle 10
3.3 Dérivabilité 11
3.3.1 Dérivabilité en un réel x_0 fini 11
3.3.2 Dérivabilité sur un intervalle 11
3.3.3 Fonction dérivée 12
3.3.4 Utilisation de la dérivée 13

4 ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES **14**
4.1 Généralité 14
4.2 Exemples d'étude de fonction 15

5 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN **17**
5.1 Définition et propriétés 17
5.1.1 Définition 17
5.1.2 Propriété 17
5.1.3 Équations et inéquations avec ln 18
5.1.4 Étude de la fonction ln et limites usuelles 19

5.1.5 Dérivée et étude de fonctions 19

6 FONCTION EXPONENTIELLE **21**
6.1 Définition et propriétés 21
6.1.1 Définition 21
6.1.2 Propriétés 21
6.1.3 Détermination du domaine de définition 21
6.2 Propriétés algébriques et calcul dans $\mathbb{R}$ 21
6.2.1 Propriétés algébriques 21
6.2.2 Calcul dans $\mathbb{R}$ 22
6.3 Étude de la fonction e^x et limites usuelles 22
6.3.1 Étude de la fonction e^x 22
6.3.2 Limites usuelles 22
6.4 Dérivée et étude de fonction exponentielles 23
6.4.1 Dérivée 23
6.4.2 Étude de fonction exponentielle 23

7 SUITES NUMÉRIQUES **24**
7.1 Généralité 24
7.1.1 Définition 24
7.1.2 Vocabulaire 24
7.1.3 Mode de détermination d'une suite 24
7.2 Suites arithmétiques-suite géométriques 25
7.2.1 Suites arithmétiques 25
7.2.2 Suite géométrique 26
7.2.3 Convergence d'une suite 28

8 DÉNOMBREMENT **29**
8.1 Notion d'ensembles 29
8.1.1 Ensembles fini 29
8.1.2 Cardinal d'un ensemble 29
8.1.3 Sous ensembles 29
8.1.4 intersection, réunion et complémentaire 30
8.2 Analyse combinatoire 30
8.2.1 p-liste 30
8.2.2 p-arrangement 31
8.2.3 Permutation 31
8.2.4 p-combinaison 32

9 STATISTIQUE **33**
9.1 Vocabulaire de base 33
9.1.1 Population 33
9.1.2 Individus ou unité statistique 33
9.1.3 échantillon 33
9.1.4 Caractère 33
9.1.5 Modalité 33
9.1.6 Effectif 33
9.2 Série statistique simple (ou à une variable) 34
9.3 Série statistique double (ou à double variable) 34
9.3.1 Activité 34

9.3.2 Définition 34
9.3.3 Le nuage de points 34
9.3.4 Tableau de valeurs 34
9.3.5 Données statistiques 34
9.3.6 L'ajustement linéaire 36
9.3.7 Estimation ou prévision 36

Chapitre 1

COMPOSITION D'APPLICATION

1.1 Applications et fonctions

1.1.1 Applications

définition

Soit $f : A \longrightarrow B$. On dit que f est une application si le domaine de définition Df de f est l'ensemble de départ A.

Exemple 1. Préciser le domaine de définition des applications suivantes : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x+3x \end{array}$;

$\begin{array}{cccc} g & : &]-1,1[& \longrightarrow & [0;1] \\ & & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} h & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$

1.1.2 Fonction

Définition

Soit A un ensemble de départ et B un ensemble d'arrivé. $f : A \longrightarrow B$ est une fonction si l'ensemble de départ peut être ou non le domaine de définition de f.

Remarque. Si le domaine de définition est égale à son ensemble de départ la fonction est une application.

NB Une fonction peut être une application mais l'inverse est fausse.

Détermination du domaine de définition

✓Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$.
✓Les fonctions rationnelles existes si et seulement si le dénominateur est différent de 0.
✓la fonction racine carré existe si le radicande est ≥ 0

Exemple 2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.
$f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}$
$g(x) = \dfrac{x-2}{1-x^2}$
$h(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x^2+1}$
$p(x) = \sqrt{3x^2+2x-1}$

Image et antécédent

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et soient a et b deux réels.
On appelle image de a par f le réel noté $f(a)$.
On appelle antécédent de b par f le ou les réel(s) x solution de l'équation $f(x) = b$.

Exemple 3. On donne $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$.

1. Déterminer l'image de $-1, 0, 2$.
2. Déterminer l'antécédent de $-1, 0, 2$.

1.2 Fonctions composées

Définition

Soient f et g deux fonctions tels que : $\begin{array}{cccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g & : & B & \longrightarrow & C \\ & & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$
On appelle fonction composée de f par la fonction g la fonction notée $g \circ f$ définie par $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Le domaine de définition de $g \circ f$ est $D_{g \circ f} = x \in D_f / f(x) \in D_g$

Exemple 4. on donne les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et de g.
2. Déterminer le domaine de définition $D_{g \circ f}$ de $g \circ f$ puis $D_{f \circ g}$ de $f \circ g$.
3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis comparer.
4. Calculer de deux façons $f \circ g(2)$.

Application 1. Mêmes questions pour $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Chapitre 2

FACTORISATION DES POLYNÔMES

2.1 Rappel et définitions

2.1.1 Monômes

Définition

Soit a un réel et n un entier. On appel monôme tout exposant du type ax^n.
a est appelé le coefficient du monôme et n le degré du monôme.

Exemple 5.
$-2x^7$ est un monôme de coefficient -2 et de degré 7.
0 est un monôme appelé monôme nul.
15 est un monôme de coefficient 15 et de degré 0.

2.1.2 polynômes

Un polynôme est la somme algébrique de plusieurs monôme de degré distinct ordonnés généralement dans l'ordre décroissante. Tout polynôme P s'écrit sous la forme $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ...$ avec $a \neq 0$.

2.2 Factorisation du polynôme

2.2.1 Définition

Soit P un polynôme et α un réel. On dit que α est zéro ou solution ou racine du polynôme P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 6. On donne $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$
Calculer $p(1)$ et $p(-1)$ puis conclure.

Application 2. Soit $P(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$ tel que $p(0) = -9, P(3) = 0$ et $P(1) = -24$.
Déterminer les réels a, b et c.

Théorème 1. Soit P un polynôme et α un réel. Si α est racine de $P(x)$ alors le polynôme est factorisable comme suit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$.

Remarques.
Si α et β sont racines de $P(x)$ alors le polynôme $P(x)$ est factorisable comme suit : $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$ avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 2$.
Si α, β et γ sont racines de $P(x)$ alors le polynôme $P(x)$ est factorisable comme suit : $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q(x)$ avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 3$.

forme d'écriture de $Q(x)$ selon son degré Si $d^\circ(Q) = 0$ alors $Q(x) = 1$.
Si $d^\circ(Q) = 1$ alors $Q(x) = ax + b$.
Si $d^\circ(Q) = 2$ alors $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $d^\circ(Q) = 3$ alors $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Application 3. Soit $p(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$.

1. Calculer $p(-1)$ et $p(2)$.
2. En déduire une factorisation de $p(x)$ en fonction d'un polynôme $q(x)$ dont on déterminera son degré.
3. Déterminer l'expression général de $q(x)$ par la méthode :
   a) du division euclidienne
   b) d'identification des coefficients
   c) de Hörner
4. Résoudre l'équation $p(x) = 0$
5. Résoudre l'inéquation $p(x) \geq 0$

2.2.2 Signe d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

Exemple 7. Soit $p(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + c$ tel que $p(0) = -8, p(1) = -21$ et $p(2) = 0$.

1. Déterminer les coefficients a, b et c.
2. Calculer $p(-2)$.
3. Donner une factorisation complète de p(x).
4. Étudier le signe du polynôme p.
5. soit $Q(x) = \dfrac{p(x)}{(3-x)(5x+1)}$.
   a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b) Étudier le signe du quotient Q.

Chapitre 3

LIMITES-CONTINUITÉ-DÉRIVABILITÉ

3.1 Limites

3.1.1 Limites en l'infini

—La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la limite du monôme le plus haut degré :
$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n = \pm\infty$.
—La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du rapport des monômes le plus haut degrés du numérateur et du dénominateur :
$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax^n + bx^{n-1} + ...}{a'x^m + b'x^{m-1} + ...} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^n}{a'x^m}$.
—La limite d'une fonction racine carrée est la racine carrée de la limite du radicande :
$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}$.

Application 4.
$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 3x^2 - 1$
$\lim_{x\to-\infty} 7x^4 + 3x^2 - 1$
$\lim_{x\to+\infty} -13x^2 - 1$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{12x+7}$
$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3+2x+3}{2x^2+2x-7}$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2+2}{x^3+x^2-1}$
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+3}$
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3-2x}$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2-3}}$

3.1.2 Limites en un réel fini x_0

Définition

Soit f une fonction et x_0 un réel appartenant au domaine de définition D_f de f.
La limite en x_0 de $f(x)$ est égale à $f(x_0)$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 8.
$\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - 1}{1 + x^2}$
$\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{5 - 2x}{x^2}}$

limite à gauche - limite à droite

Soit f une fonction et x_0 un réel n'appartenant pas au domaine de définition D_f de f, mais x_0 est une borne de l'intervalle.
On calcule ainsi la limite à gauche et/ou à droite de f en x_0 comme suit :
—Limite à gauche : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$.
—Limite à droite : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$.

Application 5. Soit f une fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & si \quad x > 0 \\ 4x^2 - 3x + 1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$
Calculer f(0), puis la limite à gauche et à droite de 0.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x - 2}$.
Déterminer le domaine de définition de f.
Calculer les limites aux bornes de D_f.

3.1.3 Les formes indéterminées

Nous avons 4 formes indéterminées qui sont $" - \infty + \infty"; "0 \times (\pm\infty)"; "\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}"; "\dfrac{0}{0}"$. Pour lever l'indétermination, on peut procéder comme suit :
—Simplification
—Expression conjuguée
—changement de variable
—Nombre dérivée

Exemple 9.
Calculer la limite des fonction suivante au point x_0 indiqué :
$f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}; x_0 = 1$
$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; x_0 = 9$
$h(x) = \dfrac{2\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 2}; x_0 = 0^+$

3.2 Continuité

3.2.1 Continuité en un point x_0

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et x_0 un réel.
On dit que f est continue en x_0 si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit f est continue en x_0 si : $\begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Si f n'est pas continue en x_0, on dira que f est discontinue en x_0.

Remarque. Si $x_0 \notin D_f$, alors f est discontinue en x_0 .

3.2.2 Continuité à gauche - continuité à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Application 6. Soit f et g deux fonctions tels que :
$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \dfrac{1}{6} \quad \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

1. déterminer D_f de f et D_g de g.
2. Étudier la continuité de f en 1 et la continuité de g en 2.

3.2.3 Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point x_0 de I.

Propriété 3.1.
–Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur toute partie de $\mathbb{R}$.
–Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.
–Les fonctions racines carrées sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 10. Étudier la continuité des fonction suantes :

1. $f(x) = -x^7 + 3x^3 + 10$.
2. $\dfrac{x^3}{2x^2 + 3x - 5}$
3. $\sqrt{2x^2 + 3x - 5}$

Application 7. Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 2}{x - 1}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites aux bornes de D_f.
4. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.

3.3 Dérivabilité

3.3.1 Dérivabilité en un réel x_0 fini

Le nombre dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel appartenant au D_f. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{\mathbf{x \to x_0}} \dfrac{\mathbf{f(x) - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} = \mathbf{l}$, l un réel fini. Le réel l est appelé le nombre dérivé de f et est noté $f'(x_0)$.

Équation de la tangente

Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative (C_f) admet une tangente d'équation : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Remarque.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, alors la courbe représentative (C_f) de f admet une tangente horizontale d'équation $(T) : y = f(x_0)$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors la courbe représentative (C_f) de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple 11. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
Étudier la dérivabilité de f en 2, puis préciser l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$.
Si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ alors f est dérivable en x_0.

Remarque. Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et cependant sa courbe représentative (C_f) de f admet deux démis-tangentes au point d'abscisse x_0.

Application 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$
Déterminer la dérivabilité de f en 1, puis interpréter les résultats.

3.3.2 Dérivabilité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Propriété 3.2.
Les fonction polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur toute partie de $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur domaine de définitions.
Les fonctions racines carrées sont dérivable sur toute partie où le radicande est strictement positif.

3.3.3 Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction défini sur un intervalle ouvert I. On appelle fonction dérivée f la fonction définie par : $\begin{array}{cccc} f' & : & I & \longrightarrow & J \\ & & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$

Dérivée usuelle

Fonction	Dérivée	Intervalle
$a, a \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

Opération sur les fonctions dérivées

Considérons U et V deux fonctions :

Fonction	Dérivée	Intervalle
$U + V$	$U' + V'$	Sur tout ensemble où U et V sont dérivables
UV	$U'V + V'U$	Sur tout ensemble où U et V sont dérivables
$\frac{U}{V}, V \neq 0$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	Sur tout ensemble où U et V sont dérivables
$U^n; n \in \mathbb{N}$	$nU'U^{n-1}$	Sur tout intervalle ou U est dérivable
$\frac{1}{V}, V \neq 0$	$\frac{-1}{V^2}$	Sur tout ensemble où V est dérivable
$\sqrt{U}, U \geq 0$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	Sur tout ensemble où U est strictement positif

Théorème 2 (Dérivée de la composée de deux fonctions)**.**
Soient f et g deux fonctions. On appelle dérivée de la composée de f par la fonction g, la fonction notée $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$.

Exemple 12. Déterminer la dérivée des fonction suivantes.

1. $f(x) = (x^2 + x + 2)(3x + 5)$
2. $f(x) = \dfrac{-x + 1}{x^{3+3x^2-1}}$
3. $f(x) = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x + 10}$
4. $f(x) = (-2x^2 + 3x + 4)^3$

Remarque. Si $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}, x \neq -\dfrac{d}{c}$ alors $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Théorème 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

3.3.4 Utilisation de la dérivée

La détermination de la fonction dérivée nous permet :
D'étudier le sens de variation d'une fonction.
De dresser le tableau de variation d'une fonction.
De préciser les extrêma.
De vérifier la notion de bijection

Application 9. Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f, puis calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Étudier la dérivabilité de f puis en déduire la dérivé $f'(x)$ de f.
3. Étudier le sens de variation de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Préciser si possible les extrêma et déterminer les coordonnées des points extrêmes.

Application 10. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

1. Déterminer D_g de g, puis calculer les limites aux bornes de D_g.
2. Déterminer a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (ax + b)$.
3. Étudier la dérivabilité de g puis calculer $g'(x)$.
4. Étudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de g.

Chapitre 4

ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

4.1 Généralité

Les Asymptotes

Soit f une fonction.
–Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$ alors on dit que f admet une asymptote horizontale $(A.H)$ d'équation $y = a$ en $\pm\infty$.
–Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que f admet une asymptote verticale $(A.V)$ d'équation $x = a$.
–Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors on dit que la courbe de f admet une asymptote oblique $(A.O)$ d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$.

Branches infinies

Considérons la fonction f tel que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Dans ce cas pour étudier les branches infinies, on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
–Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique (B.P) de direction (oy).
–Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction (ox).
–Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a; a \neq 0$ puis $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b.$, alors la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Parité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
–On dit que f est paire si : $\begin{cases} x \in D_f \quad \text{alors} \quad -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
–On dit que f est impaire si : $\begin{cases} x \in D_f \quad \text{alors} \quad -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Remarque. Dans le cas où $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, on dira que f n'est ni paire ni impaire.

Élément de symétrie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
–On dit que la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie à la courbe de f si :

$$\begin{cases} x \in D_f \quad \text{alors} \quad (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

.
–On dit que le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie à la courbe de f si :

$$\begin{cases} x \in D_f \quad \text{alors} \quad (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

.

Position relative de la courbe par rapport à une droite

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative et la droite d'équation $y = ax + b$.
Pour déterminer la position de la courbe de f par rapport à la droite, on étudie le signe de $f(x) - y$:
–Si $f(x) - y < 0$ sur une partie I de D_f, on dira que la fonction f est en dessous de la droite sur cette partie.
–Si $f(x) - y > 0$ sur une partie I de D_f, on dira que la fonction f est au dessus de la droite sur cette partie.

Les coordonnées des points d'intersections de la courbe avec l'axes des coordonnées

—Pour déterminer le ou les point(s) d'intersection de la courbe (C_f) de f avec l'axe des abscisses, on détermine l'ensemble des x vérifiant l'équation $f(x) = 0$.
–Pour déterminer le point d'intersection de la courbe (C_f) de f avec l'axe des ordonnées, on résout l'équation $f(0)$.

Représentation de la courbe

Pour représenter une courbe dans un repère orthonormé, on trace : les asymptotes, les tangentes ou démis-tangentes, les points remarquables puis représenter l'allure de la courbe à partir du tableau de variation.

4.2 Exemples d'étude de fonction

Cas d'une fonction polynôme

Exemple 13. Soit $g(x) = x^3 - 3x + 2$

1. Déterminer le domaine de définition de g puis calculer les limites aux bornes de D_g.
2. Étudier les branche infinies de g.
3. Étudier la dérivabilité de g puis calculer $g'(x)$.

4. Étudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation de g.
5. Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe des coordonnées.
6. Monter que le point $I(0;2)$ est centre de symétrie à (c_g).
7. Donner une équation de la tangente (T) à (C_g) au point I.
8. Tracer la courbe (C_g) de g dans un repère orthonormé $(O;i;j)$

Cas d'une fonction rationnelle

Exemple 14. On considère la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

1. Après avoir préciser le domaine de définition de la fonction f, calculer les limites aux bornes de D_f puis préciser la nature des asymptotes obtenues.
2. a) Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$.
   b) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c) Étudier la position relative de (D) par rapport à la courbe de f.
3. (a) Trouver les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des coordonnées.
   (b) Montrer que le point $I(-1;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe de (C_f).
4. (a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variation de f
5. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 2$.
6. Tracer (C_f).

Chapitre 5

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

5.1 Définition et propriétés

5.1.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction notée ln définie sur $]0,+\infty[$ et vérifiant : $ln(1) = 0$ et pour tout pour tout $x \in]0,+\infty[$; $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

5.1.2 Propriété

Propriété fondamentale

Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$ on a : $ln(ab) = lna + lnb$.

Exemple 15.
$ln[2(2+\sqrt{3})] = ln\sqrt{2} + ln(2+\sqrt{3})$
$ln(\sqrt{7}-\sqrt{6}) + ln(\sqrt{7}+\sqrt{6}) = ln(7-6) = 0$

Autres propriétés

Soient $a > 0, b > 0$ et n un entier naturel, on a :
$ln(a^n) = nlna$
$ln(\frac{a}{b}) = lna - lnb$
$ln(\frac{1}{b}) = -lnb$

Remarque. $ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}lna$

Application 11. Exprimer A an fonction de $ln2$ et $ln3$.
$A = ln12 - 3ln6 + ln\sqrt{2} + ln27$

Détermination du domaine de définition

Soit $U(x)$ une fonction. la fonction $f(x) = ln(U(x))$ existe si et seulement si $\begin{cases} U(x) & \text{existe} \\ U(x) > 0 \end{cases}$

Exemple 16. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
$f(x) = xlnx + 2x^2 - 1$
$g(x) = 2x + 3ln(1 - x)$
$h(x) = ln(\frac{x-1}{x+1})$

5.1.3 Équations et inéquations avec ln

Le nombre e

On admet qu'il existe un nombre réel noté e vérifiant $lne = 1; e \simeq 2.718$. le réel e est appelé le nombre d'EULER (mathématicien italien).

Propriétés algébriques

Soit $a > 0; b > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.
$lna = lnb \Longleftrightarrow a = b$
$lna = m \Longleftrightarrow a = e^m$
$lna \geq lnb \Longleftrightarrow a \geq b$
$lna \geq m \Longleftrightarrow a \geq e^m$

Remarque.
Si $0 < x < 1$ alors $lnx < 0$.
Si $x > 1$ alors $lnx > 0$

Applications aux équations et inéquations

Exemple 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$ln(1 - 3x) = ln2$
$ln(x - 2) = 0$
$lnx^2 - 3lnx + 3 = 0$
$ln(x - 1) + ln(3 - x) = 0$
$ln(x + 1) \geq ln(3x - 5)$
$ln(-x + 1) \leq 0ln(x - 1) + ln(3 - x) < 0$

Application 12. Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

1. Calculer $P(2)$ puis factoriser $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{12} = 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) : $ln^3x + 3ln^2x - 4lnx = 12$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ln^3x + 3ln^2x - 4lnx - 12 \leq 0$

Règle :
Pour résoudre une équation ou une inéquation ln on doit d'abord préciser le domaine de validité pour ensuite résoudre l'équation ou l'inéquation a l'aide des propriétés algébriques.

Système d'équation

Exemple 18.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivantes.
$\begin{cases} 3lnx - 2lny = 3 \\ -lnx + 3lny = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 80 \\ lnx + lny = ln600 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ lnx + lny = 2ln2 + ln1 \end{cases}$

Règle :
Pour résoudre un système d'équation avec ln on peut utiliser un changement de variable ou bien S et P.
NB : $ln|U(x)|$ existe si et seulement si $U(x) \neq 0$

5.1.4 Étude de la fonction ln et limites usuelles

:

Étude de lnx

Soit f la fonction définie par $f(x) = lnx$.

1. Déterminer D_f et les limites aux bornes, en précisant l'asymptote.
2. Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer les coordonnées de A point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
5. déterminer l'équation de la tangente au point A.
6. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe et les asymptotes.

Limites usuelles

Soit $x > 0$, admettons les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = \frac{lnx}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 0$.

Remarque. Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} ln[U(x)]$ on peut procéder comme suit :
—D'abord calculer $\lim\limits_{x\to a} U(x) = b$
—Ensuite calculer $\lim\limits_{X\to b} lnX = c$
—Puis conclure que $\lim\limits_{x\to a} ln[u(x)] = c$

Exemple 19. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx - x + 1 =$ $\lim\limits_{x\to 0^+} -3\sqrt{x} - xlnx + 1 =$ $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx - x + 16 =$ $\lim\limits_{x\to -\infty} ln(1-x) =$ $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(\frac{x+2}{x-1})$ $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(\frac{2x+1}{x})$

5.1.5 Dérivée et étude de fonctions

Dérivée

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I et lnU la fonction composée. d'après la dérivée de la fonction composée on a : $(ln[U(x)])' = \frac{U'(x)}{U(x)}$.

Exemple 20. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
a) $f(x) = ln(5x)$ b) $g(x) = ln(2-3x)$ c) $h(x) = ln(-2x^2+3x-1)$ d) $m(x) = ln(\frac{3x^2-1}{x^2+5x+1})$ e) $n(x) = ln(x+1) + xlnx$

Étude de fonction

Problème

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)$.

1. Déterminer D_f.
2. calculer les limites aux bornes puis préciser les asymptotes.
3. Montrer que f est une fonction impaire.
4. Calculer la dérivée $f'(x)$, puis étudier son signe.
5. dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé.
   NB
   On définie la fonction **log** par : $logx = \dfrac{lnx}{ln10}$

Chapitre 6

FONCTION EXPONENTIELLE

6.1 Définition et propriétés

6.1.1 Définition

On appelle fonction exponentielle noté **exp** la fonction réciproque de la fonction **ln**. Elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty$ qui à tout x on associe $expx$.

$$\begin{array}{cccc} exp & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & exp(x) \end{array}.$$

Dans la plus part des cas on utilisera e^x au lieu de $exp(x)$.

6.1.2 Propriétés

Soient x et y deux réels, on a :
—$e^x > 0$
—$e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y$
—$e^x \leq e^y \Longleftrightarrow x \leq y$
—$e^x \geq e^y \Longleftrightarrow x \geq y$
—$e^{lna} = lne^a = a$ pour tout $a > 0$
—$e^x = a \Longrightarrow x = lna(a > 0)$

6.1.3 Détermination du domaine de définition

pour tout nombre réel $\alpha, e^{\alpha x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 21. Déterminer le domaine de définition des fonction suivantes :

$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2 \quad g(x) = \dfrac{e^x + 3}{2e^x} \quad h(x) = \dfrac{e^x + 5}{e^x - \dfrac{1}{2}} \quad m(x) = \dfrac{e^{-x} + 1}{e^{2x} - 4} \quad n(x) = \dfrac{e^x}{e^{-x} - 3}$

6.2 Propriétés algébriques et calcul dans $\mathbb{R}$

.

6.2.1 Propriétés algébriques

Soit x et y des réels, on admet les résultats suivantes :
—$e^x \times e^y = e^{x+y}$;
—$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

—$e^x \times e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
—$(e^x)^y = e^{xy}$

6.2.2 Calcul dans $\mathbb{R}$

Équations

Exemple 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$e^{2x} - 9 = 0 \quad e^{-x} + 5 = 0 \quad e^x - e^{-x} + 2 = 0 \quad 3e^{2x+1} + 4e^{x+1} + e = 0$

Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$e^{-x} - 3 \leq 0 \quad (e^x - 1)(e^x - 3) \geq 0 \quad e^x - 3e^{-x} + 2 \leq 0 \quad \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 2} > 0.$

Système

On peut résoudre certains système d'équations en utilisant un changement de variable ou S et P.

Exemple 23. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :
$\begin{cases} 3e^x - 2e^y = 4 \\ e^x + 3e^y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x e^y = e^5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

6.3 Étude de la fonction e^x et limites usuelles

6.3.1 Étude de la fonction e^x

Exemple 24.
1. A partir du tableau de variation de f, on obtient le tableau de variation de e^x.
2. Calculer les limites aux bornes et préciser la nature de l'asymptote obtenu.
3. Déterminer les coordonnées de A point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.
4. Dans un repère orthonormé , tracer la courbe, l'asymptote et le point A.

6.3.2 Limites usuelles

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{lnx} = +\infty \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exemple 25. Calculer les limites suivantes
$$\lim_{x\to-\infty} e^x - x + 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x + \frac{1}{2x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{2e^x + 1} \qquad \lim_{x\to ln2} \frac{e^x + 3}{e^x - 2}$$

6.4 Dérivée et étude de fonction exponentielles

6.4.1 Dérivée

Soit $U(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction composée (e^U) est dérivable sur I et on a : $(e^U)' = U'e^U$.

Exemple 26. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$t(x) = e^{-x^3+2x+3}$ $\quad f(x) = e^{-2x} + 3x - 1$ $\quad g(x) = ln(2x+1) + e^{-x}$
$h(x) = x^2 + 1 + xe^x$ $\quad k(x) = \dfrac{e^x}{e^{-x}+1}$

6.4.2 Étude de fonction exponentielle

Exemple 27.
Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 3}$. On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $1cm$.

1. Déterminer D_g, puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in D_g, g(x) = \dfrac{1 - 2e^{-x}}{1 - 3e^{-x}}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
3. Calculer $x = ln3$ est AH à (C_g).
4. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation.
5. Déterminer a et b tels que $g(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x - 3}$
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe avec les axe du repère.
7. Dans le repère, construire la courbe et tracer les asymptotes.

Chapitre 7

SUITES NUMÉRIQUES

7.1 Généralité

7.1.1 Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note cette suite $\begin{array}{rccc} U & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & U(n) \end{array}$
$U(n)$ est l'image de n par rapport à U. On utilise très souvent U_n au lieu de $U(n)$.

7.1.2 Vocabulaire

$*(U_n)$ est appelé la suite U_n.
$*U_n$ est appelé le terme général de la suite (U_n).
$*U_0$ est le première terme de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7.1.3 Mode de détermination d'une suite

Suite définie par une formule explicite

Une suite est dite explicite si elle est exprimé en fonction de n.
On peut calculer directement chaque terme de la suite.

Exemple 28.

1. On donne la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = 2n + 3$
   Calculer si possible les deux premières termes ainsi que le 7ème terme de la suite (U_n).
2. On donne la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{2}{n}$.
   Calculer si possible les deux premières termes ainsi que le 7ème terme de la suite (V_n).

Suite définie par une formule de récurrence

Une suite est dite récurrente si elle est exprimé en fonctions des termes généraux.
On ne peut pas calculer directement chaque terme de la suite.

Exemple 29. Soit la suit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$
Calculer si possible $U_1; U_2; U_3$ et U_{13}.

Sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite numérique.
$*$Si $U_{n+1} - U_n > 0$, alors on dit que la suite (U_n) est croissante.
$*$Si $U_{n+1} - U_n < 0$, alors on dit que la suite (U_n) est décroissante.
$*$Si $U_{n+1} - U_n = 0$, alors on dit que la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

Application 13. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = 4 - 3n$.
Préciser son mode de définition et calculer ses trois premiers termes.
Étudier le sens de variation de la suite.

Application 14. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = \dfrac{5V_n + 2}{3} \end{cases}$.
Préciser son mode de définition et calculer ses trois premiers termes.
Étudier le sens de variation de la suite.

7.2 Suites arithmétiques-suite géométriques

7.2.1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est dite suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - U_n = r$.
Le nombre réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple 30. On donne la suite (U_n) définie par : $U_n = 3n - 2$.
Montrer que U_n est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son premier terme.

Remarque. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
Si $r < 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.
Si $r = 0$ alors la suite (U_n) est stationnaire.

Terme général

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $U_k, k \in \mathbb{N}$, alors le terme général de la suite (U_n) est : $U_n = U_k + (n-k)r$. Cette écriture est appelée expression explicite de (U_n) ou l'écriture de U_n en fonction de n.
NB : Si U_0 est le premier terme de la suite alors $U_n = U_0 + nr$
Si U_1 est le premier terme de la suite alors $U_n = U_1 + (n-1)r$.

Exemple 31. Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.
2. Donner la formule explicite de (U_n).
3. Calculer U_5.

Exemple 32. Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_6 = 15$ et $U_8 = 19$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite.

Progression arithmétique

Soit 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique a, b, c. Par progression arithmétique, on a : $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Exemple 33. Soit (U_n) une suite tel que $U_5 = 2$ et $U_7 = -5$. Calculer U_6.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

. Soit U_n une suite arithmétique. La somme des termes consécutifs de la suite notée S_n est donnée par : $S_n = \dfrac{\text{(nombre de terme)(1er terme+dernier terme)}}{2}$. avec nombre de terme=indice dernier terme - indice premier terme+1

Remarque.
Si le 1er terme est U_0 alors $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$.
Si le 1er terme est U_1 alors $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2}$.

Application 15. Soit U_n une suite arithmétique croissante de raison r et de premier terme U_1 telle que : $\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 3 \\ U_1 \times U_3 = -8 \end{cases}$

1. Par progression arithmétique, déterminer U_2.
2. Calculer U_1 et U_3 puis déterminer la raison r.
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + ... + U_{16}$

Résolution

1. $2U_2 = U_1 + U_3$ ainsi on a $3U_2 = 3$ d'où $U_2 = 1$.
2. Le système devient : $\begin{cases} U_1 + U_3 = 2 \\ U_1 \times U_3 = -8 \end{cases}$ Par somme et produit on a : $U_1 = -2$ et $U_3 = 4$
3. La raison s'obtient par : $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = 3$.
4. S=285

7.2.2 Suite géométrique

Définition

Une suite (U_n) est dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier naturel n on a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$. Le réel q est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemple 34. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 2^n$.
Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

Terme général

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $U_k, k \in \mathbb{N}$, alors le terme général de la suite (U_n) est : $U_n = U_k q^{(n-k)}$. Cette écriture est appelé l'expression explicite de (U_n) ou l'écriture de U_n en fonction de n.
NB : Si U_0 est le premier terme de la suite alors $U_n = U_0 q^n$
Si U_1 est le premier terme de la suite alors $U_n = U_1 q^{(n-1)}$.

Exemple 35. On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{2}} \end{cases}$

1. Montrer que U_n est une suite géométrique dont-on précisera la raison.
2. Écrire U_n en fonction de n puis Calculer U_6.

Progression géométrique

Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite géométrique, par progression géométrique on a : $b^2 = a \times c$.

Exemple 36. Soit U_n une suite géométrique tel que : $U_5 = \dfrac{1}{2}$ et $U_7 = 5$. Calculer U_6.

Somme des termes consécutifs

Soit V_n une suite géométrique de raison q et de premier terme $V_k(k \in \mathbb{N})$. La somme des n termes consécutifs est $S_n = V_k + V_{k+1} + ... + V_n$. $S_n =$ premier terme $\left(\dfrac{1 - q^{\text{nbre de terme}}}{1 - q}\right), q \neq 1$ d'où $S_n = V_k\left(\dfrac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}\right), q \neq 1$.

Remarque.
—Si le premier terme est V_0, on a : $S_n = V_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right), q \neq 1$
—Si le premier terme est V_1, on a : $S_n = V_0\left(\dfrac{1 - q^{n}}{1 - q}\right), q \neq 1$

Application 16. Soit (V_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme V_1 strictement décroissante tel que : $\begin{cases} V_1 \times V_2 \times V_3 = 216 \\ V_1 + V_3 = 20 \end{cases}$

1. Par progression arithmétique, déterminer V_2.
2. Calculer V_1 et V_3 en déduire la raison q.
3. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
4. exprimer V_n en fonction de n puis calculer V_{10}.
5. Calculer la somme $S = V_1 + V_2 + ... + V_{16}$
6. Calculer la somme $S = V_1 + V_2 + ... + V_n$ en fonction de n.

Application 17. Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Soit la suite $(V_n)n \in \mathbb{N}$ définie par $V_n = U_n - 3$.
   Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n et U_n en fonction de n.
4. Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n puis déduire la somme $S'_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$.

7.2.3 Convergence d'une suite

Une suite numérique U_n est **convergente** si sa limite en $+\infty$ est finie, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l, l \in \mathbb{R}$.
Une suite numérique U_n est **divergente** si sa limite en $+\infty$ est infinie, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$. **NB** : Une suite arithmétique est convergente si sa raison $r = 0$ et divergente si sa raison $r \neq 0$.
Une suite géométrique est convergente si sa raison $-1 < q < 1$ et divergente sinon.

Application 18. Lors d'un référendum dans un bureau de vote on a 300 inscrits entre l'heure d'ouverture $8h00$ et celle de fermeture $18h00$. Le président du bureau declare avoir enrégistré 5 votants à chaque $\frac{1}{4}h$. Soit V_n la suite qui définie le nombre d'inscrit restant à voter et $V_0 = 300$.

1. Calculer V_1 et V_2 le nombre restant de votant respectivement à $8h15mn$ et $8h30mn$.
2. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n puis en déduire la nature de la suite puis préciser sa raison.
3. Exprimer V_n en fonction de n puis calculer le nombre d'inscrit restant à $16h15$.
4. A quelle heure précise de la journée auras-t-on 145 inscrit non votant.

Chapitre 8

DÉNOMBREMENT

8.1 Notion d'ensembles

8.1.1 Ensembles fini

Un ensemble A est dit fini si on peut compter ses éléments.

Exemple 37. L'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a 10 éléments donc A est ensemble fini.
Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ne sont pas des ensembles finis.

8.1.2 Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'élément de l'ensemble E.

Exemple 38. Soit B l'ensemble des voyelles de l'alphabet français : $B = \{a, o, u, i, e, y\}$. Le cardinal de B noté $CardB = 6$.

NB l'ensemble vide $\emptyset$ a pour cardinal 0.

8.1.3 Sous ensembles

Un ensemble B est un sous ensemble où une partie d'un ensemble A si tout élément de B appartient à l'ensemble A. On dit que B est inclus dans A et on note : $B \subset A$.

Exemple 39. On jette un dé équilibré numéroté de 1 à 6. On note E l'ensemble des résultats possibles :

1. Déterminer E puis calculer son cardinal.
2. Soit B l'ensemble des faces dont les numéros sont impaires :
   Déterminer B puis calculer son cardinal.
3. Que peut-on dire des ensembles E et B.

NB : L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est l'ensemble des sous ensembles de E. Il est noté $P(E)$, de cardinal $CardP(E) = 2^n$.

Exemple 40. Soit l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

déterminer $CardE$.

Déterminer l'ensemble $P(E)$ puis déterminer son cardinal.

8.1.4 intersection, réunion et complémentaire

Intersection

Soient A et B deux ensembles non vides. L'intersection de A et B noté $A \cap B$ est l'ensemble des éléments commun à A et à B. Voire Figure :

Remarque. Les ensembles A et B sont dits disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun. $A \cap B = \emptyset$ donc $CardA \cap B = 0$.

Réunion

La réunion de A et B noté $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B

Propriété 8.1. *Soient A et B deux ensembles non vides. on a :*
$CardA \cup B = CardA + CardB - CardA \cap B$

Exemple 41. Dans une classe de 26 élèves on a 18 élèves qui parlent français et 15 qui parlent anglais. Donner le nombre d'élèves bilingues.

Résolution
Notons A l'ensemble des élèves qui parlent français et B ceux qui parlent anglais.
$A \cup B$ représente l'ensemble des élèves de la classe.
$A \cap B$ représente l'ensemble des élèves bilingue.
$CardA \cup B = CardA + CardB - CardA \cap B$ d'ou
$CardA \cap B = CardA + CardB - CardA \cup B = 18 + 15 - 26 = 7$

Complémentaire d'un ensemble

Soit A un sous ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\bar{A}$ vérifiant $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 8.2. *Soit A un ensemble et $\bar{A}$ son complémentaire alors on a :*

$$Card\left(A \cup \bar{A}\right) = CardA + CardB$$

Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de a et B, l'ensemble noté $A \times B$ défini par : $A \times B = \{(x, y)/x \in Aety \in B\}$.

Propriété 8.3. $CardA \times B = (CardA) \times (CardB)$

Exemple 42. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$
Déterminer $A \times B$ puis calculer son cardinal.

8.2 Analyse combinatoire

8.2.1 p-liste

Soit E un ensemble non vide de cardinal n et p un entier naturel.
On appelle $p - liste$ toute suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non.

Remarque. Un $p - liste$ correspond à un tirage successif avec remise

Propriété 8.4. *L'ensemble des $p-liste$ de E est noté E^p de cardinal :$Card\,(E^p) = n^p$.*

Application 19. Une urne contient 4 boules rouges, 2 boules jaunes et une boule verte. On tire successivement 3 boules en remettant à chaque foi la boule tirée.

1. Calculer le nombre de tirage possible
2. Calculer le nombre de tirage contenant :
   (a) des boules unicolores.
   (b) des boules tricolores.
   (c) exactement verte, jaune et rouge dans cet ordre.

8.2.2 p-arrangement

Soit E un ensemble non vide de cardinal n et p un entier naturel.
On appelle $p-arrangement$ toute suite ordonnée et distincte de p éléments de E.

Remarque. Un $p-arrangement$ correspond à un tirage successif sans remise

Propriété 8.5. *Le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble de E de cardinal n est le nombre réel noté A_n^p.*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$$

Exemple 43. Calculer les réels suivants : $A_4^3; A_7^3$

Propriété 8.6. *Admettons les résultats suivants :*
$A_n^0 = 1 \qquad A_n^1 = n \qquad A_n^n = n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1 = n!$

NB : On peut écrire le réel A_n^p en utilisant la notion de factoriel. $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 44. Calculer A_8^5 et A_7^3

Application 20. Un comité de gestion est composé de 7 personnes dont 5 hommes. On veut former un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier sans cumul de poste dans cet ordre.

1. Calculer le nombre de bureau possible qu'on peut former.
2. Calculer le nombre de bureau composé :
   (a) De personne de même sexe.
   (b) uniquement une femme.
   (c) uniquement une femme comme présidente.

8.2.3 Permutation

Une permutation est un arrangement à n éléments d'un ensemble à n éléments. Le nombre de permutation est $n!$.
$n! = n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$ avec $0! = 1$

Application 21.
1. On dispose de 3 lettres A,B et C. Donner le nombre de mots de 3 lettres que l'on peut former ayant un sens ou non.
2. 6 élèves doivent payer leur mensualité en se mettant en rang. Déterminer le nombre de ranger qu'il peuvent former.

8.2.4 p-combinaison

Soit un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel. Une $p-$ *combinaison* est une suite non ordonnée de p éléments distinct dans un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaison de p éléments dans un ensemble à n éléments est noté par : C_n^p tel que

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 45. Calculer les réels suivants : $C_5^2 \qquad C_{10}^0 \qquad C_9^1 \qquad C_7^7$

Propriété 8.7. $\quad C_n^0 = 1 \qquad C_n^1 = n \qquad C_n^n$

Application 22. Dan un trousseau on a 4 pièces de 500f, 2 pièces de 250f et 1 pièce de 25f. Les pièces sont indiscernables au toucher.

1. Calculer le nombre de choix possible.
2. Calculer le nombre de tirage pour avoir des pièces de même valeur.
3. Calculer le nombre de tirage pour avoir la somme : a) 1250 b) 525 c) 775

Chapitre 9

STATISTIQUE

9.1 Vocabulaire de base

9.1.1 Population

Une population est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique. Une population peut-être constituée de personne, d'animaux où d'objet.

9.1.2 Individus ou unité statistique

tout élément de la population est appelé individus.

9.1.3 échantillon

Toute partie de la population est appelé échantillon

9.1.4 Caractère

On appelle caractère toute propriété étudié sur la population où sur l'échantillon. Il existe deux types de caractères :
—**Caractère qualitatif** : ceux qui ne s'exprime pas à l'aide d'un nombre réel(le goût, le groupe sanguin , la nationalité...)
—**Caractère quantitatif** : ceux qui s'exprime à l'aide d'un nombre réel (l'age, le poids, la note, la taille...)

9.1.5 Modalité

On appelle modalité toute valeur prise par un individu de la population.

9.1.6 Effectif

—Soit x_i une modalité, on appelle **effectif partielle** de x_i l'entier naturel noté n_i égal au nombre d'individus qui ont la valeur x_i du caractère.
—On appelle **effectif total** noté N la somme des effectifs partielles, c'est à dire le nombre d'individus de la population.

9.2 Série statistique simple (ou à une variable)

On appelle série statistique simple, l'ensemble des couples (x_i, n_i). l'étude porte sur un seul caractère de la population.

9.3 Série statistique double (ou à double variable)

9.3.1 Activité

Les résultats en Maths et en PC d'un échantillon d'élève d'une classe de terminal sont représenté dans le tableau ci-dessous avec X_i la note en maths et Y_j la note en PC.

X_i	14	13	9	10	11	5	4	13	16	5
Y_i	15	12	8	11	7	10	6	15	16	10

9.3.2 Définition

On appelle série statistique double ou série à deux variables l'ensemble des couples $(X_i; Y_i)$. En effet l'étude porte sur deux propriétés que sont les notes en math et en PC, donc on étudie sur deux variables.

9.3.3 Le nuage de points

On appelle nuance de points associé à la série statistique double : le caractére x, y l'ensemble des points $M(x_i, y_j)$.

9.3.4 Tableau de valeurs

X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
14	15	196	225	210
13	12	169	144	156
9	8	81	64	72
10	11	100	121	110
11	7	121	49	77
5	10	25	100	50
4	6	16	36	24
13	15	169	225	195
16	16	256	256	256
5	10	25	100	50

9.3.5 Données statistiques

Les moyennes

- La moyenne de la série marginale des X est notée : $\bar{X} = \dfrac{\sum X_i}{N}$
  Exemples : Calculons la moyenne de la série marginale des X

$$\bar{X} = \frac{100}{10} = 10$$

– La moyenne de la série marginale des Y est notée : $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N}$
Exemples : Calculons la moyenne de la série marginale des Y

$$\bar{Y} = \frac{110}{10} = 11$$

Le point moyen

C'est le point noté G point central au niveau du nuance de point il a pour coordonnées $G\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$

Exercice : Déterminons les coordonnées du point moyenne de la série étudiée : $G\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

La variance

– La variance de X est le réel positif noté $V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$.
Exemple : Calculons la variance de X.

$$V(X) = \frac{1158}{10} - 10^2 = 15.8$$

– La variance de Y est le réel positif noté $V(X) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2$.
Exemple : Calculons la variance de Y.

$$V(X) = \frac{1320}{10} - 11^2 = 11$$

Écart-type

L'écart-type est la racine carré de la variance noté :
-$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Exemple :$\sigma(X) = \sqrt{15.8} = 3.97$. -$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$
Exemple :$\sigma(Y) = \sqrt{11} = 3.31$.

La convariance entre X et Y

C'est le réel noté $cov(X, Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y}$
Exemple : Calculons la cov de X et Y

$$cov(X, Y) = \frac{1200}{10} - 10 \times 11 = 10$$

Le coéfficient de corélation

Le coéfficient de corélation est noté $r = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$
Exemple : Calculons le coéfficient de corrélation

$$r = \frac{10}{3.97 \times 3.31} = 0.76$$

Remarque :

- Le coéfficient de corrélation est toujours compris entre -1 et 1 ; $-1 \leq r \leq 1$.
- Si $\|r\|$=1 la corrélation est parfaite. Les points de nuance sont alignés.
- Si $\|r\| > 0.8$ On a une forte corrélation
- Si $\|r\|$ compris entre 0.7<r<0.8 alors on a une bonne corrélation
- Si $\|r\| < 0.8$ alors la corrélation est faible
  Exemple : Dans la série double le coéfficient de corrélation r=0.76 alors on a une bonne corrélation

9.3.6 L'ajustement linéaire

Pour l'ajustement linéaire on fait passer une droite sur le maximum de point de nuance. Ce procédé les ajustements linéaires qui nous donnent deux droites de régression dont leur équation est déterminé par la méthode des moindres carrés.

Droite de régression de Y en X

La droite de régression de Y en X notée $(D_{Y/X})$ et a pour équation $(D_{Y/X}) : y = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$
Déterminons l'équation de la droite de régression de Y en X :
$D_{Y/X} : y = ax + b$ $a\dfrac{10}{15.8} = 0.63$ $b = 11 - 0.63 \times 10 = 4.7$

$$D_{Y/X} : y = 0.63x + 4.7$$

Droite de régression de X en Y

La droite de régression de X en Y notée $(D_{X/Y})$ elle a pour équation $(D_{X/Y}) : y = a\prime x + b\prime$ avec $a\prime = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b = \bar{X} - a\prime\bar{Y}$
Déterminons l'équation de la droite de régression de X en Y :
$D_{X/Y} : y = a\prime x + b\prime$ $a\prime\dfrac{10}{11} = 0.9$ $b = 10 - 0.9 \times 11 = 0.1$

$$D_{X/Y} : y = 0.9x + 0.1$$

Rmque : On a $r^2 = a \times a\prime$ alors $r = \sqrt{a \times a\prime}$

9.3.7 Estimation ou prévision

Pour faire une estimation ou une prévision on utilise toujours une équation de droite.
Exemple : Estimé la note en PC d'un éléve qui a 18 en Math.