Inspection d'académie de DAKAR Année scolaire 2022/2023

LYCEE LAMINE GUEYE Terminale S1

M. DIACK

# Série d'exercices sur :
# COURBES PARAMETREES


**Exercice 1**

Etudier et représenter graphiquement les courbes paramétrées suivantes :

1-) $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$, $t \in IR$ ; 2-) $\begin{cases} x(t) = 2 + \sin 2t \\ y(t) = 1 - \sin t \cos t \end{cases}$, $t \in IR$ ; 3-) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$, $t \in IR$ ;

4-) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\sin t}{2+\cos t} \end{cases}$, $t \in IR$ ; 5-) $\begin{cases} x(t) = \tan\frac{t}{2} \\ y(t) = \sin t \end{cases}$, $t \in IR$ ; 6-) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$, $t \in IR$

**Exercice 2**

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le pointMd'affixe $Z = \frac{1}{2}z^2 - z$.L'objet de cet exercice est de tracer la courbe $(\Gamma)$ décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.Soit t un réel dans $[-\pi; \pi]$ et m le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = e^{it}$.

1-)Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}, t \in [-\pi; \pi]$$

2-)Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part , $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que $(\Gamma)$ admet axe de symétrie que l'on précisera.

3-)Etudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ sur $[0; \pi]$ .

4-)Dresser le tableau de variation simultané de x et y sur $[0; \pi]$.

5-)Placer les points de $(\Gamma)$ correspondants aux valeurs $0$ , $\frac{\pi}{3}$ , $\frac{2\pi}{3}$ et $\pi$ du paramètre t et tracer les tangentes en ces points ( on admettra que pour $t = 0$ la tangente à $(\Gamma)$ est horizontale ).Tracer la partie de $(\Gamma)$ obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$ puis tracer $(\Gamma)$ complètement .

**Exercice 3**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .Soit (C) le cercle de centre Oet de rayon 1.A tout point T de (C) , on associe la mesure principale θ de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OT})$ et le projeté orthogonal M du point A(1; 0) sur la tangente en T à (C) .

1-)Montrer que les coordonnées de $M(x(\theta), y(\theta))$ sont :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos^2\theta + \cos\theta + 1 \\ y(\theta) = \sin\theta(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

2-)Etudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$.

3-)On note $(\Gamma)$ la courbe décrite par M lorsque T décrit (C) .

a-)Montrer que $\in (\Gamma)$ . (On admettra que (OA) est la tangente en A à $(\Gamma)$ ).

b-) Tracer $(\Gamma)$ dans le repère.

**Exercice 4** **[La conchoïde de Nicomède]**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ .On considère la droite $(\Delta)$ d'équation $x = 1$ .Une droite (D) variable, passant par O , coupe la droite $(\Delta)$ en A.On note M le point de (D) tel que $AM = 2$ , A étant situé sur le segment [OM] .

La courbe (C) , lieu géométrique des points M lorsque (D)varie , est appelée la **Conchoïde de Nicomède.**

1-)On note t la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ .Montrer que (C) admet une représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases}, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

2-)a-)Vérifier que (C) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ puis tracer la courbe (C) .

**Exercice 5** **[Spiral logarithmique]**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la courbe paramétrée $(\Gamma)$ définie par le système d'équations paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in IR$$

1-)Par quelle transformation passe-t-on de $M(t)$ à $M(t+2\pi)$ et à $M(t-2\pi)$ ?

2-)Etudier les variations $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0; 2\pi]$ et dresser le tableau de variation conjointe.

3-)Construire la courbe représentative de $(\Gamma)$ constituée des points M(t) pour $t \in [0; 2\pi]$

4-)Déduisez-en la partie de la courbe de $(\Gamma)$ constituée des points M(t) pour $t \in [-2\pi; 2\pi]$

5-)Soit $M_t$ le point de $(\Gamma)$ de paramètre t et $\overrightarrow{V_t}$ le vecteur dérivé lui correspondant.

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{V_t})$ est constant.

**Exercice 6**

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal .Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = 1$.On note M le projeté orthogonal de O sur [AB] .On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) des points M lorsque A et B se déplacent chacun sur son axe .

1-)On note (x, y) les coordonnées du point M et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, -\vec{i})$ .

Montrer que (C) est l'ensemble des points M(t) de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \sin^2 t \\ y(t) = \sin t \cos^2 t \end{cases}, t \in IR$$

2-)Pour tout ∈ IR , comparer la position des points :M(t) et $M'(t + 2\pi)$ ; M(t) et $M'(-t)$ ; M(t) et $M'(\pi - t)$ ; M(t) et $M'\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et construire la partie de la courbe de (C) correspondante. Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.

3-)Etudier les variations de x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

4-)Tracer la courbe (C) en précisant les points où la parallèle à l'un des axes ainsi que les tangentes à l'origine.

**Exercice 7** **[Strophoïde de droite ]**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ .On considère le cercle (C) de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation x=1.Une droite variable (D) passant par O coupe le cercle (C) en A et la droite (Δ) en A′ .

On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AA'}$ .La courbe (S) lieu géométrique des points M lorsque (D) est une **strophoïde de droite**.

**Paramétrage N1**

1-On note t la pente de la droite (D).

Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t)=\dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1} \end{cases} \quad t\in IR$$

a-)Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations des fonctions $t\to x(t)$ et $t\to y(t)$ pour $t\in[0,+\infty[$, et construire la courbe S.

2-) Calculer la distance de M à la droite ($\Delta$), puis la limite de cette distance lorsque $t\to+\infty$. Interpréter graphiquement.

**Paramétrage N2**

1) On θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ .Montrer que les cordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta)=-\cos2\theta \\ y(\theta)-\sin2\theta+\tan\theta \end{cases} \quad , \quad \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

(On évaluera l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{IA})$)

2)a)Vérifier que (S) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie .

b) Etudier les variations des fonctions $\theta\longmapsto x(\theta)$ et $\theta\longmapsto y(\theta)$ pour $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ .

c)Construire la courbe (S) dans le repère .

3) Calculer la distance de M à la droite (Δ) puis la limite de cette distance lorsque θ tend vers $+\frac{\pi}{2}$

**<u>Exercice 8</u> [Courbe de Bézier ]**

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ , les trois points A, B et C de coordonnées respectives (1,0), (0,1) et (1,1) .A tout réel $t\in[0,1]$ on asocie le point M(t) , barycentre du système $\{(B,(1-t)^2),(A,2t(1-t)),(C,t^2)\}$ .On note x(t) et y(t) les coordonnées de M(t) , (Γ) l'ensemble des points M(t) lorsque t décrit [0,1] .

1)a)Exprimer en fonction de t les coordonnées x(t) et y(t) de M(t) .

b) Dresser le tableau de variations conjointes de x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$ .

2) Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3) Trouver une relation entre x(t) et y(t) indépendante de t .On calculera y en fonction de x et on posera $y=f(x)$ .La fonction f est-elle dérivable à gauche au point d'abscisse 1 ?

**<u>Exercice 9</u>**

On considère un cercle (C ) de diamètre [OA] et la droite (D ) tangente à (C ) en A. Pour tout point M de (C ) distinct de O , la droite (OM) coupe (D) en Q .Soit P le point défini par $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{PQ}$ .

On se propose de déterminer le lieu géométrique Γ de P lorsque M décrit (C) privé de O.

On pose $OA = 2a$ $(a > 0)$ et on rapporte le plan au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2a}\overrightarrow{OA}$ Soit $\theta$ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

1-)Déterminer les coordonnées de M en fonction de $\theta$ .

2-)En déduire les coordonnées de P en fonction de $\theta$ .

3-)Etudier puis construire courbe $\Gamma$ .

**Exercice 10** **[Cardioïde]**

Le plan est du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.Soit (C ) la courbe paramétrée de représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}, \quad t \in IR$$

1-)En utilisant la parité et la périodicité des fonctions x(t) et y(t) réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétriques de la courbe (C)

2-)Etudier les variations des fonctions x(t) et y(t)

3-)a) Montrer que, si $t \neq \pi$, la droite $\overrightarrow{OM_t}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$ .

b) Déduisez en la tangente au pont $M(\pi)$ de la courbe (C) puis tracer (C).

**Exercice 11** **[cycloïde]**

Soit $(\Phi)$ la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in IR$$

1-)Comparer les coordonnées des points $M(t)$ *et* $M(t + 2\pi)$ et montrer que ces points ce correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile

2-)Etudier les variations de $x(t)$ ; $y(t)$ et calculer le vecteur dérivée $\vec{V}(t)$

3-)On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite $(OM_t)$ admet un vecteur directeur $\vec{u}(t) = \frac{1}{t}(1 - \cos t)\vec{i} + \frac{1}{t}(\sin t)\vec{j}$ .déterminer les limites des coordonnées de $\vec{u}$ et déduisez en la tangente en O à la courbe $(\Phi)$

**Exercice 12**

1-)On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{e^{-x}\cos x}{2+\sin x}$.

f étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ , on pose : $g(x) = e^x f(x)$.

a-)Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ .

b-) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2-)Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe $(\Gamma)$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

a-)Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

b-) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve $(\Gamma)$ et montrer que pour construire $(\Gamma)$ , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} + \pi\right]$.

c-) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe $(\Gamma)$ .