Composition de mathématiques du 1^er^ Semestre

Exercice 1 :(03 points)

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en deux points A et B. On choisit un point C du cercle (C) et un point D sur (C') ; ces deux points étant distincts de A et B. Un point P décrit le cercle (C). La droite (PA) coupe le cercle (C') en un point Q; lorsque P est en A, on considère que la droite (PA) est la tangente en A à (C).

1. Montrer que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{PC},\overrightarrow{QD})[\pi]$. (**0,75pt**)
2. En déduire que (PC) et (QD) sont sécantes en un point R si et seulement si C, B et D ne sont pas alignés. (**0,75pt**)
3. On suppose que C, B et D ne sont pas alignés.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RD}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})[\pi]$. (**0,75pt**)
   b) En déduire l'ensemble décrit par R quand P décrit (C). (**0,75pt**)

Exercice 2 : (06 points)

On considère dans le plan un triangle équilatéral ABC de côté de longueur a et on désigne par I le milieu du segment $[BC]$.

1) a) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$ (**1pt**)
   b) Vérifier que A appartient à (E_1) puis tracer (E_1). (**0,5pt**)
2) Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
   a) Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$. (**1pt**)
   b) En déduire et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$. (**0,75pt**)
3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2); (B, 1)$ et $(C, 1)$.
   a) Montrer que G est le milieu de $[AI]$. (**0,25pt**)
   b) Montrer que pour tout point M du plan, on a :
   $$MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 2MG^2 + GA^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}.$$ (**1pt**)
   c) Déterminer suivant les valeurs du réel k, l'ensemble (L_k) des points M du plan tels que :
   $$MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = k$$ (**0,75pt**)
   d) Pour quelles valeurs du réel k, (L_k) est – il tangent à (E_1) ? (**0,75pt**)

Exercice 3 : (05 points)

1) On considère le polynôme du second degré $P_m(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1$.
   a) Etudier suivant les valeurs du paramètre m, l'existence et le signe des racines de $P_m(x)$. (**1,5pt**)
   b) Trouver une relation indépendante de m liant les racines x_1 et x_2 au cas où elles existent. (**0,5pt**)
   c) Résoudre et discuter suivant les valeurs de m le système suivant : (**1,5pt**)
   $$\begin{cases} mx^2 - 2(m-2)x + 2m - 1 < 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$
2) Un polynôme $Q(x)$ divisé séparément par $(x-2)$ et $(x+1)$ donne respectivement pour reste 4 et 7. Soit $R(x)$ le reste de la division euclidienne de $Q(x)$ par le produit $(x-2)(x+1)$.
   a) Justifier qu'on peut écrire $R(x) = ax + b$ avec a et b deux réels fixes. (**0,75pt**)
   b) Calculer alors a et b. (**0,75pt**)

Exercice 4:(**06 points**)

Problème :

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + 2x^2 - 3x - 2$.

Partie A :

Soit u l'application définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - \frac{3}{x}$ et v l'application définie de $]-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $v(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

1) Montrer que si $f(-x) = g(-x)$ alors $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$. (**0, 5pt**)
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :
   a) $f \circ u(x) = g \circ u(x)$; b) $f \circ v(x) \geq g \circ v(x) + 2x^2 - 8$ (**2pts**)

Partie B :

Dans cette partie, on donne $g(x) = -x^2 f(x) + 4$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}$. (**0, 5pt**)
2. a. Montrer que $\forall\, x \neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$. (**0, 25pt**)
   b. f est – elle injective ? Justifier. (**0, 25pt**)
3) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -1$. (**0, 5pt**)
   b. f est – elle surjective ? Justifier. (**0, 25pt**)
4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;\ +\infty[$.
   a) Montrer que h est bijective de $[1;\ +\infty[$ vers $\left[\frac{1}{2}; 2\right[$. (**1, 25pt**)
   b) Définir sa bijection réciproque h^{-1}. (**0, 5pt**)

Bonne Chance