Inspection d'académie de DAKAR — Année scolaire 2022/2023

LYCEE LAMINE GUEYE — Terminale S1

M. DIACK

Série d'exercices sur : TRANSFORMATIONS

Exercice : 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M , de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 4 - 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

1. Exprimer x et y en fonction de x' et y' .En déduire que f est une transformation
2. Soit M_1 et M_2 deux points d'images respectives M'_1 et M'_2 par f . Exprimer $M'_1 M'_2$ en fonction de $M_1 M_2$, en déduire que f est une isométrie .
3. Montrer que f possède un unique point invariant I. En déduire la nature de f.
4. O' désigne l'image de O par f , déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO}')$.
   En déduire la nature de f

Exercice : 2

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et A' , B' et C' trois autres points tels que A'B' = AB , A'C' = AC et BC = B'C'.On suppose qu'il existe deux isométries f et g vérifiant f(A)=g(A)=A' , f(B)=g(B)=B' et f(C)=g(C)=C'.

Montrer que $g^{-1} \circ f = id_p$; en déduire que f = g .

Soit A et B deux points distincts du plan et A' et B 'deux autres points tels que A'B' = AB.

1. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha\ [2\pi]$ et f $= R_{(A',\alpha)} o t_{\overrightarrow{AA'}}$ .Montrer que f(A) =A' , f(B)=B'.
2. Soient g et f deux déplacements qui transforment A en A' et B en B'.
   Montrer que $g^{-1} \circ f$ est un déplacement qui possède deux points invariants distincts .
   En déduire que f = g .Conclure .
3. On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.Caractériser le déplacement f .
4. On suppose que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ et on pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = \alpha\ [2\pi]$ .Montrer que f est une rotation d'angle α dont le centre O appartient aux médiatrices (si elles existent) de [AA'] et [BB'].
5. Les données sont les même qu'au 2.
   a. f étant l'unique déplacement tel que f(A) =A' et f(B)=B' ; on pose $h = foS_{(AB)}$. Quelle est la nature de h ?Montrer que h(A)=A' et h(B)=B' .
   b. Soit h et k deux antidéplacements qui transforment A en A' et B en B'.En considérant $k^{-1}oh$, montrer que h = k.

Exercice : 3

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I , J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose f=Rot et g= toR .

1) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g .

2°) a) déterminer la nature de la transformation gof^{-1}.

b) Chercher l'image de A par gof^{-1} et caractériser alors cette application .

c) Soit M un point du plan , M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g .

Quelle est la nature du quadrilatère AC M_1M_2 ?

Exercice : 4

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; on désigne par I le milieu de [BC] . On note R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer $f = R_C o t o R_B$.
2. Préciser l'image par f du point B .

Caractériser f .

TRANSFORMATIONS AU BAC

Exercice 1 Bac 93

Tous les points considérés dans cet exercice appartiennent a un plan euclidien orienté IP. Soit D une droite de IP, O un point de D et C un cercle de centre O. C coupe D en A et B.

Soient H le milieu de [OB] et I le point de C tel que $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HI}) = \frac{\pi}{2}$.

Soient K et J les symétriques de H et I par rapport à O .

1. Montrer que les triangles KAJ et HIA sont directement semblables (on pourra utiliser le triangle HBI).
2. Soit S la similitude directe transformant K, A, J en H, I, A respectivement. Déterminer son angle α et son rapport k.
3. prouver que les trois cercles de diamètre [KH] , [AI] et [JA] respectivement passent par le centre Ω de la similitude S.
4. Déterminer l'image du point O par la similitude S.

Exercice 2 Bac 89

Dans le plan IP, on considère un triangle équilatérale ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC].

On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

S_I la symétrie de centre I.

$t_{\overrightarrow{BC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = r_C \circ s_I \circ r_B$ et $g = r_C \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_B$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g

Exercice 3 Bac 94

Dans le plan IP orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocéle en A tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note I le milieu du segment [BC].

1. Construire J = R(I).
2. On note F_1 = RoT et F_2 = ToR ; déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$ puis en déduire la nature et lesz éléments caractéristiques F_1et F_2 .
3. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2. Quelle est la nature du quadrilatére BCM_1M_2 ?

Exercice 4 Bac 96

Dans le plan orienté on considère deux points A et B. On prendra AB = 6cm pour la figure.

1. Déterminer et représenter l'ensemble ξ des points M du plan tel que $\frac{MA}{MB}=3$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble ψ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. a. Placer le point C image de B par la rotation r de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, puis le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
   b. On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D. déterminer le rapport et l'angle de S.
   c. On note Ω le centre de S. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$.
   d. En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.
   e. Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

Exercice 5 Bac 99

On considère dans le plan euclidien orienté, un triangle ABC équilatéral direct ; on note H le pied dela hauteur issue de C, H_1 le projeté orthogonal de H sur [AC].

1. a. Calculer le rapport $\frac{H_1C}{H_1A}$
   b. Déterminer les centre des simlitudes plane directes d'angle nul ou plat transformant A en C.
2. Déterminer l'ensemble des points M du ^plan tel que MC = 3MA
3. Construire le centre Ω de la similitude plane directe S de rapport 3 et d'angle -$\frac{\pi}{3}$ telle que S(A) = C

Exercice 6 Bac 01

Dans un plan orienté, on considère un carré direct MNPQ de centre O.
Soit I un point de [NP] distinct de N.
On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1. Faire une figure avec NP = 5cm ; NI = 2cm (on placera (NP) « verticalement » c'est-à-dire parrélement au grand coté de la feuille).
2. Soit R le quart de touir direct de centre M.
   a. Préciser l'image de la droite (NP) par R.
   b. Déterminer les images de K et I par R.
   c. Quelle est la nature des triangles KMJ et IML.
3. On note E le milieu[IL], F celui [JK] ; soit S la similitude directe de centre M d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Préciser les images de K, et de I par S.
   b. Quel est le lieu géomètrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.
   c. Déduire de ce qui précède que les points O,N, E et Q sont alignés.

Exercice 7 Bac 03

Soit ABCD un losange de centre Ω. Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E ; et J celuit despoints O et Ω.

1. a. Démontrer que G est barycentre de chacun des systémes $\{(\Omega,4);(E,1)\}$ et $\{(J,4);(A,1)\}$
   b. Soit f l'application du plan dans lui-même associant à tout point M le point M' défini par : 4 $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}$ .Déterminer la nature de f et ses élééments caractéristiques.
   Quelles sont les images de E et de A par f ?
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$ et s rof.
   a. Démontrer que s est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.
   b. Construire H = s(G) et L = s(A) .
   c. Démontrer que le centre I de la similitude s appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.

Exercice 8

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure soignée avec AB = 6cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B..
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser l'image de E par s. En déduire l'angle ($\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$).
   b. On note Γ le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Placer Γ et I sur la figure.
   Montrer que I appartient à Γ.
   c. Montrer que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales.
3. Soit Γ' le cercle circonscrit au carré DEFG. Placer Γ' sur la figure. Montrer que I appartient à Γ'.

Etablir que les points C, G et I sont alignés