TD : Suites Numériques

EXERCICE 0 :

A. Parmi les suites ci-dessous, après avoir calculer les quatre premiers termes, dites si elles sont arithmétiques ? Géométriques ? Au cas échéant, déterminer la raison et le premier terme.

$U_n = 2^n \frac{1}{5^{n-1}}$; $Z_n = (-1)^n 3^{\frac{2n+1}{2}}$; $K_n = 5n - \frac{3}{2} K_n$

; $V_n : \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} + V_n = 6 \end{cases}$; $W_n : \begin{cases} W_1 = 3 \\ W_{n+1} - W_n = 1 \end{cases}$;

$L_n : \begin{cases} L_3 = 23 \\ L_{n+1} = L_n + \frac{6}{100} L_n \end{cases}$; $T_n : \begin{cases} T_0 = 7 \\ T_{n+1} = T_n^2 \end{cases}$;

B. La suite (u_0) est arithmétique de raison r = 8. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

A. Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle : pour n ≥ 1

a) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$;b) $u_n = n + \frac{1}{n}$; c) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

B. Etudier la convergence des suites :

a) $U_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+2)}$; b) $U_n = \frac{n^2 \cos n}{n^3 + 3n - 4}$; c)

$U_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - (an + b)$;d) $U_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$;

EXERCICE 1 : Démontrer par récurrence que :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 1 + 2 + 3 + \cdots . n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots . n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\forall\, n \in \mathbb{N};\quad 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

xercice :2

Soit (U_n) la suite définie par U_0 et $\forall n \in IN, U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}$.

a. On pose $U_0 = 2$. Montrer que la suite (U_n) est croissante puis majorée par 3.En déduire qu'elle convergente et déterminer sa limite.

b. On pose $U_0 = 3$. Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

c. On pose $U_0 = 10$ .Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée .En déduire sa convergence vers une limite que l'on précisera.

Exercice :3

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$, et pour n ≥ 0 , $U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + \frac{14}{3}$.

a. Montrer que par récurrence que la suite (U_n) est croissante.

b. Montrer que si (U_n) converge, alors sa limite est 7.

c. On pose $V_n = U_n - 7$ pour n ≥ 0 .Montrer que (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n .Conclure quant à la convergence de la suite (U_n).

EXERCICE :4

Le conseil d'administration d'une entreprise décide d'augmenter les salaires mensuels au début de chaque année civile de la façon suivante :

Le nouveau salaire mensuel est obtenu en ajoutant forfaitairement 2 000 francs au salaire de l'année précédente augmenté de 5 %.

Soit $U_0 = 60\,000$ le salaire mensuel exprimé en francs d'un ouvrier en 1995, U_1 son salaire mensuel en 1996, U_n son salaire mensuel en (1995 + n) .

1) Calculer U_1 et U_2.

2) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $U_{n+1} = 1{,}05 U_n + 2\,000$.

3) Soit la suite (V_n) : $V_n = U_n + 40\,000$.

a) Montrer que est une suite géométrique de raison 1,05.

b) Calculer V_0. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

4) A partir de quelle année le salaire mensuel de cet ouvrier sera-t-il supérieur à 150 000 francs ?

EXERCICE : 5 : soit (U_n) : $\forall n \in IN, U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1) Soit f la fonction définie sur [−2 ;+ ∞[par :

Copyright©2024_M.DIACK (Mathématiques)

$f(x) = \sqrt{2 + x}$

Tracer la courbe C représentative de f.

2) On suppose que $U_0 = 0$.

a) Représenter graphiquement (U_n) .

b) Conjecturer à partir du graphique le sens de variation de (U_n) .

3) a) En utilisant le sens de variation de f et un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout n de ℕ, $U_{n+1} > U_n$.

b) En procédant de la même façon, montrer que U_n appartient à [0 ; 2].

4) On se propose de montrer que la suite (U_n) converge vers le nombre 2.

a) Montrer que : $\left|U_{n+1} - 2\right| < \frac{1}{2}\left|U_n - 2\right|$.

b) En déduire que : $\left|U_n - 2\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|U_0 - 2\right|$.

c) Conclure en déterminant la limite de (U_n) .

<u>Exercice</u> : 6

Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n^2 - 2 \end{cases}$

1/ Calculer v_1, v_2 et v_3.

2/.Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \geq 1$.

3/.Etudier le signe du trinôme $3x^2 - x - 2$.

4/.Déduire de ce qui précède le sens de variation de (v_n).

<u>Exercice</u> : 7

On considère la suite (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 = e \\ u_n = \sqrt{u_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$

1/a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

En déduire que (v_n) est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

2/$\forall n \in \mathbb{N}$, on définit les suites (s_n) et (p_n) par :

$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $p_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

a) Calculer les cinq premiers termes de (s_n) et de (p_n).

b) Montrer que $p_n = e^{s_n}$.

c) Exprimer s_n en fonction de n. En déduire p_n en fonction de n.

3/ Déterminer le limite de (s_n) puis en déduire celle de (p_n)

<u>Exercice</u> : 8

Soit la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$. $\forall$ n ∈ ℕ, on définit le nombre complexe z_n de module u_n et dont un argument est v_n.

1/.Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

2/.Démontrer que la suite (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ .3.Pour tout entier naturel n on pose : $Z_n = z_0 \times z_1 \times \ldots \times z_n$

a) Exprimer un argument de Z_n en fonction de n.

b) Démontrer que si n est impair, alors Z_n est réel.

<u>Exercice</u> 9 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \forall n \geq 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence sur n que (u_n) et (v_n) sont des suites strictement positives
2. Calculer $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$ et en déduire que $\forall n \geq 0 \quad u_n \leq v_n$
3. Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
4. Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0$ *on* a $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$
5. que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) .Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Copyright©2024_M.DIACK (Mathématiques)