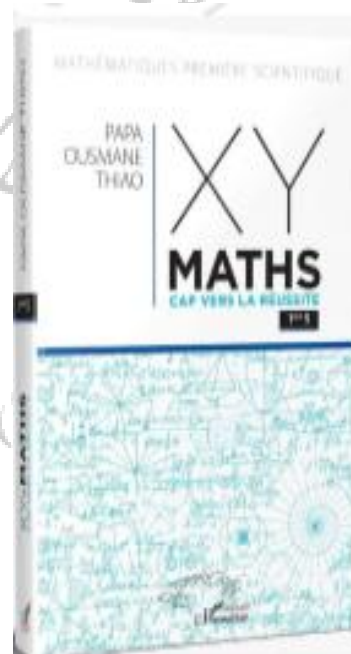
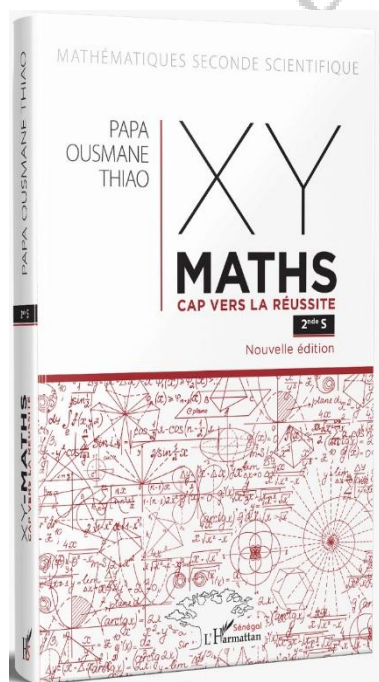


LE MOT DE L'AUTEUR

XY- MATHS cap vers la réussite Terminale S_2

Nous avons repris dans ce manuel de la Terminale S_2 les principes qui avaient guidé la rédaction des deux manuels de seconde et Premier :

XY-MATHS cap vers la réussite 2^{nde}S **XY-MATHS** cap vers la réussite 1^{ere}S.



Nous avons construit chacun des chapitres selon une structure simple.

⇒ Un cours clair et détaillé où l'essentiel est donné (définition, remarques, théorèmes, propriétés)

Extrait du Manuel Pédagogique **XY-MATHS** caps vers la réussite
Terminale S_2 de M. THIAO Professeur au lycée de Bambey

Nos contacts : **77 360 32 35 / 76299 00 99**

- ⇒ A la fin de chaque sous-titre du cours ; des exercices d'applications résolus pour appliquer le cours.
- ⇒ Une série d'exercices est proposée pour chaque cours pour mettre en application les méthodes étudiées.

Nous espérons que ce manuel sera bien accueilli et qu'il rendra à ses utilisateurs, apprenants et enseignants, les services qu'ils peuvent en attendre.

Nous accueillerons avec intérêt toutes les remarques et observations qu'ils voudront bien nous adresser au
77 360 32 35 (WhatsApp)

Nos livres sont disponibles à la librairie harmattan Sénégal

**Plus d'infos adresser au
77 360 32 35 // 33 825 98 58**



FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Ce que dit le programme.....

Contenus	Commentaires	Compétences exigibles
• Fonction logarithme népérien : Ensemble de définition, propriétés algébriques, continuité, limites, dérivée, représentation graphique. • Fonction exponentielle: ensemble de définition, propriétés algébriques, continuité, limites, dérivée, primitive, représentation graphique.	• La fonction logarithme népérien, noté $\ln$, est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $[x \mapsto \frac{1}{x}]$ qui s'annule en 1. En liaison avec la physique, on introduira le logarithme décimal, noté $\log$. • La fonction exponentielle est définie comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, et sera notée $[x \mapsto \exp(x)]$. On démontrera aussi que : $\exp(x) = e^x$ • On s'intéressera aux limites usuelles ci dessous : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, α étant un rationnel strictement positif	• Connaitre et utiliser les limites (a est un rationnel strictement positif) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ n est un entier naturel non nul • Déterminer les primitives des fonctions du type $(\exp \circ f)f'$; $\frac{f'}{f}$

APERÇU HISTORIQUE

En 1614, un mathématicien écossais, **John Napier** (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de Neper publie « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, Neper présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « **logos** » (logique) et « **arithmos** » (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais Henri Briggs (1561 ; 1630) et William Oughtred (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

John Napier

Parfois francisé en **Jean Neper**, né le 1^{er} février 1550 et mort le 4 avril 1617, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. En 1614, il publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*.



A. FONCTION LOGARITHME

Préambule

Il existe plusieurs **fonctions logarithmes**. Les plus connues sont **la fonction logarithme népérien** et **la fonction logarithme décimal**.

- la fonction logarithme népérien est utilisée en mathématiques
- la fonction logarithme décimal permet de manipuler les puissances de 10 est surtout utilisée en sciences physiques, et plus particulièrement en chimie.

Il existe plusieurs façons d'introduire en mathématiques la notion de **fonction logarithme népérien** :

- Une première façon est de la définir comme l'unique primitive de la fonction inverse s'annulant en 1.
- Une deuxième façon est de définir cette fonction comme la **fonction réciproque** de la **fonction exponentielle**.

Nous choisissons dans ce cours d'introduire le **logarithme népérien** en tant que l'unique primitive de la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ s'annulant en 1

I. LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1.1 DEFINITION

Définition

On appelle fonction logarithme népérien noté $\ln$ la primitive de la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$.

On écrit pour tout x réel strictement positif ($x \in \mathbb{R}^*$) : **$\ln(x)$ ou $\ln x$**

Conséquences

- ♦ $\ln 1 = 0$
- ♦ La fonction $\ln x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- ♦ $\forall x \in]0 ; +\infty[; \frac{1}{x} > 0$ ainsi $(\ln x)' > 0$ par conséquent $\ln x$ est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$

1.2 PROPRIETES ALGEBRIQUES DE LA FONCTION $\ln$

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$



PREUVES

Soit a un réel non nul positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln ax - \ln x$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[; f$ est dérivable et $f'(x) = a \times \left(\frac{1}{ax}\right) - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$f'(x) = 0$ alors f est une fonction constante,

de plus $f(1) = \ln a(1) - \ln(1) = \ln a$ alors $f(x) = \ln a$

$$f(x) = \ln ax - \ln x = \ln a \quad \text{ainsi} \quad \ln ax = \ln x + \ln a$$

Remarque :

Cette propriété se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, ... n facteurs : $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln|a_1| + \ln|a_2| + \dots + \ln|a_n|$
Elle sert dans les deux sens.



Exemples :

- $\ln(3) + \ln(4) + \ln(2) = \ln(3 \times 4 \times 2) = \ln 24$
- $\ln(2x) + \ln(x) = \ln(2x \times x) = \ln(2x^2)$; pour $x > 0$

Conséquences de la propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\clubsuit \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\clubsuit \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\clubsuit \ln a^r = r \ln a$$

$$\clubsuit \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

PREUVES

$$\clubsuit \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, a \times \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \text{ d'où } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\clubsuit \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \text{d'où } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\clubsuit \ln a^r = r \ln a$$

$$\rightarrow \text{Pour } r = 0, \ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \ln(a)$$

$$\rightarrow \text{Pour } r > 0, \text{ d'après la propriété fondamentale}$$

$$\ln a^2 = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2 \ln(a)$$

$$\text{De même ; } \ln a^3 = \ln(a \times a^2) = \ln a + \ln a^2 = \ln a + 2 \ln a = 3 \ln(a)$$

$$\dots \text{ de proche en proche, on a :}$$

$$\ln a^r = \ln(a \times a^{r-1}) = \ln a + \ln a^{r-1} = \ln a + (r-1) \ln a = r \ln(a)$$

$$\rightarrow \text{Pour } r < 0, \text{ on note } p \text{ l'entier tel que } p = -r$$

$$\text{On a : } \ln(a^r) = \ln(a^{-p}) = \ln\left(\frac{1}{a^p}\right) = -\ln(a^p) = -p \ln(a) = r \ln a$$

1.3 ETUDE DE LA FONCTION $\ln x$

1.3.1 DERIVEE ET VARIATIONS

PROPRIETE:

La fonction $\ln$ est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$

Pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{x}$

Or $\forall x \in]0 ; +\infty[; \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ d'où f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

COROLLAIRES (Immédiats)

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } x > 0$$

$$\clubsuit \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\clubsuit \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\clubsuit \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\clubsuit \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

Ces corollaires permettent de résoudre des équations et des inéquations.

Travaux dirigés

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$(E_1) : \ln(-2x + 1) = 0$$

$$(E_2) : \ln(-x) + \ln(x + 3) = 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(I_1) : \ln(x^2 + 2x - 3) \geq 0$$

$$(I_2) : \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$$

Résolution

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

On désigne par D l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par S son ensemble de solutions.

$$(E_1) : \ln(-2x + 1) = 0$$

$$\text{On a : } D = \{x \in \mathbb{R} / -2x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{1}{2}\} =]-\infty; \frac{1}{2}[$$

Pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$; on a :

$$\ln(-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$0 \in D \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \{0\}$$

$$(E_2) : \ln(-x) + \ln(x + 3) = 0$$

$$\text{On a : } D = \left\{x \in \mathbb{R} / \begin{cases} -x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \begin{cases} x < 0 \\ x > -3 \end{cases}\right\} =]-3; 0[$$

Pour tout $x \in]-3; 0[$; on a :

$$\ln(-x) + \ln(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x(x + 3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow -x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \cong -0.38 \quad ; \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \cong -2.61$$

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \in D \quad ; \quad \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \in D$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$(I_1) : \ln(x^2 + 2x - 4) \geq 0$$

$$\text{On a } D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 3 > 0\}$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Ainsi } D = x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in D ; : \ln(x^2 + 2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{5} \quad ; \quad x_2 = -1 + \sqrt{5}$$

X	$-\infty$	$-1 - \sqrt{5}$	$-1 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 4$	+	0	0	+

$x \in S_{\mathbb{R}} \quad (x \in]-\infty; -1 - \sqrt{5}] \cup [-1 + \sqrt{5}; +\infty[)$

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -1 - \sqrt{5}] \cup [-1 + \sqrt{5}; +\infty[$$

$$(I_2) : \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$$

$$\text{On a: } D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x-1} > 0 \right\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Ainsi } D = x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{Pour tout } x \in D; \therefore \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 0$$

Le signe de $\frac{2}{x-1}$ sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ est celui de $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$\frac{2}{x-1}$	-		+

$$x \in S_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (x \in]1; +\infty[) \cap (x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[)$$

$$S_{\mathbb{R}} =]1; +\infty[$$

1.3.2 LIMITES FONDAMENTALES

Limites aux bornes

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



PREUVES

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

La fonction f définie par $f(x) = \ln x$ est *continue, strictement croissante* sur $]0; +\infty[$ et *non majorée* sur $]0; +\infty[$ donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Effectuons un changement de variable

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$x \rightarrow 0^+ \text{ alors } X \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Interprétons :

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ alors la droite $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $C_{(\ln x)}$ à droite de 0

POINT MÉTHODE

Si $u(x)$ une fonction telle que $u(x) > 0$ en x_0 ou au borne (gauche ou droite) de x_0 de plus si :

$$\heartsuit \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(u(x)) = +\infty$$

$$\heartsuit \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0^+ \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(u(x)) = -\infty$$

Travaux dirigés

Calculer la limite suivante :

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt{x}$$

Résolution

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt{x}$$

Limites de croissance comparée

Les fonctions puissances croissent plus vite que la fonction $\ln$ aussi bien au voisinage de 0 qu'en $+\infty$.

La fonction $\ln$ est une « fonction à croissance lente »

♣ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

♣ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$, (pour tout $n \geq 1$)

♣ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$

♣ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^-$, (pour tout $n \geq 1$)


PREUVES

♣ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Étude de cas

Soit la fonction $h(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$

a) Déterminer le signe de h sur $]0; +\infty[$

b) En déduire que $\forall x \in]1; +\infty[, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ puis interpréter.

Résolution

a) Déterminons le signe de h sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, h \text{ est dérivable et } h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$h'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}, \forall x \in]0; +\infty[\text{ le signe } h' \text{ est le signe de } 1 - \sqrt{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, h(x) < 0$ car h est majorée par -2

b) Déduisons que $\forall x \in]1; +\infty[, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

On a $\forall x \in]1; +\infty[, h(x) < 0$

$$\ln x - 2\sqrt{x} < 0 \Rightarrow \ln x < 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} < \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

De plus $\forall x \in]1; +\infty[; \ln x > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} \quad (2)$$

De (1) et (2) on a $\forall x \in]0; +\infty[, \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) Dédisons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On a $\forall x \in]1; +\infty[, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ de plus

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Interprétons :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ alors la courbe $C_{(\ln x)}$

admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x \times x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}} \right) = 0 \times 0 = 0$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

Effectuons un changement de variable

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{X}$$

$x \rightarrow 0^+$ alors $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = -\infty$$

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{n-1} \times x \ln x) = 0 \times 0 = 0$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

POINT MÉTHODE

Si $u(x)$ une fonction telle que $u(x) > 0$ en x_0 ou au borne (gauche ou droite) de x_0 de plus si :

$$\heartsuit x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(u(x))}{u(x)} = 0$$

$$\heartsuit x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(u(x))}{(u(x))^n} = 0$$

$$\heartsuit x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0^+ \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \ln(u(x)) = 0^-$$

$$\heartsuit x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^n \ln(u(x)) = 0^-$$

Travaux dirigés

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^3 \ln x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 - 3x + 1) - 3x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^3(x) + 5x - x^2)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \ln(x+1)$$

Résolution

Calculons les limites suivantes :

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^3 \ln x}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0^-$, par quotient de limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^3 \ln x} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})^2 \ln^2(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(x))^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) = 0$

d) **$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x + \ln x} = 1$

e) **$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

Par produit de limites de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

f) **$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 - 3x + 1) - 3x)$**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 - 3x + 1) - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\frac{\ln(x^2 - 3x + 1)}{x} - 3 \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\frac{\ln\left(x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} - 3 \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 3 \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 3 \right) \right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 3 \right) = -3$

Par produit de limites de fonctions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 3 \right) \right) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 - 3x + 1) - 3x) = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^3(x) + 5x - x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^3(x) + 5x - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(\frac{\ln^3(x)}{x^2} + \frac{5}{x} - 1 \right) \right)$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2}$; posons $x = t^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{\ln^3(x)}{x^2} = \frac{\left(\ln \left(t^{\frac{3}{2}} \right) \right)^3}{\left(t^{\frac{3}{2}} \right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2} \ln t \right)^3}{t^3} = \frac{27}{8} \left(\frac{\ln t}{t} \right)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{27}{8} \left(\frac{\ln t}{t} \right)^3 = 0$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^3(x)}{x^2} + \frac{5}{x} - 1 \right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Par produit de limites de fonctions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(\frac{\ln^3(x)}{x^2} + \frac{5}{x} - 1 \right) \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^3(x) + 5x - x^2) = -\infty$$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2 \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0^-$ ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} = -\infty ; \text{ par produit de limites de fonctions}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x} = -\infty$$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x}$

❖ MÉTHODE 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x} \right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 0$ par produit de limites de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} \right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} = 0$$

❖ **MÉTHODE 2**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + 1 = 2 \text{ par produit de}$$

limites de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) = 0 \times 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x} = 0$$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \ln(x + 1)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty$; forme indéterminé

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln(x + 1)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln(x + 1)}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \frac{x + 1}{x} \right) \right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$ d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \frac{x + 1}{x} \right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ par produit de limites de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \frac{x + 1}{x} \right) \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \ln(x + 1) = -\infty$$

Limites et nombre dérivé

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\clubsuit \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$



PREUVES

Cela découle de la dérivée de $\ln x$ en 1, en effet, on a :

$$(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\clubsuit \quad (\ln)'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\clubsuit \quad (\ln)'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

POINT MÉTHODE

Si $u(x)$ une fonction telle que $u(x) > 0$ en x_0 ou au borne (gauche ou droite) de x_0 de plus si :

$$\heartsuit \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 1 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(u(x))}{u(x)-1} = 1$$

$$\heartsuit \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\heartsuit \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-u(x))}{u(x)} = -1$$

Travaux dirigés

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(5x + 1)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{5}{x}\right)$$

Calculons les limites suivant

Résolution

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} \times \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} \times \frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)} \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \text{ par}$$

$$\text{produit de limites de fonctions } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)-1} \times \frac{\cos(x)-1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(5x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(2x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x + 1) = 0$$

On a une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(5x + 1)} = \frac{\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{2x^2 + x} \times (2x^2 + x)}{\frac{\ln(5x + 1)}{5x} \times (5x)} = \frac{\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{2x^2 + x}}{\frac{\ln(5x + 1)}{5x}} \times \frac{2x^2 + x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{2x^2 + x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x + 1)}{5x} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{5} = \frac{1}{5} \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{2x^2 + x}}{\frac{\ln(5x + 1)}{5x}} \times \frac{2x^2 + x}{5x} \right) = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{\ln(5x + 1)} = \frac{1}{5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{5}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{5}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

On a une forme indéterminée " $+\infty \times 0$ "

Levons l'indétermination :

$$\text{Posons } t = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5}{t}$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ alors } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{5}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{t} \ln(1 - t) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \times \frac{\ln(1 - t)}{t} = 5(-1) = -5 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{5}{x} \right) = -5$$

1.3.3 TABLEAU DE VARIATION $\ln$

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)			+	
f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

La fonction $\ln$ est **continue strictement croissante** sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) =]-\infty; +\infty[$, le réel 1 a un antécédent noté **e** $\ln(e) = 1$

Comme le nombre π , le nombre e est un nombre d'une importance fondamentale en mathématiques. Le nombre e est **la base du logarithme népérien**.

Cette valeur de e (*le nombre népérien*) vaut approximativement **2,72**.

1.3.4 CONVEXITÉ

Convexité

$\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$\ln'$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \ln''(x) < 0$ par conséquent **$\ln$ est concave** sur son ensemble de définition

Remarque :

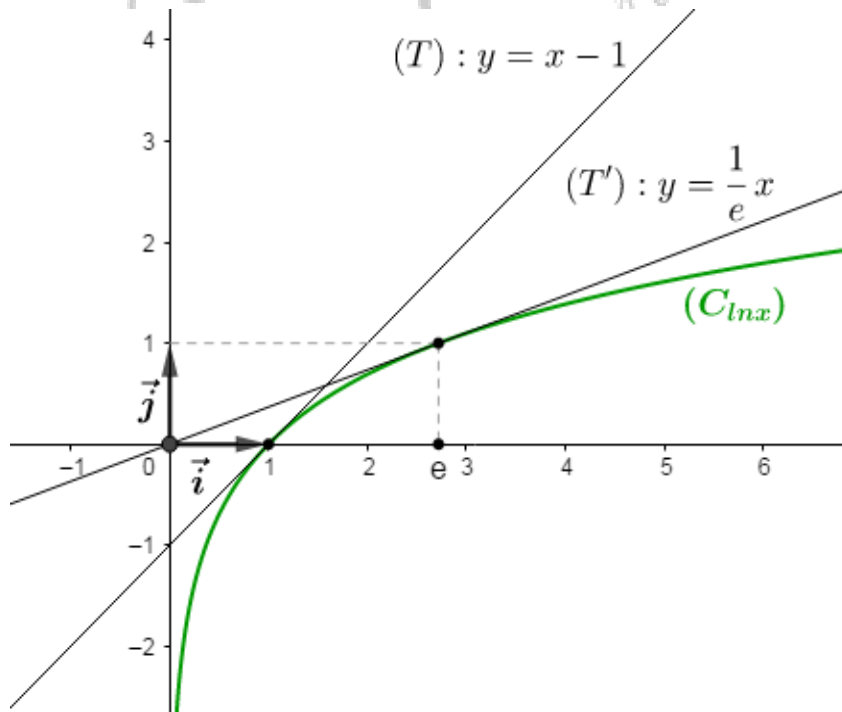
On peut en déduire que la courbe représentative de $\ln$ est toujours en dessous de ses tangentes

1.3.5 COURBE REPRÉSENTATIVE

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (C_f) la représentation graphique de la fonction logarithme népérien f telle que $f(x) = \ln x$

— L'équation réduite de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 est $y = x - 1$;

— La tangente (T') à (C_f) au point d'abscisse e , a pour équation $y = \frac{1}{e}x$ elle passe donc par l'origine du repère.



1.3.6 ETUDE D'EXEMPLES DE FONCTIONS DE TYPE : $x \mapsto \ln(x)$

Exemple : 1

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1) a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par $g(x) = x - 1 + \ln x$
- b) vérifier que $g(1) = 0$, en déduire suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- b) En déduire les variations de f .
- c) Étudier les limites de f en 0 puis en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.
- d) Dresser le tableau de variation de f .
- e) Tracer (C_f) .

Résolution

1) a) Etudions le sens de variation de la fonction g définie par $g(x) = x - 1 + \ln x$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, g est dérivable par somme de somme de fonctions dérivable et $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $1 + \frac{1}{x} > 0$ ainsi $g'(x) > 0$ d'où g est strictement croissante $]0 ; +\infty[$

b) vérifions que $g(1) = 0$,

$$g(1) = (1) - 1 + \ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$g(1) = 0$$

Déduisons suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

On a $\forall x \in]0 ; +\infty[$ g est strictement croissante et $g(1) = 0$

Alors

- Sur $]0 ; 1[$; $g(x) < 0$
- Sur $]1 ; +\infty[$; $g(x) > 0$
- Pour $x = 1$; $g(x) = 0$

2) a) Montrons que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$ $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$ est dérivable comme étant produit de fonction dérivable et

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)' (\ln x) + \left(\frac{x-1}{x}\right) (\ln x)' \\
 &= \left(\frac{x - (x-1)}{x^2}\right) (\ln x) + \left(\frac{x-1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{x^2}\right) (\ln x) + \left(\frac{x-1}{x^2}\right) \\
 &= \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) + \left(\frac{x-1}{x^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Dédoublons les variations de f.

On a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$ ainsi

- Sur $]0; 1[; f'(x) < 0$
- Sur $]1; +\infty[; f'(x) > 0$
- Pour $x = 1; f'(x) = 0$

c) Étudions les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = -\infty \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

❖ Interprétons :

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C_f) à droite de 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

❖ Interprétons :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; calculons

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{x} \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} \ln x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

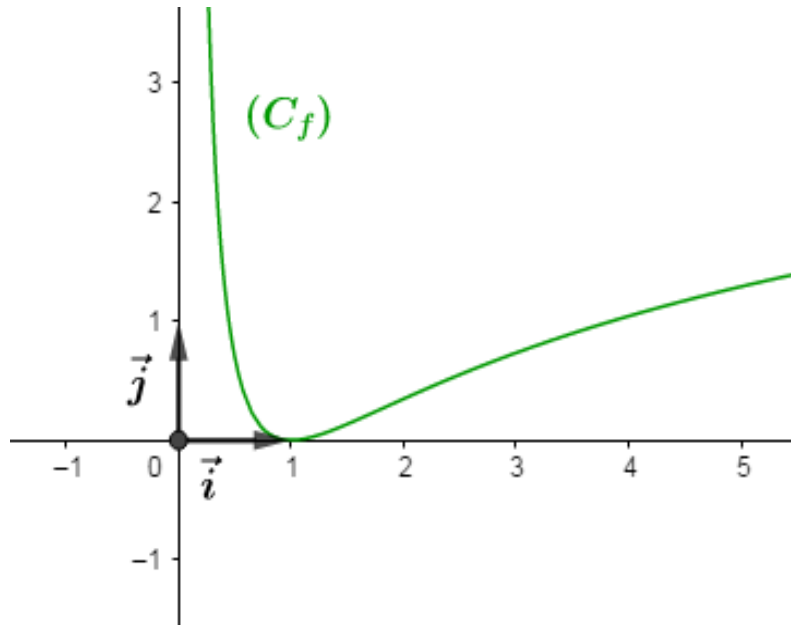
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

d) Dressons le tableau de variation de f.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	0	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

e) Traçons (C_f) .



Exemple : 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$

- 1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2) Déterminer pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$.
- 3) On note u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x + 2 + 2 \ln x$
 - a) Déterminer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $u'(x)$, en déduire les variations de u .
 - b) Déterminer la limite de u en 0 et $+\infty$.
 - c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur $]0; +\infty[$
 - d) En déduire le signe de $u(x)$.
 - e) Montrer que $\alpha \in]0; 1[$, en déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
 - f) Justifier que $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}$
- 4) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
 b) En déduire les variations de f .
 c) Dresser le tableau de variation de f .
 d) Tracer (C_f)

Résolution

1) Déterminons les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x+2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Interprétons graphiquement :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; calculons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x \ln x}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+2} \right) = 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

2) Déterminons pour tout x de $]0; +\infty[$; $f'(x)$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$, f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \ln x}{x+2} \right)' = \frac{\left(\ln x + x \left(\frac{1}{x} \right) \right)(x+2) - x \ln x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(\ln x + 1)(x+2) - x \ln x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x \ln x + 2 \ln x + x + 2 - x \ln x}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x + 2 + 2 \ln x}{(x+2)^2}$$

3) u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x + 2 + 2 \ln x$

a) Déterminons, pour tout x de $]0; +\infty[$, $u'(x)$, en déduire les variations de u .

Pour tout x de $]0; +\infty[$, u est dérivable comme étant la somme de fonctions

$$\text{dérivable et } u'(x) = 1 + 2 \left(\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{2}{x}$$

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $1 + \frac{2}{x} > 0$ d'où $u'(x) > 0$ par conséquent la fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Déterminons la limite de u en 0 et $+\infty$.

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 + 2\ln x = 0 + 2 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 + 2\ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$$

c) Montrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur $]0; +\infty[$ u est continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ vers $] -\infty; +\infty[$, d'après le théorème de la bijection l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution

d) Déduisons le signe de $u(x)$.

On a $\forall x \in]0; +\infty[$ u est strictement croissante et $u(\alpha) = 0$

Alors

- Sur $]0; \alpha[$; $u(x) < 0$
- Sur $]\alpha; +\infty[$; $u(x) > 0$
- Pour $x = \alpha$; $u(x) = 0$

e) Montrons que $\alpha \in]0; 1[$, en déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

$\diamond$ Montrons que $\alpha \in]0; 1[$

On a $u(]0; 1[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x); \lim_{x \rightarrow 1} u(x)[=]-\infty; 3[$

$0 \in]-\infty; 3[$ donc $\alpha \in]0; 1[$

$\diamond$ Déduisons un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

Par la méthode de Balayage on déduit que $u(0.3) \times u(0.4) < 0$

alors $\alpha \in]0.3; 0.4[$

f) Justifions que $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}$

On a $u(\alpha) = \alpha + 2 + 2\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -\frac{\alpha+2}{2}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha + 2} = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \ln \alpha = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \left(-\frac{\alpha+2}{2} \right) = -\frac{\alpha}{2}$$

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2}$$

4) a) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x + 2 + 2\ln x}{(x+2)^2} = \frac{u(x)}{(x+2)^2}$$

b) Déduisons les variations de f .

On a $f'(x) = \frac{u(x)}{(x+2)^2}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$ car $\forall x \in$

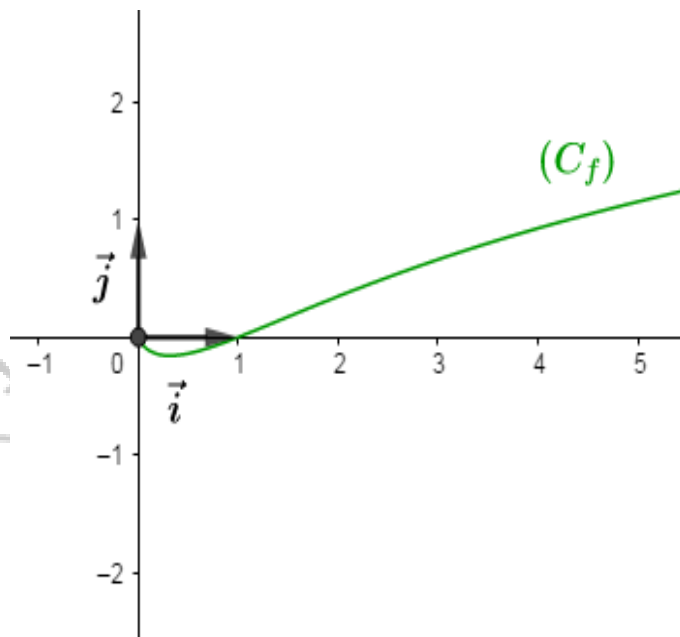
$]0; +\infty[, (x+2)^2 > 0$ ainsi

- Sur $]0; \alpha[$; $f'(x) < 0$
- Sur $]\alpha; +\infty[$; $f'(x) > 0$
- Pour $x = \alpha$; $f'(x) = 0$

c) Dressons le tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	0	$\frac{-\alpha}{2}$	$+\infty$

d) Traçons (C_f)



Exemple : 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie A

1) Montrer que : $Df =]0; e[\cup]e; +\infty[$

2) a) calculer : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.

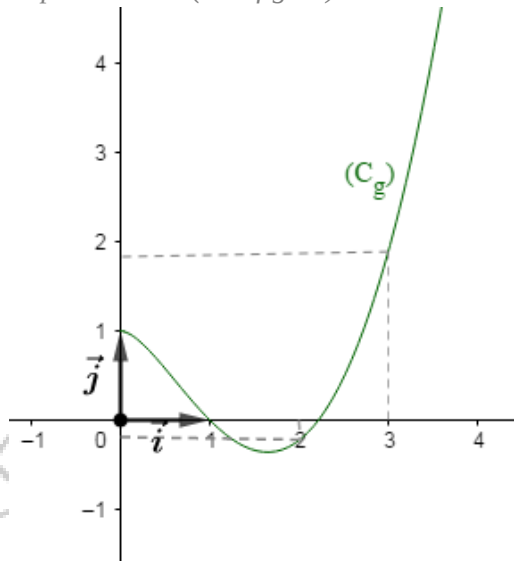
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; interpréter géométriquement le résultat.

- 3) a) Montrer que $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$
 b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et croissante les intervalles $[1 ; e[$ et $]e ; +\infty[$.
 c) Dresser le tableau de variation de f sur D_f .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$ et C_g sa courbe représentative (voir figure)



- 1) a) déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 b) On donne le tableau de valeur suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que : $2.2 < \alpha < 2.3$

- 2) a) vérifier que $(\forall x \in D_f) ; f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$
 b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisse 1 et α .
 c) Déterminer à partir de (C_g) , le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; \alpha[$ puis montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1 ; \alpha[$.
 3) Tracer la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Résolution
Partie A

1) Montrons que : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq e\} \end{aligned}$$

$$D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$$

2) a) Calculons : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) ?$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{1 - \ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ par produit de limite}$$

$$\text{de fonctions } \lim_{x \rightarrow e^+} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) = \frac{1}{e} \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow e^-} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) ?$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{1 - \ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ par produit de limite}$$

$$\text{de fonctions } \lim_{x \rightarrow e^-} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) = \frac{1}{e} \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$$

• Interprétons

On a : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$, alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = e$.

b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) ?$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \ln x} = 0 \text{ par produit de limite de}$$

$$\text{fonctions } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \ln x} \right) = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

• Déduisons que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0^+$, par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

- **Interprétons**

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3) a) Montrons que $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$

f est dérivable sur D_f et pour tout x de D_f , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x(1 - \ln x)} \right)' = \frac{-(x(1 - \ln x))'}{x^2(1 - \ln x)^2} \\ &= -\frac{1 - \ln x - 1}{x^2(1 - \ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

b) Montrons que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et croissante les intervalles $[1 ; e[$ et $]e ; +\infty[$.

Le signe de $f'(x)$ sur D_f

$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$ est le même signe que celui de $\ln x$ car $(\forall x \in D_f)$

$$x^2(1 - \ln x)^2 > 0$$

On a :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+

— Sur l'intervalle $]0 ; 1]$; $f'(x) \leq 0$ donc f est croissante

— Sur les intervalles $[1 ; e[$ et $]e ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur chacune des deux intervalles

c) Dressons le tableau de variation de f sur D_f .

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$ 0

Partie B

1) a) déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Graphiquement la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en deux points différents par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions distinctes dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

b) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que :
 $2.2 < \alpha < 2.3$

$$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$$

Les fonctions $x \mapsto 1$; $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto 1 - \ln x$ sont continues sur $]0 ; +\infty[$ par conséquent g continue sur $]0 ; +\infty[$ en particulier sur $[2.2 ; 2.3]$ de plus $g(2.2) \times g(2.3) < 0$ d'après le T.V.I l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que $2.2 < \alpha < 2.3$

2) a) vérifions que $(\forall x \in D_f) ; f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$

Calculons : $f(x) - x$

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x = \frac{1 - x^2 + x^2 \ln x}{x(1 - \ln x)} = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)}$$

Or $1 - x^2(1 - \ln x) = g(x)$ ainsi $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

b) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisse 1 et α .

La droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux points d'abscisses solutions de $f(x) - x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or $g(x) = 0$ admet deux solutions 1 et α par conséquent la courbe (C_f) coupe la droite $(\Delta): y = x$ aux points d'abscisses 1 et α .

c) Déterminons à partir de (C_g) , le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$

Graphiquement $\forall x \in [1 ; \alpha] ; g(x) \leq 0$

Montrons que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1 ; \alpha]$

$$f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

Étudions le signe de $x(1 - \ln x)$ pour tout x de $[1 ; \alpha]$

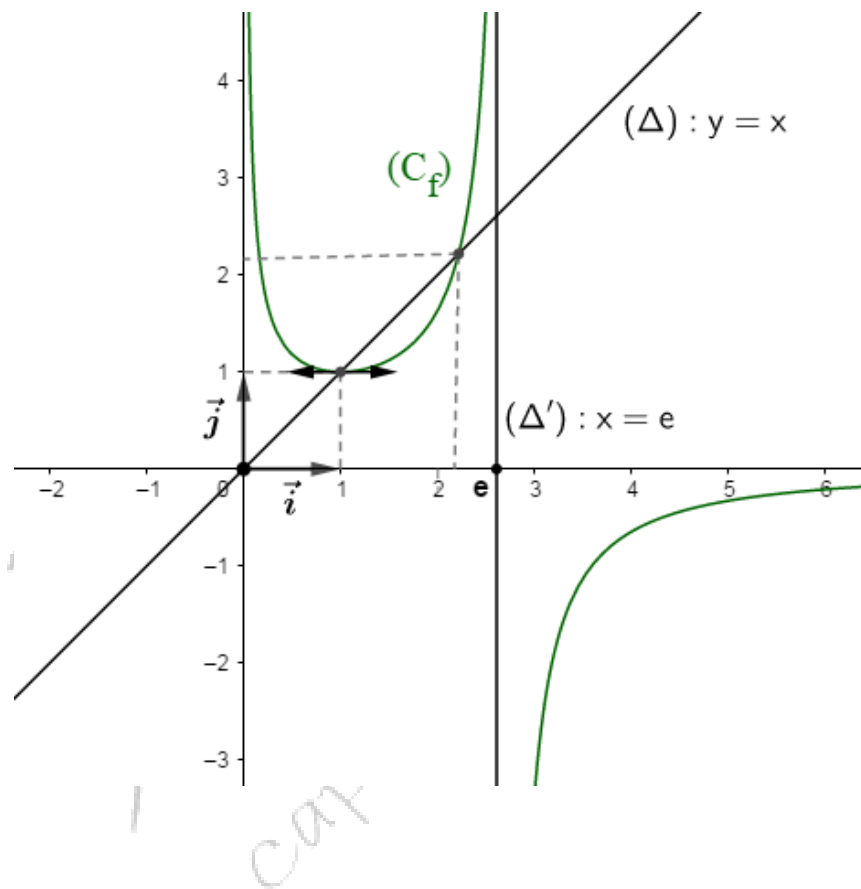
$$\begin{aligned} x \in [1 ; \alpha] &\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln \alpha \\ &\Leftrightarrow -\ln \alpha \leq -\ln x \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln \alpha \leq 1 - \ln x \leq 1$$

Or $1 - \ln \alpha > 0$ donc $\forall x \in [1; \alpha]$; $1 - \ln x > 0$ d'où
 $x(1 - \ln x) > 0$ de plus $\forall x \in [1; \alpha]$; $g(x) \leq 0$ ainsi

$\forall x \in [1; \alpha]$, $\frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0$ d'où $f(x) - x \leq 0$

3) Traçons la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$



1.4 FONCTION COMPOSÉE AVEC $\ln$: $\ln(u(x))$

1.4.1 ENSEMBLE DE DÉFINITION DE $\ln(u(x))$

Propriété :

Soit $u(x)$ une fonction numérique alors la fonction composée $\ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$ (l'intervalle solution de l'inéquation $u(x) > 0$)

Travaux dirigés

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition

$$f_1: x \mapsto \ln(-3x + 2)$$

$$f_2: x \mapsto \ln(-x^2 + 1)$$

$$f_3: x \mapsto \ln\sqrt{-2x + 1}$$

$$f_4: x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{-x+1}{x-2}\right)$$

$$f_5: x \mapsto \frac{\ln(-x^2 + 4)}{x}$$

$$f_6: x \mapsto \ln|x - 2| + \ln x$$

$$f_7: x \mapsto \ln(\ln x)$$

$$f_8: x \mapsto \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

1.4.2 LIMITES ET FONCTION COMPOSÉE $\ln(u(x))$

Propriété :

Soit la fonction composée $\ln(u(x))$ définie sur un intervalle I ; x_0 une borne (finie ou infinie) de l'intervalle I , on a si :

$$\heartsuit \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(u(x)) = +\infty$$

$$\heartsuit \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(u(x)) = -\infty$$

$$\heartsuit \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = b \text{ (} \in \mathbb{R}_+^* \text{)} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(u(x)) = +\infty$$

Travaux dirigés

Résolution

1.4.3 DÉRIVÉES – PRIMITIVES

1.4.3.1 Dérivées de la fonction composée $\ln(u(x))$

La dérivabilité des fonctions composées permet d'obtenir la propriété suivante

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$; $u(x) > 0$ alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est aussi dérivable sur I et $(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.



PREUVES

La fonction u est dérivable sur I . Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, la fonction la fonction $x \mapsto \ln(u(x)) = \ln \circ u(x)$ est dérivable sur I par composition de plus ;

$$(\forall x \in I) : (\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque :

On pourra retenir que si $u > 0$, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

POINT MÉTHODE

♥ Si $u(x)$ une fonction rationnelle telle que $u(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ définie et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{A'B - B'A}{AB}$$

♥ Si $u(x)$ une fonction rationnelle telle que $u(x) = \frac{1}{A(x)}$ définie et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{A}\right)$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{-A'}{A}$$

Travaux dirigés

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée

$$f : x \mapsto \ln(-2x^2 + 1)$$

$$g : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$$

$$h : x \mapsto \ln\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$$

Résolution

Déterminons la fonction dérivée des fonctions :

♦ $f : x \mapsto \ln(-2x^2 + 1)$

On a : $D_f = \left] -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$

Pour tout $x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$, la fonction $x \mapsto -2x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive par conséquent $\forall x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$, la fonction f est

dérivable et $f'(x) = \frac{(-2x^2+1)'}{-2x^2+1} = \frac{-4x}{-2x^2+1} = \frac{4x}{2x^2-1}$

$f'(x) = \frac{4x}{2x^2-1}$

♦ $g : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$

On a : $D_g =]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

Pour tout $x \in]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est dérivable et strictement positive par conséquent ;

$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, la fonction g est dérivable et

$g'(x) = \frac{(x^2-3x+2)'}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

♦ $h : x \mapsto \ln\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)$

On a : $D_h =]-\infty ; -1[\cup \left] \frac{1}{3} ; +\infty \right[$

Pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup \left] \frac{1}{3} ; +\infty \right[$, la fonction $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$ est dérivable et strictement positive par conséquent

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup \left] \frac{1}{3} ; +\infty \right[$, la fonction f est dérivable et

$h'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1)}{(3x-1)(x+1)} = \frac{4}{(3x-1)(x+1)}$

$f'(x) = \frac{4}{(3x-1)(x+1)}$

1.4.3.2 Dérivées de la fonction composée $\ln|u(x)|$

Propriété :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I sur le quel elle ne s'annule pas, alors la fonction $x \mapsto \ln|u|$ est aussi dérivable sur I et :

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

**PREUVES**

La fonction u étant une fonction numérique,

$$(\ln|u|) = \frac{1}{2}(\ln|u|^2) = \frac{1}{2}\ln(u)^2$$

$$(\ln|u|)' = \frac{1}{2} \times (\ln(u)^2)' = \frac{1}{2} \times \frac{(u^2)'}{u^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times u' \times u}{u^2} = \frac{u'}{u} \text{ d'où}$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{N.B. : } \left(\ln \left| \frac{A}{B} \right| \right)' = \frac{A'B - B'A}{AB}$$

Travaux dirigés

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée

$$f : x \mapsto \ln|-2x + 1|$$

$$g : x \mapsto \ln \left| \frac{3x}{x+1} \right|$$

Résolution

Déterminons la fonction dérivée des fonctions f et g

$$\blacklozenge f : x \mapsto \ln|-2x + 1|$$

$$\text{On a : } D_f = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

Pour tout $x \in \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$, la fonction $x \mapsto -2x + 1$ est

dérivable et non nul par conséquent $\forall x \in \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$

$$f(x) \text{ dérivable et } f'(x) = \frac{(-2x+1)'}{-2x+1} = \frac{-2}{-2x+1} = \frac{2}{2x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$$

$$\blacklozenge g : x \mapsto \ln \left| \frac{3x}{x+1} \right|$$

$$\text{On a : } D_g = \left] -\infty ; -1 \right[\cup \left] -1 ; 0 \right[\cup \left] 0 ; +\infty \right[$$

Pour tout $x \in \left] -\infty ; -1 \right[\cup \left] -1 ; 0 \right[\cup \left] 0 ; +\infty \right[$, la fonction

$x \mapsto \frac{3x}{x+1}$ est dérivable et non nul par conséquent

$\forall x \in \left] -\infty ; -1 \right[\cup \left] -1 ; 0 \right[\cup \left] 0 ; +\infty \right[$ $g(x)$ dérivable et

$$g'(x) = \frac{3(x+1)' - (3x)}{3x(x+1)} = \frac{1}{x^2 + x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

1.4.3.3 Recherche de Primitives comportant $\ln$

Les dérivées des fonctions $\ln|u|$ permettent de déterminer les primitives comportant la fonction $\ln$.

Propriété :

Si u une fonction dérivable sur un intervalle I sur le quel elle ne s'annule pas, la fonction $x \mapsto \frac{u'}{u}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln|u| + C$ (avec $c \in \mathbb{R}$)

Remarque :

Pour écrire la fonction primitive $x \mapsto \ln|u| + C$ sans les symboles de valeur absolue on étudie le signe de u sur l'intervalle I et si sur I :

- La fonction u **strictement positive** alors $x \mapsto \ln(u) + C$
- La fonction u **strictement négative** alors $x \mapsto \ln(-u) + C$

Travaux dirigés

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, déterminer les primitives de f

Résolution

Déterminons les primitives de f

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

— La fonction f est continue sur les intervalles $] -\infty ; -1[$; $] -1 ; 1[$ et $] 1 ; +\infty[$; elle admet donc des primitives sur chacun de ces intervalles

— La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; (x^2 - 1)' = 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} ; f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} (\ln|x^2 - 1|)'$$

Par conséquent :

— Sur les intervalles $] -\infty ; -1[$ et $] 1 ; +\infty[$; une primitive de f est

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C \text{ (avec } C \in \mathbb{R})$$

— Sur l'intervalle $] -1 ; 1[$; une primitive de f est

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(-x^2 + 1) + C \text{ (avec } C \in \mathbb{R})$$

1.4.4 VARIATION DE LA FONCTION COMPOSÉE $\ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que u est strictement positive sur I . Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ a le même sens de variation que la fonction u sur I .



PREUVES

♣ **1er cas** : u est croissante et strictement positive sur I .

Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. La fonction u étant croissante sur I , on a : $0 < u(a) \leq u(b)$. Or, la fonction logarithme est croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(u(a)) \leq \ln(u(b))$. Donc la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est croissante sur I .

♣ **2e cas** : u est décroissante et strictement positive sur I .

Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. La fonction u étant décroissante sur I , on a : $u(a) \geq u(b) > 0$. Or, la fonction logarithme est croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(u(a)) > \ln(u(b))$. Donc la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est décroissante sur I .

Remarque :

Lorsque u est dérivable sur I , on peut également utiliser la propriété précédente en constatant que le signe de $(\ln(u))'$ est le même que le signe de u' donc $\ln(u)$ et u ont les mêmes variations.

1.4.5 ETUDE D'EXEMPLES DE FONCTIONS DE TYPE :

$$x \mapsto \ln(ux)$$



Exemple : 1

On donne la fonction f telle que $f(x) = \ln \left| \frac{x-4}{x} \right|$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que la courbe admet le point $I(2; 0)$ comme centre de symétrie.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat.
- 4) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f sur $] -\infty; 2]$.
- 5) Tracer (C_f) .

Résolution

1) Déterminons l'ensemble de définition de f .

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} x \neq 0 \\ \left| \frac{x-4}{x} \right| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0; 4\}$$

2) Montrons que la courbe admet le point $I(2; 0)$ comme centre de symétrie.

$I(2; 0)$ Centre de symétrie si et seulement si : $\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow (4-x) \in D_f \\ f(4-x) = -f(x) \end{cases}$

❖ Vérifions pour tout $x \in D_f \Rightarrow (4-x) \in D_f$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 4$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 0 \quad \text{et} \quad -x \neq -4$$

$$\Leftrightarrow 4-x \neq 4 \quad \text{et} \quad 4-x \neq -4+4$$

$$\Leftrightarrow 4-x \neq 4 \quad \text{et} \quad 4-x \neq 0 \quad \text{ainsi} \quad (4-x) \in D_f$$

❖ calculons $f(4-x)$

$$f(4-x) = \ln \left| \frac{4-x-4}{4-x} \right| = \ln \left| \frac{-x}{4-x} \right| = \ln \left| \frac{x}{-4+x} \right| = \ln \left| \frac{1}{\frac{x-4}{x}} \right| = -\ln \left| \frac{x-4}{x} \right|$$

$$f(4-x) = -f(x)$$

On a : $\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow (4-x) \in D_f \\ f(4-x) = -f(x) \end{cases}$ donc le point $I(2; 0)$ est Centre de symétrie

3) Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\text{❖ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x-4}{x} \right| = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\text{❖ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x-4}{x} \right| = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Interprétons géométriquement le résultat.

— On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, alors l'axe des ordonnées est asymptote verticale à (C_f) à gauche et à droite de 0.

— On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors l'axe des abscisses est asymptote horizontale à (C_f) .

4) Calculons $f'(x)$ et étudier les variations de f sur $] -\infty; 2]$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0; 4\}$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{\frac{4}{x^2}}{\frac{x-4}{x}} = \frac{4}{x(x-4)}$

$$f'(x) = \frac{4}{x(x-4)}$$

Etudions les variations de f sur $] -\infty; 2]$

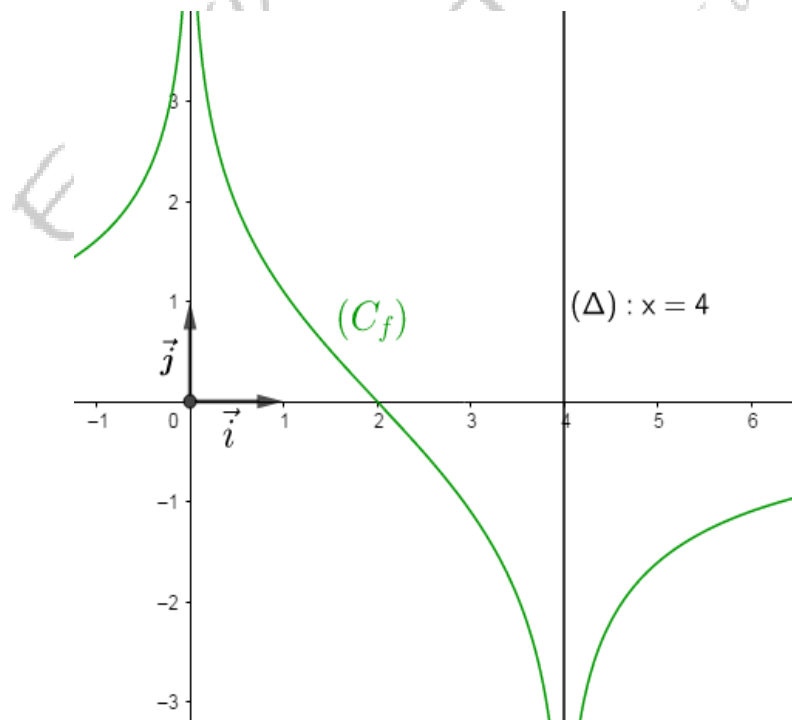
$f'(x) = \frac{4}{x(x-4)}$, le signe de $f'(x)$ est du signe de $x(x-4)$

— $\forall x \in]-\infty; 0[$; $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante

— $\forall x \in]0; 2]$; $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante

x	$-\infty$	0	2
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$
f	0	$+\infty$	0

5) Traçons (C_f) .



Exemple : 2

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

- 1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f .
- 2) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une désignée par α , appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.
- 3) Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $] -1 ; +\infty[$.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D =]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

- 1) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 3) Calculer $g'(x)$ et déduire à l'aide de la partie A), son signe.
- 4) Montrer que $(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$, en déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0.715$
- 5) Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- 6) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Résolution

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

- 1) Calculons $f'(x)$,
 $D_f =]-1 ; +\infty[$
 $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$
 $x \mapsto 2 \ln(x+1)$ est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$; par somme de fonction dérivable $f(x)$ est dérivable sur D_f et pour tout x de $] -1 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \left(\frac{1}{x+1} \right) = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

— Etudions le signe de $f'(x)$,

On a $f'(x) = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$, le signe de $f'(x)$ est du signe de $-2x-1$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

— Dédisons le tableau de variation de la fonction f .

Calculons :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{2(x+1) \ln(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x - 2(x+1) \ln(x+1)}{x+1} \right) = ? \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln(x+1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 2(x+1) \ln(x+1)) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$$

Par quotient de limite de fonctions $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x - 2(x+1) \ln(x+1)}{x+1} \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right) = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x+1) = +\infty$

Par somme de limite de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.39$$

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$		$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	0	$-\infty$

2) Calculons $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0}{0+1} - 2 \ln(0+1) = \ln(1) = 0$$

$$f(0) = 0$$

— Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une désignée par α , appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.

• Sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f(-\frac{1}{2}; +\infty[) =]-\infty; f(-\frac{1}{2})[$, de plus $0 \in]-\infty; f(-\frac{1}{2})[$ et $f(0) = 0$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution 0 sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

• Sur l'intervalle $] -1; -\frac{1}{2}[$, la fonction f est continue et strictement croissante et change de signe sur cet intervalle par conséquent il existe un unique nombre α de $] -1; -\frac{1}{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, de plus $f(-0.71) \approx 0.027$ et $f(-0.72) \approx -0.025$ donc $-0.72 < \alpha < -0.71$

3) Donnons le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $] -1; +\infty[$.

- Sur l'intervalle $] -1; \alpha[\cup]0; +\infty[$; $f(x) < 0$
- Sur l'intervalle $] \alpha; 0[$; $f(x) > 0$
- Pour $x = 0$ ou $x = \alpha$; $f(x) = 0$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

1) Calculons les limites de $g(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, par produit de limites des fonctions $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, par produit de limites des fonctions $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} \right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

2) Calculons $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2} \right) = ?$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$, par produit de limites des fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2} \right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

3) Calculons $g'(x)$

Pour tout x de l'intervalle $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x^2 - \ln(x+1) \times 2x}{x^4} = \frac{\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)}{x^3}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)}{x^3}$$

• Déduisons à l'aide de la partie A), son signe.

$$\text{On a } g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}, \text{ le signe de } g'(x) \text{ est du signe de } f(x) \text{ et de } x^3$$

x	-1	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$
x^3	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$

4) Montrons que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

$$\text{On a } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2 \ln(\alpha+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

$$g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

Déduisons une valeur approchée de $g(\alpha)$ pour $\alpha \cong -0.715$

$$\text{On a } g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

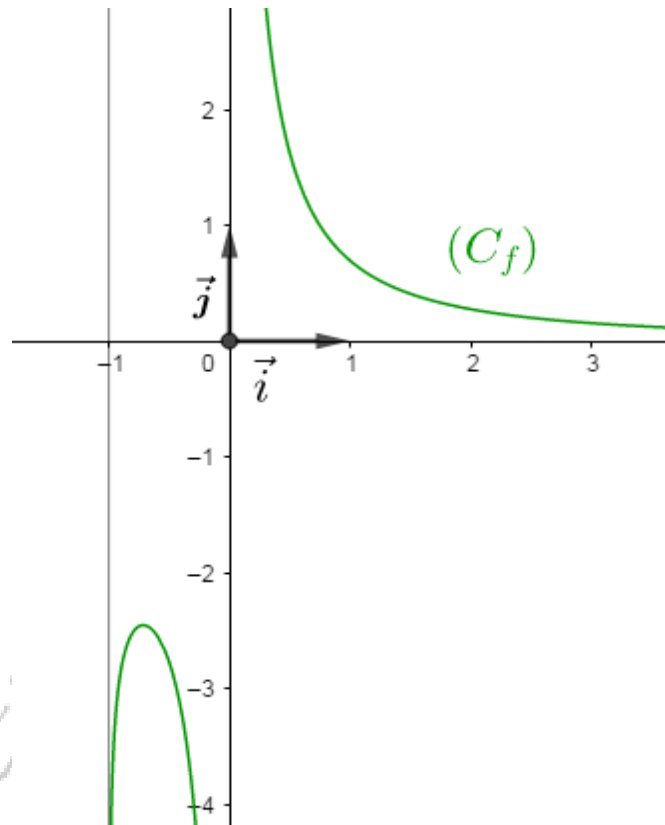
$$g(\alpha) = \frac{1}{2(-0.715)(-0.715+1)} \approx -2.45$$

$$g(\alpha) = -2.45$$

5) Dressons le tableau de variation de la fonction g .

x	-1	α	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
g	$-\infty$	$g(\alpha) \approx -2,45$	$+\infty$	0

6) Représentons graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).



II. FONCTION LOGARITHME DE BASE a

3.1 Base des logarithmes

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1, La fonction réciproque de la fonction a^x s'appelle **le logarithme en base a de x** notée **$\log_a$** ; les logarithmes en base a sont définies sur $]0; +\infty[$, telle que : pour tout x et tout y de $]0, +\infty[$ on a la relation fondamentale :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \text{ et } \log_a(a) = 1$$

- Le logarithme de base dix ($a = 10$) est le logarithme décimal noté $\log$
- Le logarithme de base e (nombre d'Euler) est le logarithme népérien ou aussi logarithme naturel.

Relation entre $\ln$ et $\log_a$

Pour tout $x > 0$; $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$
 $\Leftrightarrow \ln x = \ln a^y = y \ln a = \log_a(x) \times \ln a$ (or $a \neq 1$ d'où $\ln a \neq 0$)

Ainsi $\ln x = \log_a(x) \times \ln a$ d'où $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Remarque :

- La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien, pour $x > 0$; $\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$
- On a $\log_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$ et $\log_a(1) = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0$
- Pour tout $r \in \mathbb{Q}$; $\log_a(a^r) = \frac{\ln a^r}{\ln a} = r \times \frac{\ln a}{\ln a} = r$

Dérivées et variations

Pour tous x et a deux réels strictement positives tel que $a \neq 1$; la fonction $\log_a(x)$ est dérivable et

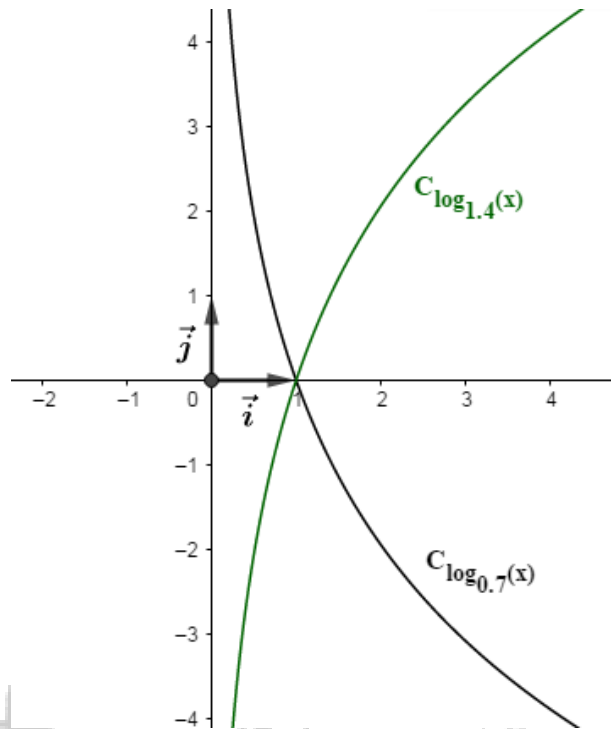
$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \times \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$; le signe de $(\log_a(x))'$ est celui de $\ln a$, ainsi on a :

— Si $0 < a < 1$; $\ln a < 0$, la fonction dérivée $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$ est strictement négative par conséquent la fonction $\log_a(x)$ est strictement décroissantes sur $]0; +\infty[$

— Si $a > 1$; $\ln a > 0$, la fonction dérivée $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$ est strictement positive par conséquent la fonction $\log_a(x)$ est strictement croissantes sur $]0; +\infty[$

Représentation graphique



3.2 Le logarithme de base 10 ou logarithme décimal

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal **notée log**, la fonction qui à tout réel x strictement positif associe l'unique réel y tel que $10^y = x$. On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\log(x) = y$ si et seulement si $10^y = x$.

Propriétés algébriques

- * Pour tout réel $x > 0$; $10^{\log x} = x$
 - * Pour tout réel x ; $\log(10^x) = x$
 - * $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$
- Pour tous réels a et b strictement positifs
- * $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$
 - * $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
 - * Pour tout réel x ; $\log(a^x) = x\log(a)$

Exemples :

- $\log(10^6) = 6$
- $\log(10^{-11}) = -11$
- $10^x = 2 \Leftrightarrow x = \log(2)$

3.3 Quelques utilisations de la fonction log

3.3.4 En chimie :

L'acidité d'une solution est mesurée par son potentiel d'hydrogène (pH) :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

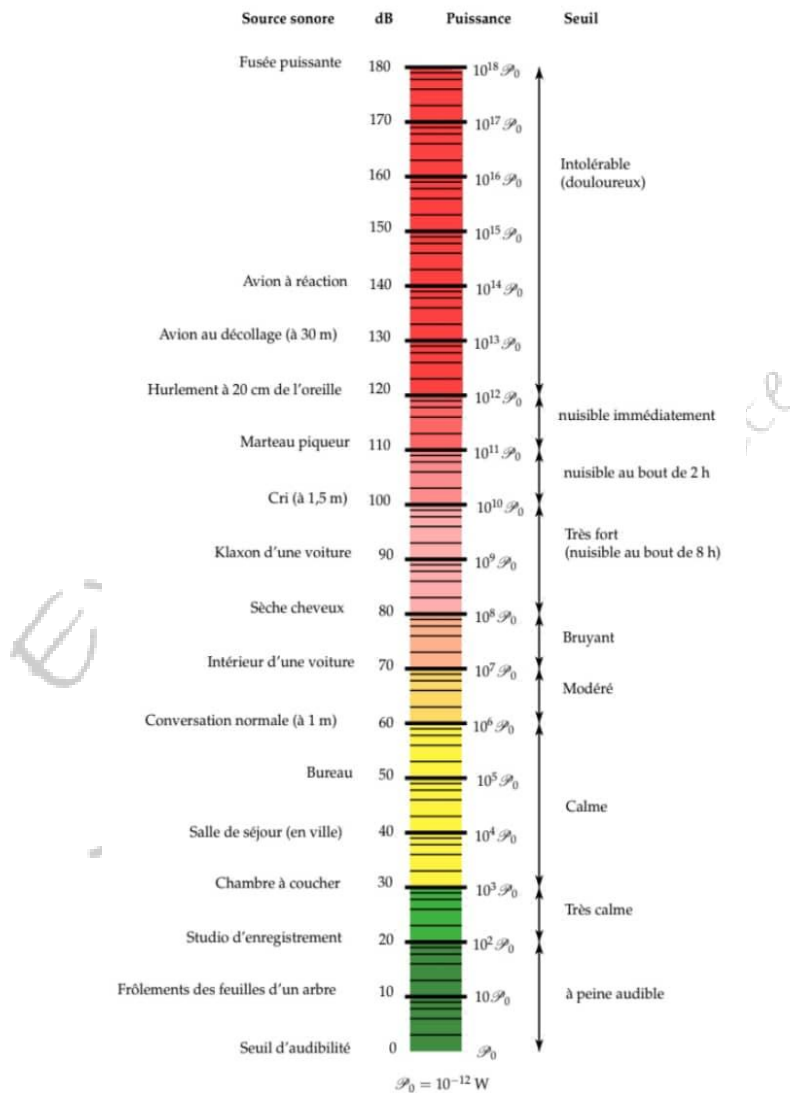
- Dire qu'une solution est de $\text{pH} = 7$ signifie
 $-\log[\text{H}^+] = 7 \Leftrightarrow \log[\text{H}^+] = -7 \Leftrightarrow [\text{H}^+] = 10^{-7}$ C'est-à-dire qu'il y a un ion $[\text{H}^+]$ pour 10 millions de molécules de solution
- Si une étiquette d'une eau minérale gazeuse indique $\text{pH} = 6,3$, on a :
 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ donc $[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$
 $[\text{H}^+] = 10^{-6,3} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ mol/l}$
- Lorsque la concentration en $[\text{H}^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue de 1.
 En effet :
 $-\log 10[\text{H}^+] = -(\log 10 + \log[\text{H}^+]) = -1 - \log[\text{H}^+]$

3.3.5 En acoustique :

L'intensité I (en décibels) d'un son de puissance P est donnée par :

$$I = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad \text{où } P_0 = 10^{-12} \text{ W correspond au seuil}$$

d'audibilité au dessous duquel aucun son n'est perçu.



En exemple une conversation normale qui correspond à :

$$P = 10^5 P_0 \text{ est de : } I = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels}$$

EXERCICE 1

1) Calculer les limites suivantes

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{2x + \ln x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)\ln(x+2) + 3x$
 h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x}$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^2 x$ k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + 2x)\ln(x^2 + 4x)$

2) Calculer les limites suivantes

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 5\ln(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+3) - \ln(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x^3 + 4)$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) + 3x$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{x}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{2x-3}$
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - (x+1)\ln(x+1)$
 h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie sur $] -3 ; 3[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

- 1) Etudier la parité de g .
- 2) a) calculer les limites de g en -3 et en 3 .
 b) Etudier les variations de g sur $[0 ; 3[$.
 c) En déduire le tableau de variation de g sur $] -3 ; 3[$.
- 3) On note (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé
 a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0 .
 b) Tracer (T) et (C_g)

► EXERCICE 6

Soit $g(x) = 2x - 2 - x \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $]0; +\infty[$ et que $0 < \alpha < e$ et $4,5 < \beta < 5$. préciser la valeur exacte de α .
- 3) En déduire le signe de $g(x)$.

► EXERCICE 3

Partie A

Soit la fonction φ définie par

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 + x^2 - \ln x$$

- 1) Etudier les variations de φ .
- 2) Calculer $\varphi(1)$, en déduire le signe de $\varphi(x)$.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln x}{x} - x$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) a) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique (D).
b) Etudier la position de (C_f) et (D).
- 3) Tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f) et (D).

► EXERCICE 4

Partie A

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = -2x^2 - 1 + \ln(x)$

- 1) calculer $h'(x)$; $\forall x \in]0; +\infty[$ puis étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$
- 2) Dresser le tableau de variation de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$ (sans calculer les limites aux bornes de D_h)
- 3) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) < 0$

Partie B

Pour la suite on donne la fonction f définie par $f(x) = -x + 1 - \frac{\ln x}{2x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 4) a) calculer la limite de f en 0 puis interpréter le résultat.
b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
- c) Prouver que la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est asymptote de (C_f) .
- d) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]0; +\infty[$.
- 5) a) calculer $f'(x) \forall x \in]0; +\infty[$.
b) vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
- c) En déduire de la question 3) le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- 6) Tracer (Δ) et (C_f) .

► EXERCICE 5

- 1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}$
 - a) Etudier les variations de f .
 - b) Etudier le signe de $f(x)$.
- 2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x(x+1) \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ sur $] -\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$ et $g(0) = g(-1) = 0$
 - a) Etudier la continuité de g .
 - b) Etudier la dérivabilité de g .
 - c) Etudier les variations de g .

► EXERCICE 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2\frac{\ln x}{x}$, le plan est rapporté au orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C_f) la représentation de f .

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln x + x^3 - 1$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .
- 3) Calculer $g(1)$ puis déterminer suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

Partie B : Etude de la fonction principale

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et en déduire une asymptote (D) à (C_f) .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter.
- 3) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f .
- 4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet deux racines α et β (avec $\alpha < \beta$)
 b) vérifier que $0.32 < \alpha < 0.33$ et $2.78 < \beta < 2.79$
 c) en déduire la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = 7$
- 5) Tracer (Δ) ; (D) et (C_f)

► EXERCICE 7

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^2}$. Soit C la courbe représentative de f et C' celle de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f .
3. Soit I le point d'intersection de C avec l'axe (Ox) .
Déterminer les coordonnées de I .

Partie B

1. pour tout x de $]0; +\infty[$ on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.
 - a) Etudier les variations de g .
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; 2[$ et β dans $]2; 4[$.
 - c) Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .
2. a) Montrer $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que C et C' se coupent en deux points.
- b) Montrer que : $\forall x \geq 4 ; 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.
3. Tracer C et C' .

► EXERCICE 8

Partie A

Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2 + 2x + \ln|x + 1|$.

- 1) Etudier les variations de h .
- 2) Calculer $h(0)$ et $h(-2)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $] - \infty; -2[\cup]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln|x + 1|}{x + 1} - x$.

- 1) Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f .
- 2) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = -\frac{h(x)}{(x + 1)^2}$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C_f) .
- b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- 5) Montrer que le point $I(-1; 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
- 6) Construire la courbe (C_f) .
- 7) a) Montrer que : $\forall x \in] - 1; +\infty[, f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} - x$.
- b) En déduire une primitive F de f sur $] - 1; +\infty[$.

► EXERCICE 9

Partie A

- 1) Démontrer que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ on a :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

- 3) Montrer que f est continue sur $]-1, +\infty[$.
- 4) Etudier la dérivabilité de f .
- 5) a) étudier le signe de la fonction h définie sur $]-1, +\infty[$ par $h(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$
- b) étudier les variations de f .
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

► EXERCICE 10

Partie A

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$

- 1) Montrer que : $g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$
- 2) a) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$
- b) calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$
- c) Dresser le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$. (sans calculer limites)
- 3) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[$ $g(x)$ est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$, on note (C_f) la représentation de f dans le plan est rapporté au orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unités : 2cm en abscisse ; 1cm en ordonnées)

- 1) Etudier la limite de f en 0 , en déduire que (C_f) admet une asymptote que l'on déterminera.
- 2) Etudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- 3) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 4) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Soient A et B deux points de (C_f) d'abscisses respectives e et $\sqrt{e}$.
- a) Donner les valeurs au centième des coordonnées de A et B.
- b) En déduire que f est positive sur $[e; \sqrt{e}]$.
- 6) Tracer la droite (Δ) , la courbe (C_f) et placer les points A et B.
- 7) Prouver que au point A, la courbe (C_f) admet une tangente parallèle à (Δ)

► EXERCICE 11

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$

- 1) Déterminer D_g , le domaine de définition de g puis calculer les limites aux bornes de D_g .
- 2) Calculer $g'(x)$, étudier son signe, puis dresser le tableau de variations de g .
- 3) Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in] -0,72 ; -0,71[$.
- 4) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites aux bornes de D_f .
- 2) Calculer $f'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
- 3) a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$
b) En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$
- 4) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$.

- 1) a) Déterminer les fonctions u et v telles que $h(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.
b) En déduire une primitive de h .
- 2) Après avoir vérifié que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.
- 3) Déduire des questions précédentes une primitive de f sur $]0; +\infty[$

► EXERCICE 12

Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$

- 1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Déterminer la dérivée de f , étudier son signe et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que $3 < \alpha < 4$.

Partie B

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{3(\ln|x|-1)^3}{3\ln^2|x| + 1}$

- 1) a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}^*$
- b) Démontrer que g est la composée de la fonction f et d'une fonction h à préciser.
- c) Etudier la parité de g .
- d) On note $D_E =]0, +\infty]$, soit la fonction K la restriction de g à D_E ; Etudier les branches infinies.
- 2) a) En utilisant les questions Partie A) et Partie B.1).b, calculer $K'(x)$ et étudier les variations de K sur D_E .
- b) Déterminer le point d'intersection de la courbe de K avec l'axe des abscisses et préciser le signe de K .
- 3) a) Montrer que K réalise une bijection de $]0, +\infty]$ sur un intervalle J à préciser.
- b) Construire les courbe (C_K) et $(C_{K^{-1}})$, $(C_{K^{-1}})$ est la courbe représentative de la bijection réciproque de K^{-1} de K dans un repère orthonormé.
- c) Tracer la courbe de g dans le repère précédent.

► EXERCICE 13

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

- 1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- 2) Démontrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
- 3) Dresser le tableau de variation de g .
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α et que $\alpha \in [1; 2]$ puis faire un encadrement de α à 10^{-1} près.
- 5) En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x + \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$; on note par

(C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) étudier la continuité de f en 0 .
- b) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat
- 2) Étudier les limites de f aux bornes de D_f , en déduire les branches infinies de la courbe (C_f) de f .
- 3) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- 4) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

- b) En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - c) Déterminer $f'(x)$ pour $x \leq 0$; donner son signe puis déduire le sens de variation de f .
 - d) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C

Soit h la restriction de f sur $] -\infty ; 0[$

- 1) Justifier l'existence de h^{-1} , la fonction réciproque de h .
- 2) Calculer $h(-1)$ puis $(h^{-1})'(-1 + \ln 2)$
- 3) Tracer $(C_{h^{-1}})$ la courbe h^{-1} dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$