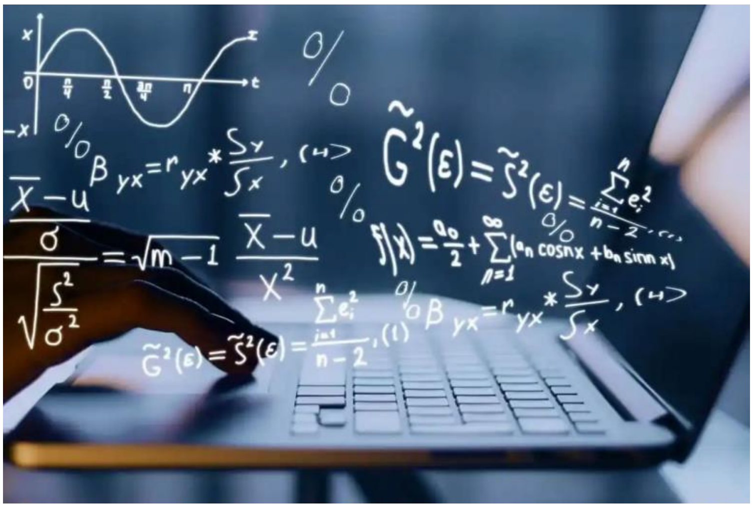
MINISTER DE L’EDUCATION NATIONALE
INSPECTION D’ACADEMIE DE DAKAR
LYCEE LAMINE GUEYE DE DAKAR

Année Scolaire : 2023-2024



Recueil d’exercices pour la Terminale S1

Spécialité : Mathématiques

Présentée par :

Thiendou DIACK

« Ne t’inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t’assurer que les miennes sont bien plus importantes ! »

Albert Einstein

Table des matières

Chapitre 01 : Applications aux études de fonctions

Dérivées successives

Exercice N° 01

Soit $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donner l'expression de sa dérivée et vérifier que pour tout réel x :

$$2f'(x)\sqrt{1 + x^2} = f(x).$$

2) En déduire la relation :

$4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Accroissements finis

Exercice N°01

Soit f une fonction continue sur un intervalle$[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$, $(a < b)$, et telle que $f([a\,,b]) \subset [a\,,b]$.

On suppose de plus qu'il existe un réel k $\in\,]0;1[$ tel que, $\forall x \in\,]a\,,b[$, on ait $|f'(x)| \leq k$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[a\,,b]$.

On définit une suite (X_n) par la donnée de $X_0 \in [a\,,b]$ et par la relation de récurrence

$X_{n+1} = f(X_n), \forall n \in \mathbb{N}.$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \in [a\,,b]$.

Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad |X_{n+1} - \alpha| \leq k|X_n - \alpha|$

En déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad |X_n - \alpha| \leq k^n|X_0 - \alpha|$

La suite (X_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Exercice N°02

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \cos x$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right[$.

2) Démontrer qu'il existe un réel c appartenant à $\left]x_0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right)f'(c)$$

3) Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$ et en déduire que :

$$\frac{\pi + 4\sqrt{2}}{12} < x_0 < \frac{\pi}{4}$$

Exercice N°03

Cet exercice traite la convergence de la suite $(\mathbf{U_n})$ définie pour n$\geq$ 1 par :

$\mathbf{U_n} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ (Appelée une série Riemann de terme général $\frac{1}{k^3}$)

Soit la fonction $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x^2}$

1) En appliquant à φ le théorème de l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[p\ ;\ p+1]$, p étant un entier strictement positif, montrer que :

$$\frac{2}{(p+1)^3} < \varphi(p) - \varphi(p+1) < \frac{2}{p^3}$$

En déduire que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

2) a)Etudier les variations de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ et démontrer qu'elle est convergente.

b) Donner un encadrement de la limite L de (U_n) .

NB : Montrer de la même façon que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente.

Exercice N°04

Une fonction numérique f est dite lipchitzienne de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$) sur un intervalle I lorsque

Pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Montrer que, en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :

a) la fonction cosinus est lipchitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport 1.

b) la fonction logarithme népérien est lipchitzienne sur $I = [1, +\infty[$ de rapport 1.

c) En déduire que, pour tout $(a, b) \in I^2$, tel que : $0 < a < b$, on a :

$$1 - \frac{b}{a} \leq lnb - lna \leq \frac{b}{a} - 1 .$$

Théorème des Valeurs Intermédiaires (T.V.I)

Exercice N° 1

Soit l'application f définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{cosx}$

1) Montrer que f est bijection de I vers un intervalle K à déterminer.

2) Etablir que f^{-1} est dérivable sur K et donner l'expression de f^{-1}.

Exercice N° 02 :

Soit f une fonction définie et continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ telle que $f([0;1]) \subseteq [0;1]$. On pose $g(x) = x - f(x)$

Calculer g(0) et g(1). En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[0;1]$

On suppose que f est dérivable et $\forall x \in [0;1]$ $|f'(x)| < 1$.

Démontrer que $\exists! x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Soient a et b deux réels ($a < b$) ,f une fonction définie et continue de $[a;b]$ dans $[a;b]$ tels que $f([a;b]) \subseteq [a;b]$. Montrer qu'il existe une réel $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Exercice N° 03 :

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout entier naturel n non nul on pose :

$$g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

Déterminer D_{g_n} pour $n \geq 1$

Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in D_{g_n}$ $m \leq g_n(x) \leq M$ pour $n \geq 1$

Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$

Calculer $g_n\left(\frac{k}{n}\right)$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = g_n(0) + g_n\left(\frac{1}{n}\right) + g_n\left(\frac{2}{n}\right) + ... + g_n\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) - f(0)$$

En déduire que : $m \leq 0 \leq M$. En déduire que $\forall n \geq 1$ $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que :

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)$$

Exercice N° 04 :

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Montrer que (E) admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};1\right[$.

Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ on pose $\alpha_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$

Montrer que : $\forall i \in \{1,2,3\}$, on a $\alpha_i \in]-1;1[$

En déduire que pour chaque $i \in \{1,2,3\}$ il existe $\theta_i \in]0;\pi[$ tel que $\cos\theta_i = \alpha_i$ (justifier votre réponse)

Montrer que si θ_i est solution de l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ alors α_i est solution de (E)

En déduire le solutions de (E)

Exercice N°04

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose la fonction polynôme f_n définie par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ \ldots + x - 1$$

Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$, pour tout $n \geq 2$.

a) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$.

En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + (\alpha_n)^{n+1}$.

b) En déduire que, $\forall$ n ≥ 2, on a : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

c) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente et que $\alpha_n \leq 0{,}7$, $\forall n \geq 2$.

d) Montrer que , $\forall x \neq 1$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$$

e) En déduire que, $\forall n \geq 2$, on a :

$$2\alpha_n - 1 = (\alpha_n)^{n+1}$$

f) Montrer que $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{1}{2}$

Exercice N°05

On considère la fonction $f(x) = x - e^{-x}$

1) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule, α, sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

2) Soit (U_n) la suite définie par la donnée de U_0 et par la relation :

$U_{n+1} = e^{-U_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, quel que soit U_0, pour tout entier n supérieur ou égal à 3,

$U_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

3) En utilisant les accroissements finis, prouver qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$|U_n - \alpha| < k|U_n - \alpha|$; en déduire que la suite (U_n) converge vers α.

PROBLEME DE SYNTHESE :

Problème : 00

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle

$I = \left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

On pose $V(x) = g(x) + \frac{1}{2}x^4$, $\forall x \in I$.

1) Etudier les variations de g et de V (il ne sera pas nécessaire de calculer les limites aux bornes de g et de V).

2) En déduire que :

$\forall x \in$ I, $\quad -\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0.$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\propto[$

par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2cm).

1)a) Vérifier, pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, que :

$$f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$$

b) En utilisant l'inégalité trouvée en A.2), démontrer que f est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2) Soit h la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\propto[$ par :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1 + x} + 2\ln(1 + x)$$

a) Etudier le sens de variations de h ; calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur$]-1\ ;\ +\propto[$.

b) Démontrer que :

$\forall x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\propto[$, on a :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$$

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

3) Construire (C) et la tangente (T) (On précisera les asymptotes de (C)).

Partie C :

1) a) Démontrer que la fonction w définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$w(x) = f(x) - x$$

est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1\ ;\ +\propto[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

2) a) Sachant que $\forall\ x \geq 0$ on a :

$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$, démontrer alors que $\forall x \geq 0$ on a : $\frac{-1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$; puis pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\ ;1\right]$, $\quad |f'(x)| \leq \frac{4}{5}$;

(On pourra utiliser les résultats de B.2).

b) Démontrer que si :

$\frac{1}{4} \leq x \leq 1$, alors $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$.

3) On définit la suite (V_n) par : $V_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$V_{n+1} = f(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq V_n \leq 1$.

b) Démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad |V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|V_n - \alpha|$; puis que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_n - \alpha| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer le plus petit entier n_0 possible tel que, $\forall\ n \geq n_0$, V_n soit une valeur approchée de α à 10^{-1} près

<u>Problème</u> : 01

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type : $f(x) = k$.

Partie A

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$$

pour n un entier naturel non nul.

(C_n) désigne la courbe représentative f_n dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1. a. Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (Pour la limite en $+\infty$, on pourra poser X = x+2).
   b. Etudier suivant la parité de n, la limite de f_n en – 2.
2. a. Calculer $f'_n(x)$, puis étudier son signe suivant la parité de n.
   b. Dresser le tableau de variation de f_n.
3. Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A. Déterminer une équation de la tangente T_n à (C_n) en A.
4. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Démontrer que pour tout entier n non nul, et pour tout nombre réel x différent de -2, on a :
   $f'_n(x)=f_n(x)-nf_n(x)$.
   c. En déduire les positions des courbes (C_1) et (C_2).
   Représenter graphiquement (C_1) et (C_2).

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par :

$u_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)dx$, pour tout entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul, on a : $(u_n)\geq 0$. Que peut-on conclure ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel, n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\leq u_n\leq\left(\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\right)e$$
   En déduire la limite de la suite (u_n).
3. a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :
   $$nu_{n+1}=1+u_n-\frac{e}{2^n}$$
   b. Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4.b) de la partie A.
   c. En déduire que :
   $$\lim_{x\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}dx=1$$

Partie C

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=f_1(x-1)$. On note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Construire la courbe (Γ) à partir de la courbe (C_1). Justifier la construction.
2. On note φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
   $\varphi(x)=1+ln(1+x)$.
   a. Démontrer que l'équation f(x)= x admet une solution
   b. unique α dans l'intervalle I=[2; 3].
   c. Démontrer que pour tout x positif, l'équation $\varphi(x)=x$ est équivalente à l'équation g(x)= e.

d. Démontrer que pour tout réel x de I , $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3. Soit (v_n)la suite définie pour tout entier naturel n par : v_0= 2 et $v_{n+1}=\varphi(v_n)$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est croissante et majorée par . Conclure.

b. Démontrer que $(I) \subset I$.

c. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : v_n appartient à l'intervalle I.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{3}|v_n - \alpha|$, puis que :, $\alpha - v_{n+1} \leq \frac{1}{3}(\alpha - v_n)$.

b . En déduire que , pour tout entier naturel n , $\alpha - v_n \leq \frac{1}{3}$ et que la suite (v_n) converge vers α .

c .Déterminer un entier naturel p pour lequel v_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} prés. Calculer cette valeur approchée.

Problème : 02

Ce problème a pour buts , d'une part d'étudier la suite de terme général $\frac{n^n e^{-x}}{n!}$ d'autre part de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.

Pour tout n> 0 , on note f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{n^n e^{-x}}{n!}$.

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On prendra $\|\vec{\imath}\|$ = 2cm et $\|\vec{\jmath}\|$ =10 cm .

A. 1. Déterminer le tableau de variation de f_n sur $[0;+\infty[$.

2. Pour tout n ≥ 2 , étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point A_n de coordonnées (n ; f(n)) appartient à (C_{n-1}) .

3. Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes (C_1) (C_2) et (C_3) ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes

B. Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$.

1. a. En utilisant les résultats de A. , démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est – elle convergente ? Justifier.

On se propose dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.

2. a. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle [0; 1] par :

$g(t) = ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$.

En utilisant les variations de g , démontrer que , pour tout t de [0; 1] , on a : $ln(1+t) \leq t + \frac{t^2}{4}$.

b. En déduire que , pour tout entier n> 0 , on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3. a. Démontrer que , pour tout entier n > 0 , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$$

b. En déduire que , pour tout n supérieur ou égal à 2 , on a :

$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)}$

4.a. Démontrer que pour tout n ≥ 2 , on a : $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

(On pourra utiliser des considérations des aires).

b. En déduire que pour tout n ≥ 2 , on a :$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}lnn}$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

C. Pour tout n > 0 et pour tout réel a positif ou nul , fixé , on pose :

$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$.

1. Calculer $I_1(a)$.

2. Démontrer que pour tout entier n > 0 et pour tout réel a positif ou nul , on a : $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$. En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3 .a. Démontrer que pour tout entier n> 0 , on a : $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$ (On pourra utiliser **B.1.a**).

b. Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4.a. Etablir pour tout entier n$\geq$ 2 une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. En déduire que pour tout entier n $\geq$ 2 on a :

$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$.

Cette égalité reste – t- elle valable pour n = 1 ?

Démontrer que pour tout a de $[0; +\infty[$ on a :

$e^a = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$.

<u>Problème</u> : 03

Partie A : Etude d'une fonction exponentielle .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. On note f' , f'' et $f^{(3)}$ les dérivées successives de f .
   Etablir que : $\forall\ x \in\ R$
   $f^{(3)}(x) = 4x(3 - x^2)\, e^{-x^2}$.
2. Etudier les variations de la fonction f'' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan .
3. En déduire que $\forall\ x \in\ R$
   $|f''(x)| \leq 2$.

Partie B : Calcul approchée d'une intégrale

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale I $= \int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 10^{-3} prés .

B1.

Soit u la fonction affine croissante définie par u(x)= $\alpha x + \beta$ où $\alpha > 0$ et $\beta \in R$; et soit g la fonction composée définie par : $\forall\ x \in\ R$ g(x) = (f∘ $u)(x)$.

On pose : $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$. avec x ∈ R^+ .

1. Sans chercher à calculer $\varphi(x)$, établir que si G est une primitive de la fonction g alors : $\forall\ x \in R_+$
   $\varphi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$.
2. En déduire que : $\forall\ x \in R_+$
   $\varphi''(x) = g'(x) - g'(-x)$.
3. a. Démontrer en utilisant A3) ,que : $\forall\ x \in R\ |g''(x)| \leq 2\alpha^2$.
   b. A l'aide du théorème des accroissements finis , établir que : $\forall\ x \in R_+ |\varphi''(x)| \leq 4\alpha^2 x$.
   c. Par intégrations successives , démontrer que : $\forall\ x \in R_+$
   $-\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$.
   d. En cadrer $\varphi(1)$ et en déduire que :$\forall\ x \in R_+$
   $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{1} g(t)dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$.

B2.

1) Démontrer que :
   $\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)du$.
2) On se place dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2n}$ et $= \frac{2k+1}{2n}$,$k\ \in\ \{0,1,\ldots,n-1\}$.
   Etablir que : $\forall k\ \in\ \{0,1,\ldots,n-1\}$
   $-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$
3) En déduire que :
   $\left|\int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{12n^3}$
4) Déterminer le plus petit entier n qu'il faut prendre pour avoir une valeur approchée de i à 10^{-3} prés . En déduire que I a une valeur approchée de 0, 75.

Partie C : Etude d'une fonction définie par une intégrale.

Pour tout réel x , on pose
$F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) Démontrer que F est définie et continue sur R .
2) Etudier la parité de F .
3) Quel est le sens de variation de F ?
4) a) Démontrer que $\forall\ t \geq 1$
   $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Soit (u_n)n>0 , la suite de terme général $u_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par I $+ \frac{1}{e}$.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L $\leq$ 1,13 .

d) Quelle conclusion obtient-on en ce qui concerne la limite de la fonction F lorsque x tend vers $+\infty$?

5) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère du plan .

Problème : 04

I. Soit la fonction définie sur $R_+ - \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{lnx} \quad si\ x\ \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $R_+ - \{1\}$. Etudier la dérivabilité en 0
2. Etudier les variations de f.
3. Construire la courbe de (C) représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère ortho normal . On fera figurer la demi- tangente en l'origine du repère .

II. Dans cette partie on étudie la fonction H définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer . On pose $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt$ pour tout x de $R_+ - \{1\}$.

1. a . Justifier l'existence de H(x) sur $R_+ - \{1\}$.
   b. Etudier le signe de H(x) sur $R_+^* - \{1\}$.
2. Déterminer H'(x) pour tout réel x de $R_+^* - \{1\}$.
3. Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout réel x de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on ait $|f(x)| \leq M$. En déduire la limite de H en 0 .
4. a. On donne $K(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{tlnt}$. Montrer que K est une fonction constante .
   b. Montrer que la fonction g telle que $g(x) = \frac{x-1}{xlnx}$ admet un prolongement φ par continuité en 1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \varphi(t)dt\right) = 0$ et en déduire la limite en 1 de la fonction (H – K) puis celle de H .

c. Montrer que pour tout réel $x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $\frac{x-\sqrt{x}}{lnx} \leq H(x) \leq \frac{2(x-\sqrt{x})}{lnx}$. En déduire la limite en $+\infty$ de H puis la limite en 0 et en $+\infty$ de l a fonction $\left[x \to \frac{H(x)}{x}\right]$. Interpréter graphiquement ces résultats ;

d . Dresser le tableau de variation de H .

Problème : 05

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$f(0) = 0,\ f(1) = 1$ Et $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0;1[$

.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère ortho normal $(O;\vec{i};\vec{j})$.Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$

A Etude de f

I-1) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ .Calculer f'(t) et montrer que f'(t) a le même signe que la fonction $\varphi(t)$, ou φ est la fonction définie sur $]0;1[$ par

$\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$.

3) Etudier les variations, puis le signe de f'.

II).Etudier la dérivabilité de f en 0.Que peut-on en déduire pour tangente a C au point O ?

1.) Prouver que pour tout élément u de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$.

En déduire que :

$0 \leq -\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{2u^3}{3}$.

2.) Soit g la fonction définie sur $]0;1]$

par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Prouver que pour tout h de $\left[-\frac{1}{2};0\right]$:

$0 \le g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \le \frac{2h^2}{3}$.

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1).

3.) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

III) Tracer la courbe C (unité graphique : 10cm)

B) Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]o;1]$, on pose :$I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et

$J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales)

I.) Soit K la fonction définie sur $]o;1]$ par

$K(x) = J(x^2) - J(x)$.

1.) Montrer que K est dérivable sur $]0;1[$ et que

$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$

2.) Prouver que pour tout x de $]0;1]$:

$f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$.

3.) En déduire que pour tout élément x de $]0;1[$:$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{lnt} dt$ (1).

II.) Calculer la dérivée de la fonction $t \to \ln(-\ln t)$ sur $]0;1[$.

En déduire que pour tout élément x de $]0;1[$ $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{lnt} dt = ln2$ (2).

III.) Prouver que pour tout x de $]0;1[$ et pour tout t de $]0;x[$:

$0 \le \frac{-1}{\ln t} \le \frac{-1}{\ln x}$.

En déduire que pour tout élément x de $]0;1[$: $0 \le \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{lnt} \le \frac{-x}{lnx}$. (3)

IV) A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0.

V) Etablir, pour tout x de]0 ; 1] :

$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$.

En déduire que $0 \le I - I(x) \le x$.

VI) Prouver finalement que $I = ln2$.

<u>Problème</u> : 06

Le problème propose l'étude d'une famille de fonctions (partie **A.)** , d'une suite (partie **B.)** et d'une courbe définie (partie **C.)** définies à partir des fonctions .

A .Etude d'une famille de fonctions.

On considère , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n , à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur l'intervalle $]0 , +\infty[$ par :

$f_n(x) = \frac{lnx}{x^n}$.

1. Déterminer les limites de f_n aux bornes de l'intervalle $]0 , +\infty[$.Etudier les variations de f_n .
2. Construire la courbe C_1 représentative de la fonction f_1 dans un repère orthonormé. Préciser ses asymptotes.
3. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1. On pose : $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$
   a. Calculer $I_1(x)$.
   b. En utilisant une intégration par parties, calculer $I_n(x)$ en fonction de n et de , pour n

supérieur ou égal à 2 . Déduire de ce résultat la valeur de l'intégral $\int_2^x f_2(t)\,dt$

c. Soit n un entier naturel non nul fixé. Calculer la limite de $I_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.(On distinguera deux cas n=1 et n$\geq$ 2). Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_2^x f_2(t)\,dt$.

B. Etude d'une suite définie à partir de f_n.

On considère la fonction f_2 définie en A. par : $f_2(x) = \frac{lnx}{x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k , k$\geq$ 2. : $f_2(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_2(t)dt \leq f_2(k)$. (On peut utiliser le sens de variation de f_2).
2. On considère la suite S définie par son terme général : $S_p = \frac{ln2}{2^2} + \frac{ln3}{3^2} + \cdots . + \frac{lnp}{p^2}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que la suite S est croissante .
   b. En utilisant B.1, montrer que : $S_p - \frac{ln2}{2^2} \leq \int_2^2 f_2(t)\,dt \leq S_p - \frac{lnp}{p^2}$ et en déduire un encadrement de S_p .
   c. En utilisant la valeur de $\int_2^p f_2(t)\,dt$ trouvée en A., montrer que la suite S est majorée.
   d. Montrer que la suite S est convergente et que sa limite L vérifie : $\frac{1}{2} + \frac{ln2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + \frac{3ln2}{4}$.

C. Etude d'une courbe définie para métriquement à partir de des fonctions de f_n.

On considère la courbe Γ_1 , définie para métriquement par :$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$

Où test un réel appartenant à l'intervalle $[1; 10]$.

a. Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à t associe respectivement $x(t)$ et $y(t)$.

b. Représenter la courbe Γ_1 dans un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 20cm). Préciser les points de Γ_1 en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

<u>Problème</u> : 07

<u>Partie A</u>

Le but du problème est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$$

Soit n un entier naturel positif .

Soit g la fonction définie sur $R - \{-1;1\}$ par $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2x$.

Soit f_n la fonction définie sur R par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1.) Montrer que (C) est symétrique par rapport à O .

2.a) Etudier g .

b) Montrer que (C) admet une asymptote oblique en plus et moins l'infini

c) Tracer (C) .

3.) Montrer que : $\forall$ x $\in$]0: 1 [, g(x) > 0 .

Partie B

1. Montrer que $\ln(\frac{f_n(x+n)}{f_n(x-n)}) = ng(\frac{x}{n})$.
2. En déduire que : $\forall$ x $\in$]0: n[, $f_n(n + x) > f_n(n - x)$.
3. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ de f_n .
   a) Montrer que $(x \to F_n(n + x))$ est une primitive de $(x \to f_n(n + x))$ et que $(x \to -F_n(n - x))$ est une primitive de $(x \to f_n(n - x))$.
   b) En déduire les égalités : $\int_0^n f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n - t)dt$ et $\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n + t)dt$
4. En déduire que :

$$\int_0^n f_n(t)dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt.$$

Partie C

1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.
   a. Calculer $I_1(x)$.
   b. Donner une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
   c. Montrer que par récurrence que : $\int_0^x f_n(t)dt\, n!(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!})$.
2. En déduire , pour n fixé , que : $\lim_{x\to+\infty}(\int_0^x f_n(t)dt) = n!$.
3. En déduire , à l'aide du B]4), que : $2\int_0^n f_n(t)dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt < n!$.
4. En déduire , à l'aide du C]1c) et 3), que : $\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.

Problème : 08

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n :

$$u_n(a) = \int_0^1 \exp(a(1-x))\, x^n\, dx$$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Convergence de la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$. Soit a > 0 donné.

a) Montrer que pour tout n dans **N** :

$$0 < u_n(a) < \frac{\exp(a)}{n+1}.$$

b) Montrer que la suite ($u_n(a)$) est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°) Forme explicite de $u_n(a)$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans **N** : $a.u_{n+1}(a) = -1 + (n+1).u_n(a)$.

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans **N** :

$$u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a) - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right].$$

Problème : 09 Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\, dx$, avec n appartenant à **N**.

1°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n $\geq$ 2, on a : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3°) Après avoir calculé I_0 et I_1, en déduire I_{2p} et I_{2p+1}, $p \in \mathbf{N}$.

4°) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a : $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$.

5°) En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{2.4.6.\ldots.2p}{1.3.5\ldots.(2p-1)}\right)^2.\dfrac{1}{2p+1}$ (formule de Wallis).

Chapitre 02 : suites de nombres réels

Exercice : 01 [Questions de cours]

A) Traduire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs$(\forall, \exists, \nexists, \dots)$.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = -\infty$

B) Démontrer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs$(\forall, \exists, \nexists, \dots)$.

1) Si (U_n) converge, alors sa limite l est unique.

2) Si (U_n) converge, alors (U_n) est bornée.

3) Si (U_n) bornée et (V_n) convergeant vers 0, alors (U_nV_n) converge vers 0.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

C) Montrer que les suites suivantes convergentes en utilisant le **« théorème de la limite monotone »**

a) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

b) $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

D) Montrer que la suite **Harmonique**

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$

E) Traduire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs $(\forall, \exists, \nexists)$.

a) La suite (U_n) est constante à partir d'un certain rang.

b) La suite (U_n) est croissante à partir d'un certain rang.

c) La suite (U_n) converge vers 0.

d) La suite (U_n) ne converge pas vers 0.

e) La suite (U_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

F) Relations de comparaison :

i) Soient deux suites (U_n) et (V_n) telles que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1\ ;\ \ V_n \leq 1$ et $U_nV_n \longrightarrow 1$.

Montrer que (U_n) et (V_n) convergent vers 1.

ii) Soit $U_n = \sum_1^n \sqrt{k}$, montrer que (U_n) diverge vers $+\infty$.

iii) Soit $V_n = \sum_1^n \frac{1}{n^2+k^2}$, montrer que (V_n) converge vers 0.

iv) Soit $W_n = \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, étudier le terme général de (W_n)

v) On considère deux suites à termes général strictement positifs, (a_n) et (b_n) qui convergent vers 0. Etudier la suite de terme général $\frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$.

Exercice : 02

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -3$ et pour tout naturel $n, U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée par 1.

b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice : 03

Soit la fonction définie par $g(x) = \ln(x+3)$.

1. Soit (U_n) la suite définie par :

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(U_n + 3) \end{cases}$, pour tout n entier .

a. En utilisant la croissance de g, étudier le sens de variation de la suite (U_n).

b. Montrer que la suite (U_n) est majorée par 2.

c. En déduire que cette suite converge vers un réel l.

2. Soit (V_n) la suite définie par :

$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \ln(V_n + 3)\ \textit{pourtout n entier} \end{cases}$

a. En utilisant la croissance de g étudier le sens de variation de la suite (V_n).

b. Montrer que la suite (V_n) est minorée par 1.

c. En déduire que cette suite converge vers un réel l'.

3. a. Montrer que l=l'.

b. En déduire une valeur décimale approchée de l à 10^{-3} prés.

Exercice :04

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit (v_n) la suite définie par définie, pour tout entier naturel n, par . $v_n = 4u_n - 6n - 15$

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Calculer V_0 puis calculer (v_n) en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n. $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.

c. Montrer que U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = t_n + w_n$ où (t_n) est une suite géométrique et (w_n) une suite arithmétique.

d. Calculer $T_n = t_0 + t_1 + \ldots.. + t_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \ldots. + w_n$

En déduire : $U_n = u_0 + u_1 + \ldots.. + u_n$.

EXERCICE 05 : [La suite de FIBONACCI]

Soient a ; b ; et c trois réels tels que $a \neq 0$. On considère l'ensemble (E) des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation $(\Re)$: $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$

1. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites vérifiant la relation $(\Re)$

2. Montrer que les suites $(v_n + w_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n - w_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation $(\Re)$

3. Montrer que pour tour réel $\alpha \neq 0$ et pour toute suite $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation $(\Re)$ la suite $(\alpha v_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation $(\Re)$

4. On admet dans la suite de cet exercice que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de (E) s'écrivent sous la forme $u_n = \alpha v_n + \beta w_n$ où $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ deux suites vérifiant la relation $(\Re)$.

Montrer qu'une géométrique de raison r est élément de (E) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$

5. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

a) Montrer que si $\Delta = 0$ alors les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de termes généraux $v_n = nq^n$ et $w_n = q^n$ où $q = -\frac{b}{2a}$ sont deux suites de (E). En déduire que si $\Delta = 0$ alors il existe deux réels α et β tels que $u_n = (\alpha n + \beta)\left(-\frac{b}{2a}\right)^n$

b) Montrer que si $\Delta > 0$ alors il existe deux réels r et r' tels que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ éléments de (E) sont de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta (r')^n$ où α et β sont des réels.

Applications à l'exo 05

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

a) Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\geq 0}$

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n$

c) Vérifier que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}$

- Déterminer l'ensemble (E) des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation $2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$.
- En déduire la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que
  - $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{3}{2}$

➢ $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{5}{2}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout n de ℕ ; $U_n =$ cos**Erreur !.**

b) Etudier la convergence de la suite (U_n)

Exercice : 06

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies sur N par : $u_0=9$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.

1.a Démontrer que la suite (v_n) est géométrique à termes positifs .

b. Calculer la somme $S_n = v_0 + ... + v_n$ en fonction de n .En déduire que $S'_n=u_0 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Déterminer $\lim\limits_{+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{+\infty} S'_n$.

1. On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout entier n .Démontrer que la suite (w_n) est arithmétique .Calculer la somme $S''_n=w_0 + \cdots + w_n$ en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{+\infty} S''_n$.
2. Calculer le produit $P_n=v_0.v_1 \dots v_n$ en fonction de n et calculer $\lim\limits_{+\infty} P_n$.

Exercice :07

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} =\frac{1}{3}(u_n +2v_n)$

$v_{n+1} =(u_n +3v_n)$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera

la raison.

b. Déterminer la limite de la suite w.

2. a. Montrer que la suite u est croissante.

b. Montrer que la suite v est décroissante.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même

limite que l'on appellera l .

4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n +8v_n$.

a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

b. Déterminer alors la valeur de l .

Exercice 08

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite de terme général :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in IN, \frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

2) En déduire que la suite U_n est convergente et déterminer sa limite

Exercice 09

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$$

1) a) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est majorée par 4

b) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est strictement croissante

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ converge et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que, on a : $\forall n \in IN$,

$$4-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-U_n)$$

b) Retrouver le résultat de 1-c)

3) a) Montrer que, par récurrence, que :

$$\forall n \geq 4 \quad ; \quad 2^n \geq n^2 \quad .$$

b) En déduire la convergence de la suite

$(V_n)_{n\in IN}$ définie par : $V_n = n(4-U_n)$

Exercice 10

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : U0 = 1 et

$U_n = 1+\dfrac{2}{U_{n-1}}$

1) Démontrer que : $\forall n \in IN \;\; U_n \geq 1$.

2) On considère les suites (V_n) et (W_n) telles que : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

a) Démontrer par récurrence que $V_n \geq 2$ pour tout n, et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

b) Prouver que (W_n) est décroissante et minorée par 2

3) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - W_n) = 0$. En déduire que (U_n) converge vers que l'on précisera.

Exercice 11

On donne une suite croissante $(q_n)_{n\in IN}$ d'entiers naturels telle que $q_0 \geq 2$. On construit la suite (U_n) par : $U_0 = \dfrac{1}{q_0}$;

$U_1 = \dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_0q_1}$;… ;$U_n = \dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_0q_1}+\ldots+\dfrac{1}{q_0q_1\ldots q_n}$

1) Montrer que (U_n) est croissante et peut être majorée par une suite convergente.

2) En déduire que (U_n) converge et sa limite est élément de $]0{,}1]$.

Exercice 12

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$\begin{cases} a_1 = 1 & a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \\ b_1 = 12 & V_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1) Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3

2) On pose $\alpha_n = b_n - a_n$

Démontrer que (α_n) est géométrique et préciser sa limite.

3) Après avoir étudié les sens de variation des suites (a_n) et (b_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire?

4) On considère à la suite (β_n) définie par : $\beta_n = 3a_n + 8b_n$.
Démontrer que cette suite constante, et en déduire la limite des suites (a_n) et (b_n)

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier

n strictement positif, par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)+\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

1) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier n strictement positif, $v_n = \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}$

Démontrer que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$

2)
a) Démontrer que chacune des fonctions numériques suivantes ne prend que des valeurs positives sur $[0;+\infty[$ $\quad f : x \mapsto x - \sin x$;

$g : x \mapsto -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x$;

$$h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

b) Sachant que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, démontrer que,

$\forall n \in IN^* \;\; v_n - \dfrac{1}{24}\dfrac{(n+1)^2}{n^4} \leq u_n \leq v_n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 14

On considère les deux suites à, termes strictement positifs (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots2n} \; ; v_n = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{3\times5\times\ldots\times(2n+1)}$$

On se propose ici de démontrer que ces deux suites sont convergentes vers 0.

1) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers l.

2) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge vers l'.

3) On considère à présent la suite (w_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$ par : $w_n = u_n v_n$.

a) Compte tenu de la convergence des suites (u_n) et (v_n)vers l et l ', que peut-on en déduire pour (w_n) ?

b) Déterminer l'expression de(w_n) en fonction de n, et en déduire l'égalité l l'= 0.

4) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n < v_n$.

5) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2u_{n+1} > v_n$.

En déduire l'inégalité 2 l ≥ l '

Exercice 15 : (Le parcours de l'indécis)

Partie I.

On considère un triangle ABC.

On désigne par h_A et h_B et h_C les homothéties de centres respectifs A , B et C et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Montrer que $h_C \circ h_B$ est une homothétie dont le centre est A' vérifie $\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Quel est le rapport de cette homothétie ?

2) Déterminer de même les centres respectifs B' et C' des homothéties $h_A \circ h_C$ et $h_B \circ h_A$.

3) On pose $f = h_C \circ h_B \circ h_A$, $g = h_A \circ h_C \circ h_B$ et $h = h_B \circ h_A \circ h_C$.

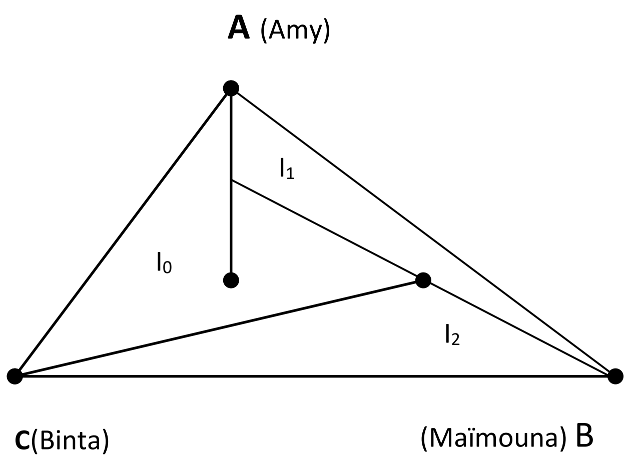
a) Montrer que f une homothétie dont le centre K appartient à (AA')et(CC') .

Quel est le rapport de f ?

b) Déterminer de même les centres respectifs L et K des homothéties g et h.

Partie II. Application : Le parcours de l'indécis

Momar a trois amies Amy, Maïmouna et Binta disposées comme sur la figure ci-dessous. Momar se dirige vers Amy ; à mi-chemin, il change d'avis et se dirige vers Maïmouna ; à mi-chemin, il change de nouveau d'avis et se dirige vers Binta ; à mi-chemin, il change encore d'avis et se dirige vers Amy ; et ainsi de suite.



On désigne par I_0 la position initiale de Momar,

I_1 sa position lorsqu'il change pour la première

fois d'avis, I_2 sa position lorsqu'il change pour la deuxième fois

d'avis et ainsi de suite.

1° Monter que $I_3 = f\left(I_0\right)$, $I_4 = f\left(I_1\right)$

et $I_5 = f\left(I_2\right)$

2° Soit n un entier naturel.

On pose $f^{(n)} = Id_P$, $f^{(1)} = f$ et, pour $n \geq 2$:

$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ldots fois \ldots f}$. Montrer que $\begin{cases} I_{3n} = f^{(n)}\left(I_0\right) \\ I_{3n+1} = g^{(n)}\left(I_1\right) \\ I_{3n+2} = h^{(n)}\left(I_2\right) \end{cases}$

3° En déduire que :

$$\overrightarrow{KI_{3n}} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{KI_0}$$

$$\overrightarrow{LI_{3n+1}} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{LI_1}$$

$$\overrightarrow{MI_{3n+2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^n \overrightarrow{MI_2}$$

Quelles sont les positions limites des points

I_{3n} , I_{3n+1} et I_{3n+2} lorsque n tend vers $+\infty$

Chapitre 03 : Calcul Intégral

Exercice 1 :

A) Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)\mathrm{dt}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\mathrm{t})\mathrm{dt}$;

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin(t)|\mathrm{dt}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)dx$;

$\lim_{x\to-\infty} \int_x^1 e^t dt$; $\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$;

$\int_1^x \frac{1}{t^n}dt$;

$\int_{-1}^1 \frac{x^{92}(\cos x)^{27}\sin x}{(x^2+1)^{28}}|x|dx$

f et g désignent des fonctions continues sur les intervalles considérés. Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant

Si $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$, alors $f \le g$ sur $[a; b]$.

Si $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$, alors $f = g + c$ sur $[a; b]$

$\int_a^b \frac{x^2e^x\ln(1+x^2)}{(1+x^4)}dx \ge 0$

B) On donne $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ et $g(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x+3}$

1) Trouver les réels a ,b et c pour que $f(x) = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-3}$
2) trouver les réels a, b et c pour que $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$
3) en déduire alors $\int_4^5 f(t)dt$ et $\int_0^2 g(t)dt$

C) **INTEGRALE DE WALLIS**

Soient $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^n dx$ et

$J_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$

1) calculer I_0 et I_1. Etablir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
2) calculer J_0 . Etablir une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n.
3) Trouver un réel α tel que : $\int_{-1}^1 (x^2-\alpha)dx = 0$. Trouver un réel β tel que $\int_{-1}^1 (x^4-\beta x^2)dx = 0$.
4) Etudier la limite suivante : $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t}dt$.
5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction I_n définie pour $x > 0$ par :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

Exercice 2 : [valeur moyenne]

A) Soit f le signale sinusoïdal $2\pi -$ periodique définie par $f(t) = \sin(t)$. Calculer la moyenne $\bar{f}$ définie sur $[0; 2\pi]$ par ainsi que la moyenne quadratique $\sqrt{\overline{f^2}}$ sur $[0; 2\pi]$.

B) [Lien avec l'électricité]

On appelle intensité efficace I_{eff} d'un courant alternatif, l'intensité d'un courant continu (on devrait plutôt dire"constant") qui produirait, à travers la même résistance R, le même effet calorifique pendant la durée d'une période T. Dans le cas d'un courant de type sinusoïdal :

si $I(t) = I_{max}\sin(\omega t)$ est l'intensité du courant à l'instant t du courant alternatif, la loi de Joule donne :

$$E(T) = R\, I^2_{eff} T = \int_0^T RI^2(t)dt$$

Démontrer que $I_{max} = \sqrt{2} I_{eff}$

Exercice 3 :

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ définie sur $]0;+\infty[$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis déterminer $F'(x)$.
2) Montrer $\exists! \alpha \in]0;+\infty[$ tel que $F'(x) = 0$. Dresser le tableau de variations de F

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que $\forall x \neq -1;\ 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^{n+1}}{x+1}$
2) En déduire que $\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{x+1} = \ln 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right]$

3)

a) Montrer que $\forall 0 \le x \le 1 \quad -(x)^n \le \frac{(-x)^n}{x+1} \le x^n$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

Exercice 5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$

1) Etudier les variations de f. Donner une primitive de f sur $[2;+\infty[$

2.

a) En utilisant le théorème de la moyenne sur $[k;k+1]$ (k≥2), montrer que $0 \le \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \le \int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} = 0$

Exercice 6 :

Soit f une fonction continue sur 3 n un entier naturel a et b deux réels

1. Montrer que si f est paire alors $\int_a^b f(t)dt = \int_{-b}^{-a} f(t)dt$
2. Montrer que si f est impaire alors $\int_a^b f(t)dt = -\int_{-b}^{-a} f(t)dt$
3. montrer que si f est périodique de période T alors :

$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ et

$\int_0^{nT} f(t)dt = n\int_0^T f(t)dt$

Exercice 7 :

Soit a un réel ; on considère $I(a) = \int_0^1 |x^2 + a| dx$.

1. Calculer $I\left(-\frac{1}{4}\right)$
2. Déterminer l'expression de I en fonction de a
3. Montrer que $\forall a \in IR \quad I(a) \ge I\left(-\frac{1}{4}\right)$

Exercice 8

1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t dt\right) dx = \frac{15\pi - 44}{1152}$
2. soit p et q deux entiers naturels non nuls :

a) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{p^k q^{n-k}}=\frac{q}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{n}}$$

b) On admet ici que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{p^k q^{n-k}}\right)=\int_0^1\left(\frac{p}{q}\right)^x dx.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{p^k q^{n-k}}\right)=\frac{p-q}{\ln p-\ln q}$$

3. Démontrer que

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx=\int_0^1(1-x)^n x^m\,dx$$

4. Soit f une fonction continue sur [a,b]

a) Montrer si $f(x)=f(a+b-x)$ alors

$$\int_a^b tf(t)dt=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$$

b) Montrer que si f est deux fois dérivable sur [a ; b] alors

$$\int_a^b tf''(t)dt=[bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)]$$

Exercice 9 :

Soit F une fonction définie sur $]0;+\infty[$

par : $F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$

1. Etudier les variations de F
2. Etudier le signe $F(x)-\ln x$ puis en déduire $\lim_{x\to 0^+}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

Exercice 10: [Inégalités de SCHWARTZ]

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et k un réel donné.

1. Déterminer le signe de $\int_a^b(f(t)+kg(t))^2dt$. En déduire que :

$$\left[\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt\right]^2\leq\int_a^b[f(t)]^2dt\int_a^b[g(t)]^2dt$$

2. On suppose que g ne s'annule pas et garde un signe constant sur [a ; b]

a) Montrer que qu'il existe deux réels m et M tels que :

$$m\leq\frac{\int_a^b[f(t)\cdot g(t)]dt}{\int_a^b g(t)dt}\leq M$$

b) En déduire qu'il existe un réel de [a ; b] tel que :

$$\int_a^b[f(t)g(t)]dt=f(c)\int_a^b g(t)dt$$

3. Montrer que si $\left|\int_a^b f(t)dt\right|=\int|f(t)|dt$ alors f a un signe constant sur [a ; b].

Exercice 11 :

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

1. Calculer I_0
2. Déterminer une formule de récurrence entre I_n et ;I_{n+1}
3. Montrer que $\forall n\geq 1$ on a $I_n\leq\frac{1}{n+1}$
4. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$

Exercice 12 :

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$$

1. Calculer I_0 ;I_1 et I_2
2. Trouver une formule de récurrence entre I_n et I_{n+1}
3. En déduire une expression de I_n en fonction de n

Exercice 13 :

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par :

$$I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}dt$$

1. Calculer I_0
2. Démontrer que $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$
3. Montrer que $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + .. + \frac{1}{2^n n!} + I_n$
4. En déduire que $\sqrt{e} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + .. + \frac{1}{2^n n!}\right)$

Problème 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

1) déterminer le domaine de définition de f
2)
a) Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}$$

b) Déterminer les variations de f
3)
a) Démontrer que $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\quad \frac{x}{\ln 2x} < f(x) < \frac{x}{\ln x}$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{0^+} f$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

4) Soit g la fonction définie sur]0;1] par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$
a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de son domaine de définition
b) En déduire $\exists! \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\ / \ g(\alpha) = 0$ et que $\forall x \in [\alpha; 1] \ \ln x \geq 2x - 2$
c) Montrer que $f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. En déduire alors $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$

d) dresser le tableau de variations de f puis donner l'allure d sa courbe représentative

---

Problème 2 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. On not par (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et par (Δ) la droite d'équation $y = x$

Partie A :

1) Montrer que f est continue et dérivable en 0
2)
a) Montrer que $\forall x < 0; \quad f'(x) > 0$
b) Etudier les variations de f ' sur $[0; +\infty[$; en déduire que $\forall x > 0 \quad f'(x) > 0$
c) Construire le tableau de variations de f
3) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
4) Montrer que (Γ) admet la droite $(D) = y = x + 1$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$. Préciser la position de (Γ) par rapport à (D)
5) Construire (Γ) on précisera $(\Gamma) \cap (\Delta)$

Partie B :

1) Déterminer les réel a ; b et c pour que $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad \forall x \geq 0$
2) En déduire au moyen d'une intégration par parties que f admet une primitive que l'on précisera.
3) Calculer l'aire du domaine délimitée par (Γ) ; (Δ) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = e - 1$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie C :

1. Démontrer que f admet une réciproque

2. Construire dans le graphique précédent la courbe (Γ') représentative de f^{-1}
3. calculer l'aire de la boucle délimitée par (Γ') et (Γ)

PROBLEME : 3

A-1) Soient f une fonction numérique dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$.

Soit (E) l'équation $xy'-2y=\ln x$; on dit que f est solution de (E) si et seulement si :

, $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[$:

$xf'(x)-2f(x)=\ln x$

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x\to\frac{\ln x}{x^3}$.

2) Quel est l'ensemble des primitives de la fonction : $x\to\frac{\ln x}{x^3}$?

(On pourra faire une intégration par parties).

3) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$x\to-\dfrac{1+\ln(x^2)}{4}+ax^2$, où a désigne une constante réelle arbitraire.

4) On désigne par φ la fonction :

$x\to-\dfrac{1+\ln(x^2)}{4}+\dfrac{1}{4}x^2$, où $\in\,]0\,;+\infty[$.

Etudier la variation de φ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

B-1) Soit λ un nombre réel strictement positif .

Calculer en fonction de λ l' intégrale :

$$\mathbf{I}(\lambda)=\int_\lambda^1\varphi(x)dx$$

2) Montrer que , lorsque λ tend vers 0 , $\mathbf{I}(\lambda)$ admet une limite égale à $\frac{1}{3}$.

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que , pour tout entier k tel que $1\le k\le n-1$ et pour tout réel x tel que :

$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{k}{n}\right) .$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) .$$

En déduire :

$$I\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right).$$

4) Déduire des questions 2) et 3) que , lorsque n tend vers l'infini , $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite finie , la calculer .

5) a) Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)-\frac{1}{4} :$$

b) Etablir les égalités :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ;$$
$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right)=\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$

6) a) Utiliser les résultats précédentes pour démontrer que la suite :$n \to \frac{1}{n}\ln(\frac{n^n}{n!})$ a une limite que l'on précisera .

Exercice : 14

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}dx$

1) En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ l'encadrement :$1 \leq f(x \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$. (1)
2) a)Démontrer que, pour tout nombre réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$:$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$
   b) En déduire que :
   $$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$$
   c)Calculer $J=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)\,e^{-x}dx$.
   d) Déduire de (1) que :$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$
   e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

Exercice : 15

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^n}dx$ $(n \geq 2)$.

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.
2) Etablir l'encadrement : $\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
   Indication : encadrer e^x par son minimum et son maximum sur[0; 1].
   En déduire la limite de la suite (I_n).
3) On pose $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$, $x \in [0;+\infty[$ et $(n \geq 2)$.
   a) Exprimer $f'_n(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.en déduire une relation entre I_n et I_{n+1} .
   b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)=1$.En déduire que la suite, de terme nI_n, converge et déterminer sa limite.

Exercice : 16

f est la fonction définie sur R par

$$f(t) = \frac{e^t}{e^t+1}$$

a. Etudier la fonction f .
b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère dans un repère
c. ortho normal

1. Pour tout réel , on note
   $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
   a. Interpréter géométriquement $F(x)$.
   b. Montrer que F est dérivable sur R et calculer F'(x)

2. G est la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $g(x)=\ln\left|\tan(x+\frac{\pi}{4})\right|$

   a. Calculer $F\circ G(0)$.

   b. Calculer , pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $(F\circ G)'(x)$ et en déduire que $(F\circ G)(x)=x$.

Exercice : 17

Pour tout n de N on considère les intégrales $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin x dx$ et

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\cos x dx$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Soit n un entier naturel non nul .
   a. En intégrant par parties I_n et J_n, montrer que I_n et J_n vérifient le système

$$\begin{cases} I_n+nJ_n=1 \\ -nI_n+J_n=e^{\frac{-n\pi}{2}} \end{cases}$$

   b. En déduire que , que pour n entier naturel non nul les expressions de I_n et J_n en fonction de n .
3. Déterminer : $\lim\limits_{+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{+\infty} J_n$.

Exercice : 18

Soit (I_n) la suite définie par :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^{2n+1}x}$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$,
$$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$$
En déduire la valeur de I_0.
2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 2nI_n=(2n-1)I_{n-1}+\frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

(On pourra écrire I_n sous la forme :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^{2n-1}x}\frac{1}{\cos^2 x}dx)$$

Exercice : 19

Soit (I_n) la suite définie par : $I_0=\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$
4. a) Calculer I_9 , I_{10} et I_{11} .
   b) en déduire que :
$$\frac{2^{17}}{3^4\times 7^2\times 11}\leq\pi\leq\frac{2^{16}}{3^4\times 5\times 7^2}$$

Exercice : 20

Si pour tout réel t tel que $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$: $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}(t)dt$ et $J_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2k}(t)dt$ où $k\in\mathbb{N}$.

1) Etablir l'inégalité suivante pour tout réel t tel que $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$: $t\leq\frac{\pi}{2}\sin(t)$;
2) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel $k\geq 0$, $0\leq J_k\leq\frac{\pi^2}{4}(I_k-I_{k+1})$.
3) Montrer que pour tout nombre réel $k\geq 0$: $I_{k+1}=\frac{2k+1}{2k+2}I_k$.

4) Déduire des questions précédentes que : $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{J_k}{I_k}=0$.

5) Montrer que, pour tout réel k tel que $k\geq 1$: $I_k=-2k^2J_k+k(2k-1)J_{k-1}$.

6) En déduire que, pour tout réel k tel que $k\geq 1$: $\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}}-\frac{J_k}{I_k}=\frac{1}{2k^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

Exercice : 20

On désigne par n un nombre entier relatif différent de -1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x)=\int_1^x t^n \ln t\,dt$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

2. En déduire le calcul de $J_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)^2\,dt$.

3. Calculer $I_n(e)-J_n(e)$.

4. déterminer la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice : 21

On pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$. Calculer I_2 .

3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1}\leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice : 22

Soit p et n des entiers naturels. On pose $I_{p,n}=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{n,1}$.

2. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.

3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{p,n}$ et $I_{p+1,n+1}$. En déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n.

b) En déduire que la limite $n\to\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ a une limite que l'on précisera.

Chapitre 04 : Equations différentielles linéaires

EXERCICE : 1
Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.
$a.)\,(E): y'-3y=0 \quad et \;\; y(0)=2$
$b.)\,(E): 3y'+y=0 \quad et \;\; y(1)=e$
$c.)\,(E): y'+y\ln 2=0 \quad et \;\; y(1)=1$
$d.)\,(E): y'=y \;\; et \;\; y(1)=-1$

EXERCICE : 2
Dans chacun des cas suivants, résoudre sur R l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.
$a.)\,(E): y''+2y'+y=0,\;\; y(0)=-1 \; et \;\; y'(0)=0$
$b.)\,(E): y''+16y=0, \qquad y(0)=0 \; et \; y'(0)=-1$
$c.)\,(E): y''-(\ln 2)^2=0,\;\; y(0)=1 \; et \; y(2)=1$
$d.)\,(E): 4y''+y=0, \qquad y(\frac{\pi}{3})=1 \; et \; y(\frac{\pi}{2})=1$
$e.)\,(E): y''+2y'-3y=0,\;\; y(0)=3 \; et \; y'(0)=-1$
$f.)\,(E): y''+y'+y=0, \quad y(0)=-1 \; et \; y(0)=\sqrt{3}$

EXERCICE : 3
On considère l'équation différentielle (E) :
$y'+2y=e^{-2x}$.
1. Vérifier que la fonction $g: x \to (x+1)e^{-2x}$ est solution sur R de (E).
2. Démontrer qu'une fonction $f+g$ est solution de l'équation de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'+2y=0$.
3. En déduire les solutions sur R de (E).

EXERCICE : 4 Soit la fonction
$f: x \to (x+1)e^{-2x}$.
1. Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur R de l'équation différentielle
(E) $y''+ay'+by=0$.
2. Démontrer pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de n de f est solution de (E).
3. Déterminer parmi les solutions de f , celle qui est solution de (E).

EXERCICE :5
Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.
a. Résoudre dans C , l'équation :
$z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$.
Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.
b. Résoudre l'équation différentielle :
$(1+\cos 2\theta)y''-2\sin 2\theta y'+2y=0$.

EXERCICE : 6
Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
.Résoudre sur R l'équation différentielle :
$(1+\cos 2\alpha)y''-2y'\sin 2\alpha+2y=0$.

EXERCICE : 7
1. Résoudre sur R l'équation différentielle (E)
$y''+16y=0$
2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(\frac{\pi}{4})=-2$ et $f'(\pi)=8$.
3. Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.

EXERCICE : 8
1. Résoudre sur R l'équation différentielle (E)
$y''+2y'+5y=0$.
2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$
3. On pose : $F(x) = -\dfrac{1}{5}\left[f'(x)+2f(x)\right]$
a. Démontrer que F est une primitive de f sur R ; expliciter $F(x)$.
b. En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

EXERCICE : 9
Soit l'équation différentielle (E) $y'+3y=10\cos x$.
.
a. Résoudre l'équation différentielle (F) :
$y'+3y=0$
b. Déterminer les nombres réels $\alpha \; et \; \beta$ tels que la fonction g définie par :
$g(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ soit une solution de l'équation (E)
c. Démontrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f-g$ est une solution de (F).

d. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

EXERCICE : 10

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})]dx$

à l'aide d'une équation différentielle :

1. Résoudre l'équation différentielle :

$y'' + 2y' + 2y = 0$ (E_1)

2. On considère l'équation différentielle

$y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E)

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in R$

$f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de l'équation (E) .

f désignant une numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.

b.Démonter que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1) .

En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).

Vérifier que la fonction f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ et

$f(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.

3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

EXERCICE : 11

1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur R de l'équation différentielle :

$y'' + y = 0$ (1).

2) Etant donné une fonction numérique de variable réelle x , g deux fois dérivable sur $\forall x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$.

Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3) On considère l'équation différentielle.

$y'' = -\frac{1}{x^4}y$ (2)

a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur R^* est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$ est solution de (1).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation de (2) définies sur chacun des intervalles et $]0, +\infty[$.

4) Soit g une solution de l'équation (2) définie sur $]0, +\infty[$.

5) Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

PROBLEME : 1

A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$y'' - 3y' + 2y = 0$ (E).

1. a) Quelles sont les solutions de (E) ?

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes .

2. Représenter , dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives .

3. λ étant un réel strictement positif , soit h_λ les fonctions telles que :

$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

a. Montrer que h_λ est solution de (E).

b. Soit C_λ la courbe représentative de h_λ.

Après avoir calculé ,en fonction de λ les coordonnées du point commun à des courbes C_λ et (C'),

montrer que ces courbes sont tangentes en ce point .

c. Préciser les positions relatives de C_λ et (C'.

B) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$ (E')

1. Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E').

2. On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E). En déduire les fonctions f solutions de (E').

3. Déterminer la solution de (E') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0 , 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

PROBLEME : 2

Partie A

1. (E_0) désigne l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Déterminer les solutions générales de (E_0).

2. (E) est l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

a. Vérifier que la fonction h définie sur R par $h(x) = x^2e^{-x}$

est solution de (E).

b. Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0).

c. Déterminer toutes les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0) = 4$ et $f'_0(0)=0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant 1 cm)

1. Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.

2. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur R.

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)dt$)

3. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n=\int_0^n f(t)dt$.

a. Exprimer I_n en fonction de n et interpréter graphiquement.

b. Etudier la convergence de la suite (I_n), puis en déduire l'aire de l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $x\leq 0$ et $0\leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul par

1. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul , on a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$

2. Etablir que , pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0\leq k \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

3. Démontrer que , pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$.

4. En déduire pour tout entier naturel n non nul on a : $I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

5. Déterminer la convergence de la suite u_n , puis préciser sa limite .

PROBLEME : 3 Partie : I On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle $(E_n): y'+y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$;

1) On fait l'hypothèse que deux fonctions f et g définies et dérivables sur R, vérifient pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire la fonction h associée à une solution de g de (E_n) ,sachant que h(0)=0.Quelle est alors la fonction g ?

2) Soit φ une fonction dérivable sur R.

a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F) : $y' + y = 0$.

b) Résoudre (F).

c) Déterminer la solution générale de l'équation (E_n).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant f(0)=0

Partie II : On pose pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

1) a)Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'+y = f_0$.

b) Pour tout entier n strictement positif on définit la fonction f_n comme solution de l'équation différentielle $y'+y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la partie I, montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$:

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$;

a) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

c) Montrer pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!}e^{-1}$;

d) Calculer I_0 et en déduire que :

$I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=}^{n}\frac{1}{n!}$

e) En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=}^{n}\frac{1}{k!} = e$

PROBLEME : 4

1. Soit l'équation différentielle : (E_m) : $my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.

a. Déterminer suivant les valeurs de m, l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur R solutions de l'équation (E_m).

b. Déterminer la solution (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées (0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $= -x$.

2. Soit f(t) la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t}\cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités (2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

3. Soit g le prolongement à R de f.

a. Comparer (t) et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g.

b. On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives respectives et (G) celle de g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part et à (G) et (C_v) d'autre part ?

c. Montrer qu'en chacun de ses points les deux courbes ont même tangente.

d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. On fait remarquer que $-1 \leq \cos t \leq 1$

4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)dt$.

a. Calculer a_k (on pourra faire deux fois une intégration par parties).

b. Pour tout entier n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|$.

Monter que la suite (S_n) admet une limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

5.

ans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe (Λ) définie par le système d'équations.

$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases}$; pour $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

a.

tudier les variations de x et y et dresser le tableau de variations conjointes.

b.

oit M_t le point de (Λ) de paramètre t et $\overrightarrow{V_t}$ le vecteur dérivé lui correspondant.

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et monter que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}; \overrightarrow{V_t})$ est constant.

c.

eprésenter graphiquement (Λ). On précisera les tangentes aux points de paramètre $-\frac{\pi}{2}$ et

Chapitre 05 : Courbes paramétrées

Exercice 1

Etudier et représenter graphiquement les courbes paramétrées suivantes :

1-) $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$, $t \in IR$; 2-) $\begin{cases} x(t) = 2 + \sin 2t \\ y(t) = 1 - \sin t \cos t \end{cases}$, $t \in IR$; 3-) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$, $t \in IR$;

4-) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{\sin t}{2+\cos t} \end{cases}$, $t \in IR$; 5-) $\begin{cases} x(t) = \tan\frac{t}{2} \\ y(t) = \sin t \end{cases}$, $t \in IR$; 6-) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$, $t \in IR$

Exercice 2

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = \frac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1. Soit t un réel dans $[-\pi;\pi]$ et m le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = e^{it}$.

1-)Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi;\pi]$$

2-)Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.

En déduire que (Γ) admet axe de symétrie que l'on précisera.

3-)Etudier les variations de $x(t)$ et de $y(t)$ sur $[0;\pi]$.

4-)Dresser le tableau de variation simultané de x et y sur $[0;\pi]$.

5-)Placer les points de (Γ) correspondants aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale).Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0,\pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. A tout point T de (C), on associe la mesure principale θ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OT})$ et le projeté orthogonal M du point $A(1;0)$ sur la tangente en T à (C).

1-)Montrer que les coordonnées de $M(x(\theta), y(\theta))$ sont :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos^2\theta + \cos\theta + 1 \\ y(\theta) = \sin\theta(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

2-)Etudier les variations de x et y sur $[0,\pi]$.

3-)On note (Γ) la courbe décrite par M lorsque T décrit (C).

a-)Montrer que $\in (\Gamma)$. (On admettra que (OA) est la tangente en A à (Γ)).

b-) Tracer (Γ) dans le repère.

Exercice 4 [La conchoïde de Nicomède]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère la droite (Δ) d'équation $x = 1$. Une droite (D) variable, passant par O, coupe la droite (Δ) en A. On note M le point de (D) tel que $AM = 2$, A étant situé sur le segment [OM].

La courbe (C), lieu géométrique des points M lorsque (D) varie, est appelée la **Conchoïde de Nicomède.**

1-)On note t la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$. Montrer que (C) admet une représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = \tan t + 2\sin t \end{cases}, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

2-)a-)Vérifier que (C) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ puis tracer la courbe (C) .

Exercice 5 [Spiral logarithmique]

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe paramétrée (Γ) définie par le système d'équations paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\sin t \end{cases},\ t\in IR$$

1-)Par quelle transformation passe-t-on de $M(t)$ à $M(t+2\pi)$ et à $M(t-2\pi)$?

2-)Etudier les variations $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ pour $t\in[0;2\pi]$ et dresser le tableau de variation conjointe.

3-)Construire la courbe représentative de (Γ) constituée des points M(t) pour $t\in[0;2\pi]$

4-)Déduisez-en la partie de la courbe de (Γ) constituée des points M(t) pour $t\in[-2\pi;2\pi]$

5-)Soit M_t le point de (Γ) de paramètre t et $\vec{V_t}$ le vecteur dérivé lui correspondant.

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM_t},\vec{V_t})$ est constant.

Exercice 6

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal .Un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB=1$.On note M le projeté orthogonal de O sur [AB] .On se propose de déterminer le lieu géométrique (C) des points M lorsque A et B se déplacent chacun sur son axe .

1-)On note (x, y) les coordonnées du point M et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},-\vec{i})$.

Montrer que (C) est l'ensemble des points M(t) de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t)=\cos t\sin^2 t \\ y(t)=\sin t\cos^2 t \end{cases},\ t\in IR$$

2-)Pour tout $\in IR$, comparer la position des points :M(t) et $M'(t+2\pi)$; M(t) et $M'(-t)$; M(t) et $M'(\pi-t)$; M(t) et $M'\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$.

En déduire qu'il suffit de faire l'étude pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et construire la partie de la courbe de (C) correspondante. Indiquer les transformations qui permettent de compléter la courbe.

3-)Etudier les variations de x et y sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

4-)Tracer la courbe (C) en précisant les points où la parallèle à l'un des axes ainsi que les tangentes à l'origine.

Exercice 7 [Strophoïde de droite]

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ .On considère le cercle (C) de centre I et de rayon 1 et la droite (Δ) d'équation x=1.Une droite variable (D) passant par O coupe le cercle (C) en A et la droite (Δ) en A' .

On note M le point de (D) tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AA'}$ .La courbe (S) lieu géométrique des points M lorsque (D) est une **strophoïde de droite**.

Paramétrage N1

1-On note t la pente de la droite (D).

Montrer que les coordonnées de M sont données par :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y(t)=\dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1} \end{cases}\quad t\in IR$$

a-)Vérifier que S admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

b-) Etudier les variations des fonctions $t\to x(t)$ et $t\to y(t)$ pour $t\in[0,+\infty[$, et construire la courbe S.

2-) Calculer la distance de M à la droite (Δ), puis la limite de cette distance lorsque $t\to+\infty$. Interpréter graphiquement.

Paramétrage N2

1) On θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ .Montrer que les cordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x(\theta) = -\cos 2\theta \\ y(\theta) - \sin 2\theta + \tan\theta \end{cases} \quad , \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

(On évaluera l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{IA})$)

2)a)Vérifier que (S) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie .

b) Etudier les variations des fonctions $\theta \longmapsto x(\theta)$ et $\theta \longmapsto y(\theta)$ pour $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

c)Construire la courbe (S) dans le repère .

3) Calculer la distance de M à la droite (Δ) puis la limite de cette distance lorsque θ tend vers $+\frac{\pi}{2}$

Exercice 8 [Courbe de Bézier]

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0),(0,1)$ et $(1,1)$ .A tout réel $t \in [0,1]$ on asocie le point $M(t)$, barycentre du système $\{(B,(1-t)^2),(A,2t(1-t)),(C,t^2)\}$ .On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$, (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0,1]$.

1)a)Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.

b) Dresser le tableau de variations conjointes de x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3) Trouver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t .On calculera y en fonction de x et on posera $y = f(x)$ .La fonction f est-elle dérivable à gauche au point d'abscisse 1 ?

Exercice 9

On considère un cercle (C) de diamètre [OA] et la droite (D) tangente à (C) en A. Pour tout point M de (C) distinct de O , la droite (OM) coupe (D) en Q .Soit P le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$.

On se propose de déterminer le lieu géométrique Γ de P lorsque M décrit (C) privé de O.

On pose $OA = 2a$ $(a > 0)$ et on rapporte le plan au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2a}\overrightarrow{OA}$ Soit θ la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.

1-)Déterminer les coordonnées de M en fonction de θ .

2-)En déduire les coordonnées de P en fonction de θ .

3-)Etudier puis construire courbe Γ .

Exercice 10 [Cardioïde]

Le plan est du repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.Soit (C) la courbe paramétrée de représentation paramétrique donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \quad , \ t \in IR$$

1-)En utilisant la parité et la périodicité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ réduisez l'intervalle d'étude et déterminer les symétriques de la courbe (C)

2-)Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$

3-)a) Montrer que, si $t \neq \pi$, la droite $\overrightarrow{OM_t}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$.

b) Déduisez en la tangente au pont $M(\pi)$ de la courbe (C) puis tracer (C).

Exercice 11 [cycloïde]

Soit (Φ) la courbe de représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases} , \ t \in IR$$

1-)Comparer les coordonnées des points $M(t)$ *et* $M(t+2\pi)$ et montrer que ces points ce correspondent dans une translation. Déduisez en l'intervalle d'étude utile

2-)Etudier les variations de $x(t)$; $y(t)$ et calculer le vecteur dérivée $\vec{V}(t)$

3-)On suppose ici que t est non nul, montrer que la droite (OM_t) admet un vecteur directeur $\vec{u}(t)=\frac{1}{t}(1-\cos t)\vec{i}+\frac{1}{t}(\sin t)\vec{j}$ .déterminer les limites des coordonnées de $\vec{u}$ et déduisez en la tangente en O à la courbe (Φ)

Exercice 12

1-)On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{e^{-x}\cos x}{2+\sin x}$.

f étant une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose : $g(x) = e^{x}f(x)$.

a-)Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$.

b-) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

2-)Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \quad ; \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a-)Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

b-) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + \pi\right]$.

c-) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe (Γ) .

Chapitre 06 : Coniques : Parabole, Hyperbole, Ellipse

Exercice 0[Application directe du cours]

A) Dans le plan mini d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ soit la courbe
$(\mathcal{P})$: $x^2+y^2+2x-2y+2=\frac{1}{25}(3x+4y+2)^2$. montrer que $(\mathcal{P})$
Est une parabole et déterminer ses éléments caractéristiques.

B) Construire la directrice $(\mathcal{D})$ d'une parabole $(\mathcal{P})$ en connaissance le foyer F de $(\mathcal{P})$ et deux tangentes $(\mathcal{T}1)$ et $(\mathcal{T}1)$ à $(\mathcal{P})$.

C) Construire la directrice $(\mathcal{D})$ d'une parabole $(\mathcal{P})$ en connaissance le foyer F de $(\mathcal{P})$ et u point A de $(\mathcal{P})$ et sachant que $(\mathcal{D})$ est parallèle à une droite donnée (Δ).

D) Soit une affinité orthogonale $\mathcal{A}\left(\mathcal{D},\frac{1}{2}\right)$ et $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon 5.tracer l'image de $(\mathcal{C})$ par $(\mathcal{A})$.

E) Montrer que si $a>b$, alors l'ellipse (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est l'image de son cercle principal $\mathcal{C}(O,a)$ par l'affinité orthogonal d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$.

F) On considère l'ellipse (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $a>b$ M et N sont deux points variables de (E) tels que $(OM)\perp(ON)$.

1) Montrer que $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ est constante
2) Soit H le projeté orthogonal de O sur (MN) ? déterminer le lieu géométrique de H lorsque M et N varie sur (E)de tel sorte que $(OM)\perp(ON)$.

G) Dans le plan mini d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ soit la courbe (Γ): $13x^2+13y^2-10xy=36$ déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice : 1

Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice.

a) $y^2=4x$; b) $x^2=6y$; c) $y^2=-8x$; d) $x^2=-3y$

b) Montrer que les courbes (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations respectives : $y^2=5x-1$ $x^2-4y+2x-1=0$ et $y^2-x+y=0$ sont des paraboles dont on précisera les éléments caractéristiques.

c) Vérifier que le point A(1,2) appartient à (P_3) et déterminer l'équation de la tangente T à (P_3) en A.

d) Déterminer les coordonnées du point B appartenant à (P_3) tel que la tangente à (P_3) en B soit perpendiculaire à T.

Exercice : 2

1) Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, l'équation d'une directrice et l'excentricité.

a) $4x^2-36y^2=121$ b) $-9x^2+4y^2=196$ c) $2x^2-2y^2=1$;

2) Identifier les ensembles des points M(x, y) tels que :

a) $x=\frac{2}{\cos t}$ et $y=3\tan t$ et $t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) $x=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$ et $y=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ $t\in\mathbb{R}^*$

c) $x=\frac{1}{\cos 2t}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t$ et $t\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

Exercice : 3

1) Identifier les ensembles des points M(x, y) tels que :

a) $x=5\cos t$ et $y=3\sin t$, $t\in\mathbb{R}$

b) $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ et $y=\frac{e^{t}}{e^{2t}+1}$, $t\in\mathbb{R}$

Exercice : 4

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation :

1) $x^2+4y^2+2x=1$
2) $x^2-8y^2+2x-16=1$
3) $x^2+4y^2+2x=1$
4) $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$, $m\in\mathbb{R}$
5) $y^2-4y=2x-\frac{x^2}{m}$, $m\in\mathbb{R}^*$

Exercice 5

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit (C) la courbe d'équation : $x^2-3y^2+8x+12y+16=0$.

1. Démontrer que (C) est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, foyers et directrices associées, etc ...

Tracer (C).

2. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$.
On désigne par d(M,D) la distance du point M à la droite (D).
Soit P le point de coordonnées (-4,6) ; d(M,P) désigne la distance de M `a P.
Quel est l'ensemble des points M du plan (P) tels que d(M,P)=2 d(M,D) ?

Exercice 6

Soit α un réel de l'intervalle] 0, π [. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

(E) $z^2 \sin^2 \alpha - 4z \sin \alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0$.

1. Résoudre (E).
2. On désigne par M' et M'' les images des racines z' et z'' de l'équation (E) dans un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ du plan complexe.

Montrer que, lorsque α varie, l'ensemble des points M' et M''est une branche d'hyperbole (H).
Préciser les éléments caractéristiques de (H) et dessiner la branche d'hyperbole en question.

Exercice 7

Soit $\alpha \in IR$, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'ensemble C_α des points M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que $x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0$

1. Discuter en fonction de α du genre de la conique.
2. Préciser l'ensemble C_0.
3. Préciser les ensembles C_1 et C_{-1}.
4. On considère le repère $R_\theta\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ obtenu par rotation d'angle θ de R, on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour que le terme en XY de l'équation $C\alpha$ dans ce repère soit nul ? Quelle est alors l'équation de C_α .

6. En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \frac{1}{2} et\, \alpha = 2$.

Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère l'ensemble (C) des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$25(x^2 + y^2) = (3x\text{-}16)^2$ (1)

1-En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (C) est une conique de foyer 0 et de directrice la droite Δ d'équation $x = \frac{16}{3}$.. Donner la nature et l'excentricité de (C). Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de(C) et θ une mesure de l'angle$\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.

2-a Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b- Démontrer que OM= $\frac{16}{5+3\cos\theta}$.

3- On suppose ici que θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. . La droite (OM) coupe Δ en 1 et recoupe (C) en un point M'.

a- Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b- Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$.

Exercice 9

On appelle Γ l'ensemble des points du plan (P) dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$.

1° On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et on considère la transformation g de (P) dans (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point g(M) d'affixe jz.
Montrer que g est une rotation de centre O et de d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2° On désigne par (H) l'ensemble des points M de (P) d'affixe z vérifiant $\mathrm{Re}\left(z^2 = 1\right)$. Définir la nature de ensemble (H) et le tracer.

3° Soit M un point d'affixe z.

Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ si et seulement si $\mathrm{Re}\left[(jz)^2\right]=1$.

4° Montrer que (H) est l'image de Γ par la transformation g.
En déduire la nature de Γ et tracer Γ sur la figure précédente.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $2x^2+y^2+xy=10$.

1° Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\left(O,\vec{i}',\vec{j}'\right)$ dans lequel l'équation de (E) est de la forme $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

2° En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E). Construire (E).

Exercice 11 Construction géométrique des foyers et directrice

1° cas de l'ellipse : Soit (E) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $0<b<a$, dans le repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, A et A' les sommets sur l'axe focale, F et F' les foyers. La perpendiculaire en F à l'axe focale coupe le cercle (C) de diamètre [AA'] en U et U', la tangente en U à (C) coupe l'axe focal en T. Démontrez que T est le pied, sur l'axe focal, de la directrice associée à F.

2° cas de l'hyperbole : Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, A et A' les sommets de (H), F et F' les foyers, (C) le cercle de diamètre [AA'], (Δ) et (Δ') les asymptotes. La tangente à (C) coupe (Δ) en E.

a) Calculez OE. Déduisez-en une construction de F et F', à la règle et au compas, à partir de A et A' et des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points communs à (C), (Δ) et (Δ').

3° Appliquez les résultats précédents à la construction géométrique des foyers et directrices des coniques d'équation :
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ et $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Exercice 12

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan (P) dont l'affixe z vérifie :
$10z\bar{z}+3\left(z^2+\bar{z}^2\right)=4$ où $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué de z. Indiquer ses foyers F et F ', ainsi que ses directrices.
2) Soit f la composé de l'homothétie de centre O et de rapport 2, et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer une équation de (E ') image de (E) par f. Montrer que (E ') est une ellipse de foyers f(F) et f (F ').

Exercice 13

Soit D une droite du plan et F un point dont la distance à D est égale à 3, l'unité étant le centimètre.
Soit Δ la droite passant par F et orthogonale à D
On considère θ un réel tel que $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$..

1. / Soit Γ_θ l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH}=\cos\theta$., H désigne le projeté orthogonal de M sur D.
Donner suivant les valeurs de θ la nature de Γ_θ.

2. / Tracer Γ_θ cas où $\theta=0$

3. / a) Soit $\theta=\frac{\pi}{3}$. Déterminer les sommets A et A ' de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ situés sur Δ, le centre O et le deuxième foyer F ', de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$. Tracer $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ dans le repère orthonormal $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ où O est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite Δ.

Exercice 14

Soit (I) une parabole de foyer F (- 1, 0) et de directrice (D) : y = x.

1) Déterminer une équation cartésienne de (I).
2) Donner l'équation réduite de (I).

Exercice 15

1) On donne la courbe (E) d'équation :
$5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$.

a) Montrer que. (E) est une conique et déterminer sa nature

b) Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité de cette Conique.

2) On considère la courbe H d'équation :
$x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$.

a) Montrer que H admet un centre de symétrie, noté Ω, et que H est une conique, dont on déterminera la nature.

b) Déterminer les sommets, les foyers, les directrices, l'excentricité et les asymptotes de H.

3) On donne : (P1) : $x^2 - x + 2y + 2 = 0$ et (P2) : $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Donner l'équation réduite de ces courbes, et en déduire la nature, ainsi que les éléments Caractéristiques de chacune d'elles.

Exercice 16

A tout point M d'affixe z non nulle du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z ' telle que :
$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z ' soit un nombre réel.
2) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

a) Vérifier que : z = 2 $e^{i\theta}$ $(\theta \in IR)$.

b) Démontrer que M' décrit une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 17

Dans le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité 2 cm, on considère la courbe (Σ) d'équation :
$4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0$.

1) a) déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Σ).
b) Tracer (Σ).

2) Soit M un point de (Σ) d'affixe z = x + iy, x et y étant des réels.

a) Démontrer que : $|z| = \frac{1}{2}(3 - y)$.

b) En déduire que : $|z| = \frac{3}{2 + \cos\theta}$, θ étant un argument de z.

3) a) Soit M ' et M '' deux points de d'affixes respectives et z '' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$. Calculer la distance M'M'' en fonction de θ.

b) Déterminer M'M'' si OM' = 2.

Exercice 18

Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace orienté, $M(x, y, z)$ un point de l'espace, H son projeté orthogonal sur la droite (AB).

1) On désigne par G l'isobarycentre de A, B et C.
a) Vérifier que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).
b) Vérifier que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OG}$; en déduire que $\left|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} MH$.
c) Calculer en fonction de x, y et z la distance MH du point M au plan (ABC).

2) a) Exprimer MK en fonction $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\|$.
b) En déduire : $MK = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2 + (1 - x - y)^2}$.

3) On se place dans le plan (OAB) et on considère l'ensemble (E) des points de ce plan qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).
a) Montrer que (E) ne contient aucun point de la droite (AB).
b) Soit M un point de (OAB) n'appartenant pas à (AB). Calculer la valeur du rapport $\frac{MH}{MK}$.
c) En déduire que (E) est une conique dont donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

Exercice 19 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère la courbe (P) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^2 + t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) a) Montrer qu'en tout point $M(t)$ de paramètre t de (P) passe une tangente (T) dont on déterminera les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}(t)$ en fonction de t.
b) Déterminer une équation cartésienne de (P) et en déduire que(P) est une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.
c) Soit m le projeté orthogonal de $M(t)$ sur l'axe des ordonnées et F le point de coordonnées $(2, 0)$.
Montrer que la tangente (T) à (T) en $M(t)$ est la médiatrice du segment [Fm].

2) On veut démontrer géométriquement certaines propriétés de la tangente (T) à la parabole (P) en un point M.

a) Soit M un point de (P) distinct de son sommet, (T) la tangente à (P) en M. On note T_0 le point d'intersection de (T) avec la directrice de (T). A l'aide de la réflexion S_T d'axe (T), démontrer que le triangle T_0FM est rectangle.

b) Soient (T) et (T') deux tangentes à (P) non parallèles à la directrice, Ω leur point d'intersection.
En utilisant la composée $S_T \circ S_{T'}$ des réflexions d'axes (T) et (T'), démontrer que (T) et (T') sont perpendiculaires si et seulement si Ω appartient à la directrice de (P).

Chapitre 07 : Dénombrement

Exercice 01
Dans une classe, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'espagnol.30 élèves étudient l'espagnol, 20 élèves étudient l'anglais et 15 élèves étudient les deux langues.
Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Exercice 02
Soient X, Y et Z trois localités, X et Y sont liées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?

Exercice 03
Fatou a dans sa garde-robe 2 vestes, 5 jupes et 3 chemisiers. Elle choisit au hasard une veste, une jupe et un chemisier pour s'habiller. Combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 04
Dans une classe de première sont étudiées les langues suivantes : anglais, allemand, espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue :
5 élèves étudient les trois langues, 7 étudient l'anglais et l'allemand, 8 étudient l'anglais et l'espagnol, 9 l'allemand et l'espagnol, 20 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 18 l'espagnol. Il y a combien d'élèves dans cette classe ?

Exercice 05
Quatre routes relient les villes A et B, trois routes relient B et C, cinq routes relient C et D. Combien y a-t-il de chemins différents pour aller de A à D en passant par B et C ?

Exercice 06
Dans une classe, on demande aux élèves de choisir une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou physique). Dans un groupe d'élèves, 12 élèves choisissent physique, 15 la chimie et 16 l'allemand. Par ailleurs, 8 ayant choisis la physique et 3 ayant choisis l'informatique étudient l'anglais, 6 ayant choisis la chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des élèves par discipline ainsi que le nombre total d'élèves dans le groupe.

Exercice 07

a) Combien forme-t-on de nombres à cinq chiffres ?
b) Combien forme-t-on de nombres à cinq chiffres tous distincts ?

Exercice 08
Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefours munis de feux de signalisation ; chaque feu peut être rouge ®, vert (V) ou Jaune (J).
On appelle « trajet » de l'automobiliste un ensemble ordonné de quatre lettres choisies parmi R, J, V (ex : RJJV)

a) En utilisant un arbre (éventuellement incomplet), calculer combien il existe de « trajets » possibles.
b) L'automobiliste s'arrête si un feu est rouge ou Jaune. Combien y a-t-il de « trajets » pour lesquels l'automobiliste s'arrête au moins une fois ?
c) Combien y a-t-il de « trajets » pour lesquels les deux premiers feux sont rouges ?

Exercice 09
On attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze à l'occasion d'une compétition sportive regroupant 20 athlètes. Combien y a-t-il d'attributions possibles ? (on suppose qu'il n'ait pas d'ex-aequo)

Exercice 10
Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.
Combien de comités différents peut-on élire ? (on suppose qu'il n'ait pas cumul de fonction)

Exercice 11
Une urne contient 10 boules sur lesquelles ont été marquées les cinq lettres de l'alphabet de A à J. On tire **successivement 3 boules sans remise** et on inscrit dans l'ordre les lettres portées par les boules tirées.
Combien de mots de 3 lettres ayant un sens ou non, peut-on former ?

Exercice 12
Un porte manteau comporte 5 pantéres différents.

a) Combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ?

b) Combien de façons peut-on y accrocher 4 manteaux différents ?

<u>Exercice</u> 13

a) Combien d'anagramme peut-on former du mot « DIOP » ? du mot « anagramme » ?

b) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?

<u>Exercice</u> 14

Les 24 élèves d'une classe de TS2 décident de s'inscrire au concours par Minitel. Il faut une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ?

<u>Exercice</u> 15

1) Dénombrer les anagrammes du mot : « FATICK »

2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot FATICK :

   a) Commençant et finissant par une consonne ;
   b) Commençant et finissant par une voyelle ;
   c) Commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   d) Commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

<u>Exercice</u> 16

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 4 rouges, 3 vertes et 3 noires.
On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien y a-t-il de tirages comportant 2 boules de même couleur ?

c) Combien y a-t-il de tirages comportant au moins une boule rouge ?

d) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?

<u>Exercice</u> 17

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes et on appelle une « main » l'ensemble ainsi obtenu.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?

2) Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant :

   a) le valet de trèfle ?
   b) exactement deux cœurs ? (il y a 8 cœurs dans le jeu)
   c) au moins un roi ? (il y a 4 rois dans le jeu)
   d) ni le roi de trèfle, ni un pique ?

<u>Exercice</u> 18

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes, 2 boules vertes. On tire au hasard trois boules simultanément.
Déterminer le nombre de tirages comportant :

a) 3 boules de la même couleur ?

b) 1 boule de chaque couleur ?

c) 3 boules de deux couleurs différentes seulement ?

<u>Exercice</u> 19

Samba et Modou font partie de club de lutte du lycée de 10 personnes. On doit former un groupe de 5 d'entre eux pour représenter le club à un tournoi de lutte.

a) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?

b) Dans combien de ces groupes peut figurer Modou ?

c) Modou et Samba ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Samba et Modou ne se retrouvent pas ensemble ?

<u>Exercice</u> 20

Un jury de 3 membres est composé d'un président, d'un vice-président et d'un assesseur tirés au sort parmi un groupe de 30 personnes (12 femmes et 18 hommes).

1) Combien de jury peut-on constituer ?

2) Combien de jurys peut-on constituer sachant que :

   a) le poste de vice –président doit être occupé par une femme ?
   b) le président est une femme et l'assesseur un homme ?
   c) Le président et le vice-président sont de sexes différents ?

<u>CONSOLIDATION DES CONNAISSANCES</u>

<u>Exercice 1 :</u>

Une urne contient 6 boules rouges, 4boules noires, 2boules jaunes. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer le nombre de tirages dont la première boule est noire.

3) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur.

4) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules de couleurs différentes.

Exercice 2 :

Une urne contient 12 boules. On tire trois boules de cette urne.
Déterminer le nombre de tirages dans les trois cas suivants :

a) les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne ;

b) les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne ;

c) les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice 3 :

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules blanches. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne.
Déterminer le nombre de tirages dans les deux cas suivants :

a) les trois boules tirées sont de la même couleur ;

b) la première et la troisième boule tirée sont vertes.

Exercice 4 :

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 blanches. On tire simultanément 3 boules de cette urne.
Déterminer le nombre de tirages dans les deux cas suivants :

a) une des boules au moins est blanche ;

b) il y'a au plus deux couleurs distinctes dans le tirage.

Exercice 5 :

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 couleurs : Pique, Cœur, Carreau et Trèfle contenant chacune l'As, le Roi,
La Dame, le valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.il y'a donc 8 piques, 8 cœurs, 8carreaux et 8 trèfles.
On tire simultanément 5 cartes. Déterminer le nombre de tirages dans les cas suivants :

a) les 5 cartes sont quelconques

b) il y' a exactement 2 As parmi les 5 cartes

c) il y'a au moins 1 As parmi les 5 cartes

d) les 5 cartes sont de la même couleur

Exercice 6 :

A) Une urne contient5 boules blanches numérotées B_1,…..B_5 et 4 boules noires numérotées N_1,…..N_4.
On tire successivement 4 boules en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

1) Combien y'a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y'a-t-il de tirages unicolores ?
3) Combien y'a-t-il de tirages comportant plus de boules noires que de blanches ?
4) Combien y'a-t-il de tirages comportant autant de boules blanches que de boules noires ?

B) On tire successivement 4 boules sans remettre dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

1) Combien y'a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien y'a-t-il de tirages unicolores ?
3) Combien y'a-t-il de tirages comportant autant de boules noires que de blanches ?
4) combien y'a-t-il de tirages comportant 3 boules blanches et une boules noire dans cet ordre ?
5) combien y'a-t-il de tirages comportant 3 boules blanches et une boules noire dans ?
6) combien y'a-t-il de tirages où la deuxième boules tirée est noire ?

Exercice 7 :

Un jury de concours est constitué de 8 membres désignés par tirage au sort dans une liste de 20 noms, comportant 11 femmes et 9 hommes. Aicha et Gorgui sont deux personnes de cette liste.
Combien y 'a-t-il de jury :
a) différents ? b) comportant seulement deux femmes ? c) comportant 5 femmes et 3 hommes ?
d) comportant Gorgui ? e) comportant Aicha ? f) Comportant Aicha et Gorgui ? g) Comportant Aicha ou Gorgui ? h) Comportant Aicha ou bien Gorgui ? i) Comportant ni Aicha ni Gorgui ?

Exercice 8 :

Chacun des 50 élèves d'une classe étudie un ou deux langues. On a relevé que 40 étudient l'anglais et 25 étudient l'espagnol.

1) Combien d'élèves étudient les deux langues ?

2) Combien d'élèves étudient uniquement l'anglais ? Uniquement l'espagnol ?
3) Combien d'élèves étudient au moins une langue?
4) Combien d'élèves étudient une langue et une seule?

Exercice 8 :

On jette trois fois un dé à six faces numérotés de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure. Déterminer le nombre de résultats :

a) en tout ; b) comportant 3 chiffres identiques ; c) comportant exactement deux chiffres identiques ;
d) comportant au moins un chiffre 1 ;
e) comportant exactement un 1 ;
f) pour les quels la somme des chiffres est égale à 6.

Exercice 9 :

De combien de manières différentes peut-on placer six personnes autour d'une table ronde dans les cas suivants :

1°) Les places sont numérotées ?
2°) Les places ne sont pas numérotées ?

Exercice 10 :

1) Démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer 10!)
2) Démontrer que pour tout entier k :
$(k + 1)! - k! = k \times k!$
Puis que pour tout entier n non nul :
$n! = 1 + \sum_0^{n-1} kk!$

Exercice 11 :

1°) Montrer que, pour n et p entiers naturels, avec $p \leq n - 2$, on a :

$$C_n^p + 2\,C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}.$$

2°) Montrer que, pour n et p entiers naturels, avec $p \leq n - 3$, on a :

$$C_n^p + 3\,C_n^{p+1} + 3\,C_n^{p+2} + C_n^{p+3} = C_{n+3}^{p+3}.$$

Exercice 12 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (1 + x)^n$, où n est un entier naturel .

1°) En utilisant la dérivée de f, calculer

$$S_1 = C_n^1 + 2\,C_n^2 + 3\,C_n^3 + \ldots + k\,C_n^k + \ldots + n\,C_n^n.$$

2°) Calculer

$$S_2 = 2.1\,C_n^2 + 3.2\,C_n^3 + \ldots + n(n-1)\,C_n^n$$

Exercice 13:

Simplifier les expressions suivantes:

$\frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{(n+1)!}{n!}$, $\frac{n!}{(n-2)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

Exercice 14 :

1) Démontrer la formule suivante :
$A_n^p = A_{n-1}^p + p\,A_{n-1}^{p-1}$.
2) En déduire la construction d'un triangle analogue au triangle de PASCAL dans lequel on fera apparaître les valeurs de A_n^p pour $1 \leq n \leq 8$

Exercice 15:

1) Trouver une relation simple entre :
C_{n+1}^p et C_n^{p-1} .
2) En déduire la somme S(n) =**Erreur !.**

Exercice 16 :

Démontrer les relations : $A_n^p = n\,A_{n-1}^{p-1}$ et
$A_{n+1}^p = (n+1)\,A_n^{p-1}$.

Exercice 17 :

Résoudre les équations :

1) $C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$;
2) $2\,C_n^2 + 6\,C_n^3 = 9n$.
3) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

Chapitre 08 : Probabilité et variables aléatoires

EXERCICE :1

Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 , 3 boules bleues numérotées de 6 à 8 et 2 boules vertes numérotées 9 et 10. On tire deux boules simultanément de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : ≪ les deux boules ont des numéros impairs≫

B :≪ les deux boules ont la même couleur≫

C :≪les deux boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur≫

Les événements A et B sont –ils indépendants ?

2. Quelle est la probabilité des événements :

D :≪ les deux boules sont de couleurs différentes≫

E :≪les deux boules sont de couleurs différentes et portent des numéros impairs≫

3. On vient de tirer deux boules de couleurs différentes ; quelle est la probabilité pour qu'elles portent des numéros impairs ?

EXERCICE :2

Une porte-monnaie contient 2 pièces de 50 F et n pièce de 100 F .

1. Un enfant prend une pièce au hasard puis la remet dans la porte-monnaie .Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait tiré une pièce de 100 F ?
2. L'enfant prend 2 pièce au hasard puis les remet .Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait extrait 2 pièces de 100 F ?
3. L' enfant tire 4 pièces simultanément puis les remet .Qu'elle valeur faut-il donner à n pour que la probabilité pour qu'il ait tiré exactement 300 F soit $\frac{1}{11}$?
4. Dans cette question on pose n =10. L'enfant tire simultanément 4 pièces .Soit X la variables aléatoire égale à la somme tirée .Qu'elle est la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique ?

EXERCICE :3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .L'urne U_1 contient 3 boules noires et 1 boule blanche, l'urne U_2 contient 1 boule noire et deux blanches.

On jette un dé cubique, parfaitement équilibré .Si le dé donne 6 , on tire au hasard une boule dans l'urne U_2 , sinon on tire au hasard une boule dans l'urne U_1 .On désigne par :

S l'événement :≪ On obtient 6 avec le dé≫

N l'événement :≪On tire une boule noire≫

1. Calculer la probabilité des événements suivants $S \cap N$ et $S \cap \overline{N}$.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule noire .
3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé sachant que l'on a tiré une boule blanche

EXERCICE :4

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B .Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotés de 1 à 4.Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face) .Pour le dé A , les quatre numérotés ont tous la même probabilité d'être cachés . Pour le dé B , la probabilité P_i de noter le numéro est proportionnel à i.

1. Calculer les probabilités P_1 , P_2 , P_3 et P_4 pour les quatre faces du dé B.
2. On lance les deux dés .On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché dé B. On suppose les lancers indépendants .On note P(i , j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.
   a. Montrer que $P(1,1)=P(2,1)=P(3,1)=P(4,1)=\frac{1}{4}$

b. Déterminer les probabilités P(i , j) pour les nombres i et j compris entre 1 et 4.
3. On appelle Z la variable aléatoire définie par Z(i,j) est le plus grand des nombres i et j
   a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique E(Z).

EXERCICE :5

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
Dans une classe de 10 élèves, 2 élèves ont triché pendant un devoir.

1. Un professeur choisit n élève dans cette classe. Calculer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un tricheur parmi ces n élèves soit supérieure ou égale à 0,9.
2. Chacun des tricheurs porte le N°1 , chaque autre élève porte le N°0.On choisit 3 élèves dans la classe. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les 3 élèves.

a. Donner la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.
c. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

EXERCICE :6

Un sac contient quatre jetons rouges numérotés 1 , 2 , 3 ,et 4 et quatre jetons noirs numérotés 1, 2 , 3 , et 4. Deux jetons de

1. Un joueur tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne du sac. On convient de la règle suivante.
   - S'il tire les deux jetons numérotés 1 , il gagne 600 F.
   - S'il tire deux jetons de même couleur, il gagne 200 F.
   - Dans les autres cas il perd 200 F.

a. Qu'elle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons numérotés 1 ?
b. Qu'elle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons de même couleur ?
c. Qu'elle est la probabilité pour qu'il perd 200 F ?

2. Après le premier tirage , le joueur remet les deux jetons tirés dans le sac et procédé à un deuxième tirage , en convenant de la même règle.
   Soit X la variable qui à deux tirages successifs associe le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. En déduire la probabilité pour que le gain algébrique du joueur soit au moins égale à 400 F.

EXERCICE :6

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre ≪ couleurs ≫ : pique, trèfle, carreau et cœur ; Chaque ≪ couleur ≫ comprend huit cartes dont une carte as.

1. On simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A :≪ les trois cartes sont des as≫
B :≪ il y a au moins 2 « couleurs » parmi ces 3 cartes ≫
C :≪ il n'y a pas d'as parmi les 3 cartes ≫

2. On tire successivement avec remise 3 cartes d'un jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tiré définit une variable aléatoire X .Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

EXERCICE :7

Une boite contient 5 jetons : 2 jetons blancs et 3 jetons blancs, indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boîte.

a. Calculer la probabilité des évènements suivants.
   E= « on extrait 2 jetons noirs »
   F= « on extrait 2 jetons de même couleur »

b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus.

Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. On effectue la un tirage successif de 2 jetons de la boite ; de la manière suivante :

On titre un jeton de la boite ; on note sa couleur et on le remet dans la boite en ajoutant en plus dans la boite un autre jeton de la même que celui qu'on a tiré ; on considère suivants :

$N_1 =$ « on obtient un jeton noir au premier tirage ».

$N_2 =$ « on obtient un jeton noir au second tirage ».

$B_1 =$ « on obtient un jeton blanc au premier tirage ».

a. Calculer la probabilité de N_2 sachant N_1 : $P(N_2/N_1)$ puis la probabilité de N_2 sachant B_1 : $P(N_2/B_1)$

b. En déduire $P(N_2)$.

EXERCICE :8

Dans pays donné , la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0 ,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note ; T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'évènement « être malade »

$\overline{M}$ l'évènement « contraire de M »

On rappelle que pour tout évènements A et B on a :

$(*)$ $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ et $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

1. a. Réécrire la relation $(*)$ pour A=T et B=M puis pour $A=\overline{M}$ et $B=\overline{T}$.

   b. En déduire que $P(\overline{M}\cap T)=P(\overline{M})\left[1-P_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$.

2. Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3. a. Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

 b. Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE :9

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.

Le premier jour de l'année, il y'a 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.

Si elle en propose un jour, il y'a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.

Si elle n'en propose pas un jour, il y'a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle J_n l'évènement « la cantine propose du riz au n^{ieme} jour » et K_n l'évènement « la cantine n'en propose pas le n^{ieme} jour ».

Soit p_n la probabilité de l'évènement J_n.

1. Déterminer $p(J_2/J_1)$ et $p(J_2/K_1)$. En déduire p_2 .
2. Montrer que $p_n=-\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=p_n-\frac{1}{2}$
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b. Calculer u_n puis p_n en fonction de n.
   c. Un élève de l'établissement, fin mathématicien ne mange les jours pairs.

   Montrer que à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$.

EXERCICE :11.

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?

3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :

Exercice n°12.

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire. L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2.
(On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

2) On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice n°13.

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à 5/48

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice n°14.

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule
Si elle est rouge, il gagne 10 € , si elle est jaune, il perd 5 €, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Etablir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice n°15.

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, éq�ilibrés.
Le dé rouge comporte : deux faces numérotées 1 ; deux faces numérotées 0 ; - deux faces numérotées 1.
Le dé vert comporte : une face numérotée 0;trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.
On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.

Exercice n°17

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. 25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante. 21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématique et ont obtenu le baccalauréat. 32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat.
On interroge un candidat pris au hasard. On note :
M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;
S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

L l’événement « le candidat a choisi l’enseignement de spécialité langue vivante » ;
R l’événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».
On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.
1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.
2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l’enseignement de SES.
b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l’enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.
3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l’enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?
4) Ce candidat a choisi l’enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu’il n’ait pas obtenu le baccalauréat ?
5) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.
6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
a) Quelle est la probabilité qu’au moins l’un d’entre eux soit reçu ?
b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

<u>Exercice n°18.</u>

On utilise deux pièces de monnaie : l’une pipée, de sorte que lorsqu’on la lance, la probabilité d’obtenir pile soit1/ 4 ; l’autre normale dont la probabilité d’obtenir pile est 1/ 2 à chaque lancer.
1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité 1/ 2 d’être prise)
a) Quelle est la probabilité d’obtenir pile ?
b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d’avoir utilisé la pièce pipée.
c) Quelle est la probabilité d’obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?
2) Trois fois on choisit l’une des pièces au hasard qu’on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité 1/ 2 d’être lancée) : déterminer la probabilité d’obtenir au moins une fois pile
3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d’obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

<u>Exercice n°19.</u>

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l’issue du questionnaire.
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculer la probabilité pour qu’il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

<u>Exercice n°20.</u>

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».
On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants:
B : la pièce prise est normale. B : la pièce prise est truquée.
P : on obtient « Pile » au premier lancer ; F_n: on obtient « Face » pour les n premiers lancers.
1) a) Quelle est la probabilité de l'évènement B ?
b) Quelle est la probabilité de l'évènement P sachant que $\bar{B}$ est réalisé ?
2) Calculer la probabilité de l'événement $\cap B$, puis de l'évènement $P\ /\ B$.
En déduire la probabilité de l'évènement P.
3) Calculer la probabilité de l’évènement $F_n \cap B$ puis de l'évènement $F_n\ /\ B$.
En déduire la probabilité de l'évènement F_n .

<u>Exercice 21</u>

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement B_2. .

Dans la suite on considère que $k = 12$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
c. Calculer l'espérance mathématique de X.
d. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

<u>Exercice 22</u>

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge. On sait de plus qu'il y au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur. Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.
1. On note g (n, b, r) la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.
Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.
2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité g (n, b, r) soit minimale.
L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ortho normal. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ;15) et soit M le point de coordonnées (n, b, r). On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.
a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.
b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).
c. Démontrer que $g(n, b, r) = 1/210[\, OM^2 - 15]$.
d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).Déterminer les coordonnées du point H.
e. En déduire tes valeurs de n, b et r afin que la probabilité g (n, b, r) soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à 2/7.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit 2/7.
Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1.
Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de x et de k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.

Exercice 23

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, . . . , S_n, . . . tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;

– chacun des suivants, S_2, S_3, . . . , S_n, . . . contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;

– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;

– etc.

Pour tout entier n >1, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note p (E_n) sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de p (E_1) , p_{E_1} (E_2) , $p_{\overline{E_1}}$ (E_2). En déduire la valeur de p (E_2).

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer p (E_{n+1}) en fonction de p (E_n).

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie

par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases}$; pour tout n >1.

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités p (E_n)

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités p (E_n).

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : 0,499996≤ p (E_n)≤60,5 ?

Exercice 24

Tous les résultats seront arrondis à10^{-2}près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à $10-3$ près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question

1. **b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 25

Une urne **A** contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne **B** contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(R) = 0{,}15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A es telle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale). Soit x un entier naturel non nul. Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire. On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x, x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) > 0$?

<u>Exercice 26</u>

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois : pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris. pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris. Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à $10-2$ près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

<u>Exercice 27</u>

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

–D l'évènement «le composant est défectueux» ;

– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D \cap F1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3}près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ. Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? Plus de 8 ans ?
c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

<u>Exercice 28</u>

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :
• chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule
nouvelle plante de type A, B ou C.
• chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule
nouvelle plante de type A, B ou C.
• chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule
nouvelle plante de type C.
La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type
est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type
est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :
• A_n l'évènement « la plante choisie la nième année est de type A »,
• B_n l'évènement « la plante choisie la nième année est de type B≫.
• C_n l'évènement « la plante choisie la nième année est de type C ».
On désigne par p_n, q_n et rn les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n ∘ 0) on
pose : $p0 = 0{,}40$, $q0 = 0{,}41$ et $r0 = 0{,}19$.
1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette
question.
2. a. Montrer que $p1 = 0{,}363$ puis calculer q1 et r1.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, ½ $pn+1 = 0{,}6pn +0{,}3qn$ $qn+1 = 0{,}3pn +0{,}6qn$
3. On définit les suites (Sn) et (Dn) sur N par $Sn = qn +pn$ et $Dn = qn -pn$.
a. Montrer que (Sn) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (Dn) est une
suite géométrique de raison 0,3.
b. Déterminer les limites des suites(Sn) et (Dn).
c. En déduire les limites des suites ¡ pn¢, ¡qn¢ et (rn).Interpréter le résultat. Début de l'année n ∘ 0 ,début de l'année n ∘ 1

Chapitre 09 : Statistique Série double

Exercice 01 **(Bac A3 1998 1er groupe)**

Le tableau suivant donne l'évolution de cinq en cinq ans d'équipement en informatique des entreprises d'un pays (en pourcentage).

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Rang xi	0	1	2	3	4	5	6
Taux yi (%)	10	25	41	60	69	80	86

1-Représenter le nuage de points de la série statistique (xi ;yi).

2-Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la figure précédente.

3-Donner la valeur à 10^{-2} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

4-Déterminer l'équation de la droite (Δ) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Représenter (Δ) sur la figure précédente.

5-Trouver l'ordonnée du point H de (Δ) d'abscisse x=7. Que peut-on en déduire pour le taux d'équipement en informatique des entreprises du pays en 2000.

Exercice 02 **(Bac L1 1999 1er groupe)**

Les formules utilisées devront être indiquées et tous les calculs intermédiaires figurer sur la copie.

On donne la série statistique double suivante :

x	35	40	35	65	65	85	90	k
y	3	4	5	10	8	13	14	15

1) Déterminer l'entier naturel k sachant que la droite de régression de x par rapport à y passe par le point G d'abscisse 65.

2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y.

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.

Exercice 03 **(Bac L2 1999 1er groupe)**

L'étude du commerce extérieur d'un pays de 1990 à 1996 pour les importations et les exportations exprimées en milliards de francs donne le tableau suivant :

Importations x	2,8	3,2	3,8	4,4	6,4	5,7	7,4
Exportations y	2	2,6	3,2				

1) Calculer :

a)Les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

b) Les variances V(X) et V(Y).

c) Les écart-types σ(X)et σ(Y)

e) Calculer le coefficient de corrélation enter X et Y.

Existe-t-il une corrélation entre les importations et les exportations ?

Exercice 04 **(Bac L1 2000 1er groupe)**

Le tableau suivant donne l'âge x et la moyenne des maxima de tension artérielle relevée au sein d'une population donnée en fonction de l'âge.

Age x	36	42	48	54	60	66
Tension y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1-Représenter graphiquement le nuage de points de la série.

Echelle :

$1/2$ cm pour 1an; 3cm pour 1 unité de tension artérie

.

2-a) Calculer les moyennes et les variances de x puis de y.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. La corrélation est-elle forte ?

3- Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x, la tracer.

4)-Estimer la tension artérielle d'une femme âgée de 70ans.

Exercice 05

Les résultats des compositions d'Histoire et de Géographie d'une classe de 10 élèves sont les suivants : xi notes d'Histoire sur 20, yi notes de Géographie sur 20.

Xi	14	13	09	11	10	05	04	13	16	05
yi	15	13	08	10	07	10	06	15	16	10

On note par $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes respectives d'Histoire et de Géographie de cette classe.

1-Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$: unité 1cm.

2-Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ puis placer le point $G(\overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y})$ dans le repère.

3-Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

4-Déterminer l’équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
Tracer cette droite dans le même repère.

Exercice 06

Les formules utilisées devront, être indiquées et tous les calculs intermédiaires figurer sur la copie dans un tableau.

On donne la série statistique double :

x	35	40	35	65	65	85	90	k
y	3	4	5	10	8	13	14	15

1) - Déterminer l'entier naturel k sachant que la droite de régression de x par rapport à y passe par le point moyen G d'abscisse 65.

2) - Calculer le coefficient de corrélation linéaire des caractères x et y.

3) - Déterminer une équation de la droite (D) de régression de x par rapport à y.

Exercice 07

Une société investit de manière continue en publicité. Le budget publicitaire (BP) et le chiffre d'affaires (C A) sont connus sur dix (10) mois consécutifs selon le tableau suivant :

Mois i	1	2	3	4	5
BP x_i	10	12	15	13	10
CA z_i	45	79	99	115	109

Unité : milliers de francs CFA.

En fait, il faut prendre en compte le temps nécessaire à la publicité pour produire son effet. Ce temps est estimé à un mois.

On considère la série statistique (x_i ; y_i) avec $1 \leq i \leq 9$ et $y_i = z_{i+1}$ (par exemple $y_1 = z_{1+1} = z_2$; $y_2 = z_3$ .. …)

1) Dresser le tableau de la nouvelle série (x_i ; y_i) .

2) a) Calculer la covariance cov (x ; y) de x et y.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire (r) de x et y à 10^{-3} prés.

X	a	1,3	b	1,5
Y	4	5	5	6

3) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.

4) Donner une estimation du chiffre d'affaires du onzième mois.

Exercice 08

Le tableau suivant indique, pour chaque année, le nombre d'accidents causés par les automobilistes sur la circulation.

Année	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	0	1	2
Nombre d'accidents : y_i	266	281	312

1°) a) Construire le nuage de points associé à cette série statistique (x_i ; y_i) .

b) Déterminer le point moyen G, puis le placer.

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série .

3°) Donner une équation de la droite de régression de y en x .

4 °) Donner une estimation du nombre d'accidents commis lors de l'année 2004.

5°) Si l'évolution observée reste la même au cours des années à venir, à partir de quelle année constatera-t-on 2 fois plus d’accidents qu’en 1997 ?

xi	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

Exercice 09

On donne la série statistique suivante à deux variables :

Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu l'équation de la droite de régression de y en x, à savoir : $y = 9x + 0,6$.

1) - Calculer $\overline{x}$.

2) - Exprimer $\overline{y}$ en fonction de a.

3) - En utilisant 1) et 2). Montrer que a = 20.

4) - Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. La corrélation est-elle forte ?

- Estimer la valeur de y pour x = 3,2.

Exercice 10

On donne la série double (X, Y) suivante :
Déterminer a et b sachant que la droite de régression de Y en X a pour équation :
$y = 5x - 2$.

Exercice 11

Le tableau ci-dessous donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,8	15	15,5	15,1

1) Représenter le nuage de point de la série double (X, Y)
2) Peut-on effectuer un ajustement linéaire du nuage de point ?
3) Déterminer la droite de régression de Y en X.
4) Une personne de 70 ans a une tension artérielle de 16,2. Cela vous parait-il normal ?

<u>Exercice</u> 12

On fait une enquête portant sur 100 familles suivant le nombre d'enfants par famille X et le nombre de pièces d'habitation par famille Y. les résultats enregistrés sont les suivants :

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1) a) Déterminer les séries marginales associées à X et Y
b) Déterminer la série conditionnelle Y sachant que X = 2

2) Calculer les caractéristiques marginales de X et Y.

3) Représenter le nuage de point associé à la série double (X, Y). Peut- on envisager un ajustement linéaire ? Justifier.

4) trouver une équation de la droite des moindres carrés de X en fonction de Y, puis celle Y en fonction de X. Représenter ces deux droites dans un même repère que le nuage.

5) Etudier la corrélation entre X et Y. Peut-on prévoir le nombre d'enfants d'une famille dans une villa de 6 pièces ? Quelle est la qualité de cette prévision ?

<u>Exercice</u> 13

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaire annuel (CA) réalisé par une entreprise et ses dépenses annuelles consacrées à la publicité(DP) de 1996 à 2005.

Années	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
CA	92	95	100	108	114	110	118	120	125	128
DP	7	8	8	9	8	10	10	11	10	12

Les données sont exprimées en millions de francs. On pose X = CA et Y = CP

1. En fait, il faut un an pour mesurer l'effet de la publicité sur le chiffre d'affaire. Dresser la série tenant compte de l'effet de la publicité sur un an.
2. Estimer alors le chiffre d'affaire de l'entreprise pour l'année 2016 et indiquer la qualité de l'estimation.

<u>Exercice</u> 14

La distribution des revenues d'une population suit une loi de **Paréto** d'indexe **α>0** , c'est-à-dire si N(x) représente le nombre d'individus de la population qui ont un revenu supérieur à x, on a la relation $N(x) = A\, x^{(-\alpha)}$, où A est un réel positif qui dépend des caractéristiques de cette population.

Pour les observations suivantes, estimer les paramètres A et α en justifiant la méthode et en indiquant la qualité de l'estimation.

Revenu x, (×10.000)	1	2	3
Nombres d'individus N(x)	428561	53745	15923

<u>Exercice</u> 15

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes qu'une grue peut lever pour une longueur x_i, en mètre de la flèche.

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27
y_i	10	9	8	7	6	5,5

1) a) représenter le nuage de points $M(x_i, y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal(unités : 1 cm pour 2 m en abscisse et 1 cm pour 1 tonne en ordonnées)

b) déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

c) déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique précèdent.

d) Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 m. Puis avec la droite de mayer.

On pose $z_i = 1/y_i$

2) Trouver le coefficient de corrélation entre z et x.

Déterminer la droite des moindres carrés de z en x. Utiliser cette droite pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.
Ce résultat parait-il plus satisfaisant celui de la question 1.

<u>Exercice</u> 16

Soit (D) la droite de régression de y en x d'un nuage de points $A(x_i, y_i)$, pour i = 1 ,2 ,…, n.
Soit S la somme des résidus.
On adjoint un point $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$, au nuage précédent et on note (Δ) la droite de régression de y en x correspondant au nuage $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$.

1) Est-il possible que les droites (D) et (Δ) soient confondues ?
2) Soit S' la somme des résidus du nouveau nuage. A –t-on toujours $S' \geq S$?

Chapitre 10 : Arithmétique : Bézout, PGCD, PPCM,…

Diviseurs –Division euclidienne :

Exercice 1 :

1) Démontrer que a | b si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, a | (b–ka).

2) Déterminer les entiers relatifs a, tels que (a–5) | (a + 7).

Exercice 2 :

Déterminer les entiers naturels n tels que : n –1 divise n+3.

Exercice 3 :

1) Résoudre dans IN^2 l'équation : $x^2 - y^2 = 13$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $2x^3 + xy - 11 = 0$.

Exercice 4 :

Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Exercice 5 :

On considère la fraction $q_n = \frac{n+19}{n-7}$; n étant un entier naturel strictement supérieur à 7.

1) Comment choisi n pour que q_n soit simplifiable ?

2) Déterminer n pour que q_n soit égale à un entier naturel.

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) $n^2 + 2n$ par n + 1.

2) 7n +15 par 3n+ 2.

PGCD – PPCM

Exercice 1:

Calculer pour tout entier naturel n non nul :

1) PGCD(n, 2n+1) et PPCM(n, 2n+1) 2) PGCD(2n+2,4n+2) et ¨PPCM(2n+2,4n+2).

Exercice 2 :

Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par 15 ; 23 ; 27.

Exercice 3:

Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

Exercice 4 :

Deux entiers a et b ont pour PGCD δ. Quel est le PGCD des entiers x = 13a+ 5b et y = 5a + 2b.

Equations diophantiennes du type : ax +by = c

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $11x + 16y = 0$

Exercice 2 :

1) a) Montrer que l'équation $59x + 68y = 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 2$.

Congruence

Exercice 3 :

1) Vérifier que $1000 \equiv 1$ [37] et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1$ [37].

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 4 :

1) Montrer que $67^{89}-1$ est un multiple de 11.

2) Pour quelles valeurs de n entier naturel, $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Exercice 5 :

Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n-1$ ou $5n$ ou $5n+1$, n entier naturel.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1) $14x \equiv 3\ [4]$; 2) $\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases}$

Exercices de synthèse :

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul. On considère deux nombres a et b définis par :

$a = 2n+3$ et $b = 5n-2$.

1) Démontrer que le PGCD de a et b divise 19.

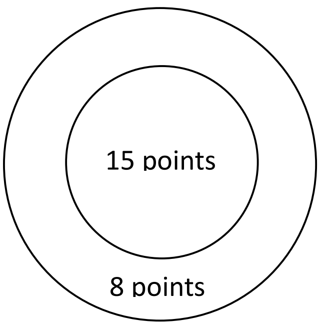
2 Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le PGCD de a et b est 19.

Exercice 2 :

1) Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E1) : $15x + 8y = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E2) : $15x + 8y = 1000$;

3) De combien de façon peut-on obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-dessous. (le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.)



15 points pour une fléchette qui atteint le disque central.

8 points pour une fléchette qui atteint la couronne.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in IN$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on faire émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?

2)a)Montrer que $\forall\ n \in IN$, $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.

b) En déduire $\forall\ k \in IN$ $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$.

3)a)Montrer par récurrence que :

$\forall\ n \in IN\ \ 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que $\forall\ n \in IN$, $2u_n \equiv 28\ [100]$.

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 4 :

$\forall\ x \in \mathbb{Z}$, on pose :

$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ et $A = \{ x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z} \}$.

1) Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis le déterminer.

2) Déterminer l'ensemble

$B = \{x \in A / 4x^2 - 9(f(x))^2$ est divisible par 7 $\}$.

Exercice 5 :

Un astronome a observé, au jour J_0, le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronomie. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_o et J_1.

Montrer que le couple (u ;v) est solution de l'équation (E_1) : 35x – 27y = 2.

2)a)Donner un couple d'entiers relatifs (x_o ;y_o) solution particulière de (E_2) : 35x –27y = 1.

b) En déduire une solution particulière (u_o ;v_o) de (E_1)

c) Déterminer toutes les solutions de (E_1).

d) Déterminer la solution (u ;v) permettant de donner J_1.

3)a)Combien de jours s'écouleront entre J_o et J_1 ?

b) Le jour J_o était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ?

c) L'année 2000 était bissextile. Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Problèmes

Exercice 1

Partie A

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans Z le système :
$(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}.$

1. Démontrer qu'il existe couple (u,v) d'entiers d'entier relatifs tel que : $19u+12=1$(on ne demande pas cette question de donner un exemple de couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times 12v+6\times 19v$ est solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à :
$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}.$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}.$ équivaut à $n \equiv n_0[12\times 19]$.

3. a. Démontrer que le couple (u ;v) solution 19u + 12 v =1 et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par $228=12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 2

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N=a^2-b^2$. où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et q ?

Partie B

On admet que 250507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ;b) vérifiant la relation

$(E): a^2-250507=b^2.$

1. Soit X un entier naturel.
a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis les restes possibles de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $(E): a^2 - 250507 = b^2$. ; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple (a ;b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.

3. On suppose que le couple (a ;b) vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 501 ou à 5005 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple de solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 3

1. On considère l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation.(E) ?

b. Résoudre (E). En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tel que 1109d = 1 + 226e. (On précisera les valeurs des entiers d et e).

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels $a \leq 226$. On considère les fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : A tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} *par* 227. A tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} *par* 227.

a. vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappel le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat **: Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors** $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1[227]$.

c. En utilisant 1.b, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

Exercice 4

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a+b; ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (on remarque $a^2 = a(a+b) - ab$)

b. En déduire que p divise b.

On constate donc, de même, que d divise b.

c. Démontrer que PGCD(a ;b) = p.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}.$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} PGCD(a+b,ab) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}.$$

Exercice 5

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$; $13= 9+2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 2^n$ où $a \in IN ; n \in IN, n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 3^n$. $a \in IN ; n \in IN, n \geq 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation

proposée n'a pas de solution.

3. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 +9 = 5^n$. $a \in IN ; n \in IN, n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$

soit une puissance entière de 5.

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times10^n - 1, b_n = 2\times10^n - 1 et\, c_n = 2\times10^n + 1.$$

1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à100 donné ci-dessous que b_3 est premier.

d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

e. Montrer que PGCD (b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)
En déduire que $b_n\, et\, c_n$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (1) : $b_3\, x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) a au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ;

53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice 7

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u , v) tel que $6u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).2. Soit (O ; i , j , k) un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan (O; i , j).
Monter qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.
Déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Monter que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Chapitre 11 : Le corps des nombres COMPLEXES : $\mathbb{C}$

Exercice n°0

Montrer que l'ensemble :

$\mathbb{C} = \{(a,b)/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ muni des deux opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ est un corps,avec :

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times_{\mathbb{C}} (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Exercice n°1

Les trois parties I), II) et III) sont Indépendantes.

Partie I

1)a)On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; calculer j^2. En déduire le calcul de : $1 + j + j^2$; j^3; $\frac{1}{j}$

b) Démontrer que, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ on a :

$$2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Partie II

2) a) Déterminer le module et un argument de : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$; $\frac{z_1}{z_2}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

c) Comment choisir l'entier naturel n pour que z_1^n soit un réel? un imaginaire? :

d) Résoudre l'équation dans IR $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

Partie III

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$

On considère le nombre complexe z, tel que :

$$z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta.$$

1) Déterminer le module et un argument de z lorsqu'il existe, en fonction de θ.
2) Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

Exercice n°2

Les trois questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1) a)Démontrer que $\forall (z, z') \in C^2$

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

b) Interpréter géométriquement l'égalité Ci-dessus et en déduire une propriété du Parallélogramme.

2) Démontrer que $\forall (z, z') \in C^2$ la double inégalité triangulaire :

$$\big||z| - |z'|\big| \le |z + z'| \le |z| + |z'|.$$

3) Démontrer que, si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1 et tels que $z_1 z_2 \ne -1$, le nombre complexe: $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel

Exercice n°3 :

Soit z, z', u des nombres complexes tels que $u^2 = zz'$.

Montrer que

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} + u\right|$$

Exercice n°4 :

Soit **a** et **b** deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1) Démontrer que les points O, A, B sont alignés si seulement si : $a\bar{b} \in IR$

Montrer que pour que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ soit réel, il est nécessaire et suffisant que O, A et B soient alignes ou que OA = OB.

2) On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignes et que $|a| = |b| = 1$.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

3) Application

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 ,tels que les points O M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer en fonction de z_1 et z_2 l'affixe Z du point G barycentre de $(M_1, |z_1|)$ et $(M_2, |z_2|)$

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2} \in IR$

c) En déduire que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle M_1OM_2.

Exercice n°4 : Lieux géométriques

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $Re(z^3) = Im(z^3)$

b) $(z-1-i)(\bar{z}-1+i) = 25$

c) $(z\bar{z})^2 - 13z\bar{z} + 36 \leq 0$

d) $arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

e) $arg(z^2-4) = arg(z+2)\ [2\pi]$

f) Le triangle $MM'M''$ soit rectangle en M avec $M'(z^2)$ et $M''(z^3)$.

Exercice n°5

Calculer la somme :

$S(z) = 1 + z^2 + z^4 \ldots\ldots\ldots + z^{2n-2}, z \in \mathbb{C}$

a) Résoudre dans C, l'équation définie par :

$z^{2n} - 1 = 0,\ n \in IN^*$.

b) Démontrer que

$$S(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

c) En considérant S (1), démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

d) En considérant S (i), calculer $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$

EXERCICE 06 :

Le plan est muni d'un repère complexe (O, u, v). On considère les points A, B, I et F d'affixes respectives i, 1-i,

2 et 2 + i.

1. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a- Déterminer l'affixe du point E antécédent de F par la rotation r.

b- Soit (△) : x – y + 1 = 0. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (△') image de (△) par r.

2. Soit T : P ↦ P ; M(z) ↦ M'(z') telle que :

z' = az + b avec a ∈ **C*** et b ∈ C.

a- Déterminer a et b sachant que T laisse invariant I et transforme B en O.
b- Montrer que $z' - 2 = (1 - i)z\ (z - 2)$.
c- En déduire une relation entre IM' et IM et un mesure de l'angle (IM; IM')
d- Déduire du c) la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit S = Tor et $M_n(z_n)$, $M_0(z_0)$ avec $z_0 = 2i$ et M_{n+1} image de M_n par S.

a- Montrer que $z_{n+1} = (1 + i)z_n + 2 + 2i$
b- Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
c- On pose $Z_n = z_n + 2 - 2i$. Démontrer que $Z_{n+1} = (1 + i)Z_n$.
d- Démontrer par récurrence que pour tout n ∈ IN, $Z_n = 2(1+i)^n$.

4. On pose $U_n = M_nM_{n+1}$

a- Montrer que ∇ n ∈ IN, $U_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n+2}$. Préciser la nature de la suite U_n.
b- Soit $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}$. Exprimer L_n en fonction de n.

EXERCICE 07 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère l'application f qui à M(x ; y) associe M'(x' ; y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2 \end{cases}$$

1. Soit z l'affixe de M et z' celle de M'. Exprimer z' en fonction de z.
2. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Soit R la rotation de centre A(i) d'angle $\frac{\pi}{3}$ et H l'homothétie de centre B(1 + 3i) de rapport $\frac{1}{3}$

a- Donner les écritures complexes de R et de H.
b- En déduire l'écriture complexe de RoH et Hof
c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de RoH et de Hof.
d- Soit B' = R(B), déterminer la nature de ABB'.

Les Complexes aux bacs sénégalais

Exercice 01 Extrait BAC S1 2001)

Dans le plan orienté, on considère un carré MNPQ de centre O.

Soit I un point de [NP] distinct de N.

On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1) Faire une figure avec NP= 5 cm ; NI= 2 cm (On placera (NP) ≪ verticalement ≫ c'est-à-dire parallèlement au grand côté de la feuille)
2) Soit R le quart de tour direct de centre M.
   a) Déterminer l'image de la droite (NP) par R.
   b) Déterminer les images de K et I par R.
   c) Quelle est la nature des triangles KMJ et IML ?
3) On note E le milieu du segment [IL], F celui de [JK] ; soit s la similitude directe de centre M d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Préciser les images de K et de I par s.
   b) Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.
   c) Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

EXERCICE : 02 (Extrait BAC S1 2002)

On pose
$Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1+\cos\alpha)^2 z + i(1+\cos^2\alpha)$
ou z désigne nombre complexe, i l'unité imaginaire pure, α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Les trois racines de Q(z) sont désignées sont désignées par a, b et c respectivement. On veut déterminer les racines de Q(z) de deux façons différentes.

<u>1ere façon</u>

1. Sans calculer a, b et c, calculer (a+b+c), (ab+ca+cb) et abc.
2. Sachant que la somme de deux de ses racines est égale a 2icosα ; Utiliser les résultats précédents pour résoudre l équation Q(z)=0.

<u>2ieme façon</u>

3. Montrer que Q(z) a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
4. En déduire les autres racines de Q(z).
5. A étant la racine de Q(z) dont la partie réelle est positive, donner son module et son argument en fonction de α.
6. Le plan est rapporté a un repéré orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; Soit f la similitude directe de centre ω d'affixe c, c étant la racine imaginaire pure de Q(z) et qui transforme le point B d'affixe b en A d'affixe a. Donner l'écriture complexe de f .Déduire de cette écriture que f est une rotation de centre ω

EXERCICE : 03 (Extrait BAC S1 2003)

Soit ABCD un losange de centre Ω.Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E ; et J celui des points O et Ω.

1.a) Démontrer que G est le barycentre de chacun des systèmes {(Ω; 4); (E; 1)} et{(J; 4); (A; 1)}.

b) Soit f l'application du plan dans lui-même associant a tout point M le point M' défini par :
$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$
Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par f ?

2.) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta = (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$ et s=rof

a.) Démontrer que s est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.

b.) Construire H=s(G) et L=s(A).

c.) Démontrer que les centre I de la similitude s appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.

EXERCICE : 04 (Extrait BAC S1 2006)

Le plan est orienté, PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de [QR] et [RP]. Q_1 est. le symétrique de Q par rapport à J.

1.) Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose f=tor.
   a.) Faire une figure. Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q.

b.) Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R.

c.) Donner la nature et ses éléments caractéristiques. En déduire la nature du triangle IPP'.

2.) Soit s la similitude directe telle que s(J)=P et s(R)=I.

a.) Déterminer l'angle et le rapport de s.Montrer que s(I)=P'.

b.) Soit Ω le centre de s .Montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et les points Ω, P, J et Q_1 sont cocycliques. En déduire la position de Ω puis construire ce point.

<u>Exercice 04</u> (Extrait BAC S1 2006)

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre O tel que

$AB = 3$ a et $BC = a\sqrt{3}$; où a est un réel strictement positif donné.

1) Déterminer la nature du triangle BCO .
2) Soit E le point du segment [BD] tel que $BE = \frac{3}{4}BD$. Donner une construction géométrique du centre de la similitude directe s telle que s (B) = O et s (E) = C
3) On suppose dans la suite que a = 1 et on pose $\vec{u} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$ et on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer les affixes des points B et de O .

b) En déduire l'écriture complexe de l'application s .

4) Déterminer l'affixe du point et du point A'=s(A).

5) On considère la suite de points M_n d'affixe z_n définie par M_0=A et pour tout n $M_{n+1}=s(M_n)$.

a) Démontrer que la suite (α_n) définie par $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme α_0 et la raison .

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $M_0M_1M_2 \dots M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$.

<u>EXERCICE : 05</u> (Extrait BAC S1 2007)

Soient α et β deux nombres complexes donnés. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et pour tout complexe z : $f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$.

1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^3) = 3$ (On pourra utiliser $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$)

2. a. En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b. En utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|$; $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ;\vec{i}, \vec{j})$ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixe. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b. Dans cette question on prend $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont rj et rj^2.

b. Montrer que $BO.BI.BJ = r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière CO.CI.CJ et AO.AI.AJ

c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : SO.SI.SJ ≥ r3.

Les Classiques des COMPLEXES

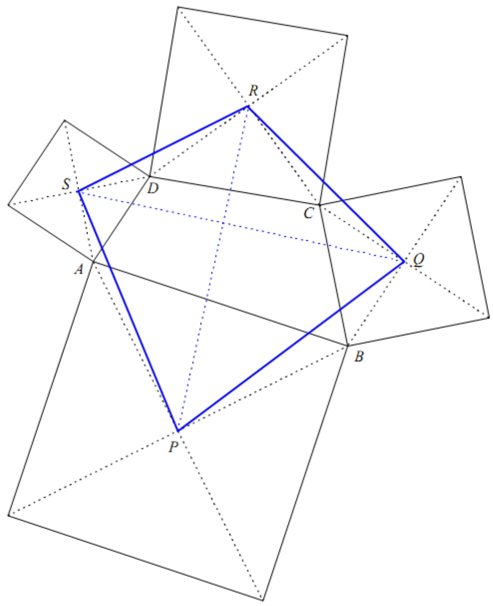
Exercice 01 : [le théorème de VON AUBEL : des carrés autour d'un quadrilatère]

On considère un quadrilatère ABCD de sens direct. On construit quatre carrés de centre respectifs P, Q, R et S qui s'appuient extérieurement sur les cotés [AB], [BC], [CD] et [DC] (voir figure).

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère PQRS sont perpendiculaires et de même longueur.

On notre a, b, c, d, p, q, r et s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R et S dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de sens direct.

1) Démontrer que dans le carré construit sur [AB], on a : $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Établir des relations analogues pour q, r et s en raisonnant dans les trois autres carrés.
2) Calculer $\frac{s-q}{r-p}$ et cconclure.



Exercice 02 : [le théorème du POINT DE VECTEN : des carrés autour d'un triangle]

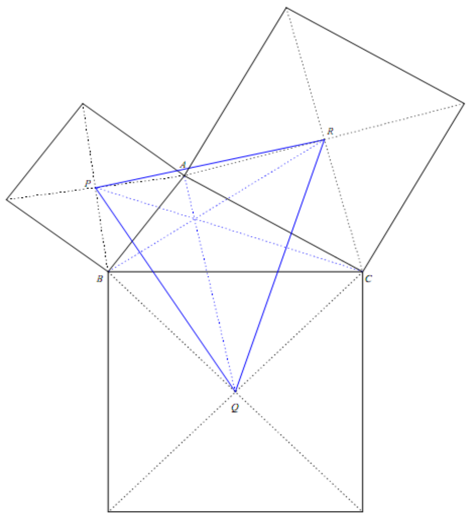
On considère un triangle ABC de sens direct.

On construit trois carrés de centres respectifs P, Q et R qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB], [BC] et [CA] du triangle ABC. (Voir figure)

On notre a, b, c, p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, P, Q et R dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de sens direct.

1) Démontrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.
2) Démontrer que dans le carré construit sur [AB], on a : $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Établir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.
3) Démontrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires. En déduire que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes.

Information : ce point de concours s'appelle "point de Vecten" du triangle ABC.



Exercice 03 : [le théorème de NAPOLEON]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de sens direct.

PARTIE A : des caractérisations du triangle équilatéral on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w.

1) Démontrer l'équivalence suivante : UVW est équilatéral de sens direct $\Leftrightarrow$ $u - v = -j^2(w - v)$

2) Démontrer l'équivalence suivante : UVW est équilatéral de sens direct $\Leftrightarrow$ $u + j\,v + j^2 w = 0$

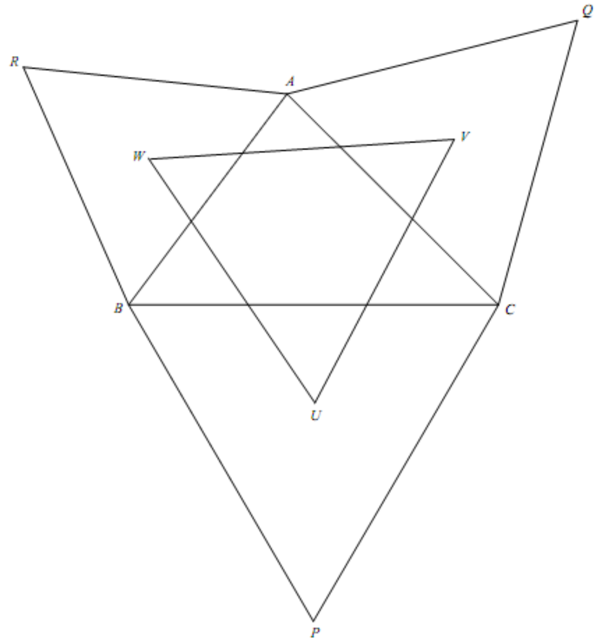
<u>**PARTIE B**</u> : démonstration du théorème de Napoléon

ABC est un triangle quelconque de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que BPC, CQA et ARB

soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note U, V et W les centres de gravité de BPC, CQA et ARB respectivement.

Démontrer que UVW est équilatéral de même centre de gravité que ABC.



Chapitre 12 : Barycentre et Application Affines

Exercice : 01 *[Cours]*

A. Etant donné trois points du plan A, B, C non alignés on considère l'application f qui a tout point M associe le vecteur
$\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

1) Démontrer que pour tout points M et N du plan, on a : $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = -2\overrightarrow{MN}$. En déduire que s'il existe un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$, pour tout point M le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ s'exprime sous la forme réduite $-2\overrightarrow{MG}$.
2) Démontrer l'existence et l'unicité d'un point G tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$. Préciser la position de G.

B. Etant donnés les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et les points $A_1, A_2, \dots, A_n$du plan, on définit l'application g qui a tout point M associe le vecteur $\overrightarrow{g(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. Etablir que quels que soient les points M et N :

$$\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{g(N)} + \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MN}$$

C. Démontrer que la fonction vectorielle de Leibniz et bijective

D. En déduire une définition rigoureuse de la notion de barycentre et énoncez puis démontrez toutes les propriétés qui vont avec.

E. Quelle est l'utilité de la fonction scalaire de Leibniz ?

Exercice : 02 *[Applications]*

a) Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{P}$. Trouver l'ensemble $(\mathcal{T})$ des points M du plan tel que : $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.
b) Soit ABCD un parallélogramme dans le plan$(\mathcal{P})$.

Trouver l'ensemble $(\mathcal{T}_1)$ des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CB}$

Exercice :03

a) Soit ABCD un rectangle avec AB = 2 et BC = 1. Déterminer et construire l'ensemble (E) défini par : $(E) = \{M \in \mathcal{P} / \ MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10\}$
b) Soit ABC un triangle isocèle en C tels que AB = 4, CA = CB= 6. Déterminer et construire l'ensemble (F) défini par :

$$(F): \{M \in \mathcal{P} / \ MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0\}$$

Exercice : 04

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on désigne par a, b, et c les longueurs BC, CA et AB.
On se propose d'étudier l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2+MC^2 = a^2+b^2+c^2$.

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC] .
   a. Calculer AB^2+AC^2 en fonction de AI^2 et BC^2. En déduire que : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$.Ecrire de même les expressions GB^2 et GC^2.
   b. Montrer que :
   $GA^2+GB^2+GC^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$
2. Déterminer l'ensemble E .

3. On donne a=5 , b=4 et c= 3.Placer trois points A, B, C et déterminer l'ensemble E dans ce cas .

Exercice : 05

Soit ABC un triangle quelconque.

1) Démontrer que $\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} \neq 0$
2) En déduire que l'orthocentre H du triangle ABC est le barycentre $\{(A, \tan\hat{A}), (B, \tan\hat{B}), (C, \tan\hat{C})\}$

Exercice : 06

Dans le plan P , on considère un triangle Abc isocèle de sommet A tel que AB =AC =3a et BC=2a (a étant un réel strictement positif).On appelle G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 3 et 3.

Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

1. Montrer que G est le milieu de [IJ].
2. M étant un point de P , calculer la somme : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ en fonction de MG et a.
3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2$.
4. Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2$.

Exercice : 07

Dans le plan P, on considère trois point A, B, C tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4d$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2d$, où d est un réel strictement positif donné. On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients λ , 1 et 1 où $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

1. Déterminer l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points lorsque λ décrit $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
2. Dans le cas où $\lambda = -1$, on appelle G le barycentre des points A,B et C affectés respectivement des coefficients -1 , 1 et 1.
   a. Déterminer G.
   b. Déterminer l'ensemble E des points M du plan vérifiant l'égalité : $\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2$
3. a. Démontrer que pour tout point M du plan , $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.
   b. Déterminer l'ensemble Δ′ des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 = 32d^2$.

Exercice : 08

Soient A, B et C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral .On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] , [CA] et [AB].On pose BC=a, CA=b et AB=c.

1. on considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$. Montrer que : $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$.En déduire que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul .
2. pour tout point M du plan , on pose : $f(M) = a^2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$.
   a. soit O le centre du cercle circonscrit au triangle Abc ; calculer f(O).
   b. soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$.

   En déduire la valeur de f(G).

c. déterminer l'ensemble Δ des points M tels que f(M)=0.

Exercice : 09

Soit A, B et C trois points du plan tels que AB = 3a, AC = 4a et BC = 5a, où a est un réel positif non nul. On désigne par I le milieu de [BC].

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2) Soit m un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et G_m le barycentre des trois points pondérés (A, 1-2m), (B, m) et (C, m). Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.
3) Montrer que $(1-2m)G_mA^2 + mG_mB^2 + mG_mC^2 = 25a^2(m-m^2)$.
4) Déterminer suivant les valeurs de m et k, l'ensemble E des points M du plan tels que : Montrer que $(1-2m)MA^2 + mMB^2 + mMC^2 = 25a^2k^2$.
5) Peut –on déterminer m et k pour que les points A, B et C appartiennent à l'ensemble (E) ?

Exercice : 10

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = a et AC = 2a.
I désigne le milieu de [AC] et G est le barycentre du système {(A ; 3) ; (B ; -2) ; (C ; 1)}.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.
2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel : $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.
   a. Exprimer f (M) en fonction de MG et de a.
   b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(M) = 2a^2$.
3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel : $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
   a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que : $h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{U} - 2a^2$.
   b. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = -2a^2$. Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ), préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ).

APPLICATIONS AFFINES

Exercice :01

Démontrer que si f admet une expression analytique de la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$,
alors f est une application affine.

Exercice :02

1) Considérons, dans le plan $\mathcal{P}$, un point A. Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre A et de rapport k. Montrer que h conserve le barycentre de deux points quelconques.

2) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui même défini analytiquement dans ce repère par $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$.

a) Soient les points A (-2; 3), B (2; 3) et A', B' leurs images respectives par f. On note K l'isobarycentre de A, B et K'=f(K). Vérifier que K' est l'isobarycentre de A', B'.

b) Soient les points C, D de coordonnées respectives $(2;\ 3\,)$et $(4,;7)$ et soit G le barycentre du système $\{(C,-2),(D,1)\}$. Le point G'=f(G) est-il le barycentre du système $\{(C',-2),(D',1)\}$

__Exercice :03__

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O,I,J). On donne les points $A(3,2), B(1,1), C(2,1)$ et leurs images respectives $A'(6,6), B'(3,3), C'(2,1)$ par une application affine f. Soit $M(x,y)$ un point d'image $M'(x',y')$ par f. Déterminer l'expression analytique de f dans le repère (O,I,J).

__Exercice :04__

Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B,-1) et (C, 1).
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$
   a) Vérifier que B appartient à (Γ).
   b) Déterminer et construire (Γ).

__Exercice :05__

Soit ABC un triangle équilatéral de cote a.

Soit f(M) $= MA^2+ MB^2+ MC^2$

Etudier les lignes de niveau de l'application scalaire f.

a) Pour quelle valeur de k, la ligne de niveau $\Gamma_k$est- elle le cercle circonscrit au triangle ABC ?

b) Pour quelle valeur de k, la ligne de niveau Γ_k est- elle le cercle inscrit au triangle ABC ?

__Exercice : 06__

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. L'application s est définie par : $\begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$, avec $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ et $s(M) = M'$. Montrer que s est une symétrie, préciser ses élément caractéristiques.

__Exercice : 07__

Le plan est muni d'un repère$(O,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. L'application affine f qui a tout point avec $M(x,y)$ on associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1. f a-t-elle des points invariants ? est-elle bijective ? démontrer que l'ensemble image de f est une droite (D).
2. Démontrer que, l'application linéaire ϕ associée à f, est une projection vectorielle sur une droite vectorielle (D) que l'on précisera, ainsi que la direction de ϕ.
3. Soit (Δ) une droite du plan dirigée par les vecteurs de (D).

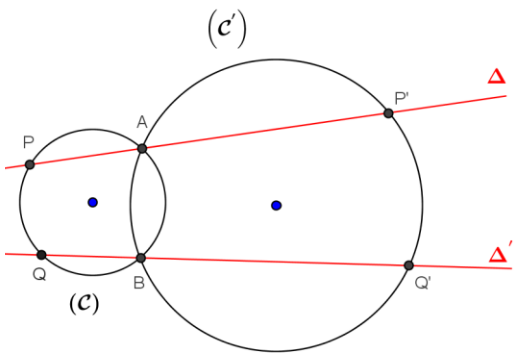
a. Soit (g) la projection orthogonal sur (Δ). Montrer qu'il existe une seule translation t telle que $= t \circ g$.
b. Donner les formules analytiques de g et t lorsque (Δ) a pour équation $y = x$.

Chapitre 13 : Cocyclicité, Isométrie et Similitude plane directe

COCYCLICITES

Exercice 01

Soient (C) e(C′) deux cercles sécants en A et B, Δ et Δ' deux droites passant respectivement par A et B distinctes de la droite (AB). La droite Δ (respectivement Δ') recoupe (C) et (C′) en P et P′ (respectivement Q en Q′).
On suppose les points A, B, P, Q, P′ et Q′ tous distincts.



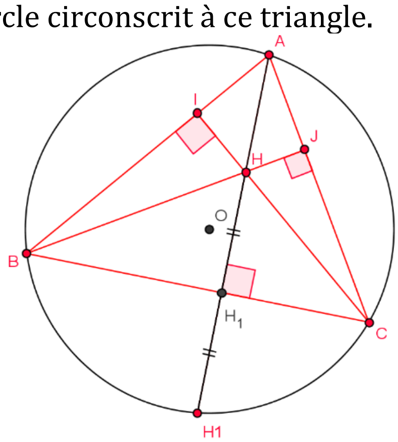
Montrer que les droites (PQ) et (P′Q′) sont parallèles.

Exercice 02

Placer deux points A et B tels que AB = 4 cm.
Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$et l'ensemble (E′) des points M tels que$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{3\pi}{4}[\pi]$.

Exercice 03

Montrer à l'aide des angles orientés que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses cotes appartient au cercle circonscrit à ce triangle.



Exercice 04:

Soient A et B deux points dans le plan orienté.
Déterminer et construire le lieu $\mathcal{P}$ des points M et le lieu $\mathcal{P}'$ des points N tels que AMN soit un triangle isocèle, rectangle en A, et tels que M, N, B soient alignés.
On se limitera au cas où $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 05

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

1) Faire une figure .
2) En utilisant la relation de Chasles , prouver que :
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) .$$
3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 06

On donne un triangle ABC et le point F diamétralement opposé à A sur le cercle passant par ABC .Pour un point M du plan, la droite passant par M et orthogonale à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1-) Démontrer que : M, F, C et Q d'une part et B, P, F et M d'autre part sont cocycliques.
En déduire que :
$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi] .$$
2-) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels F, P et Q sont alignés.
3-) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.

Exercice 07

ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ et H son orthocentre .Les droites (AH) et (BC) se coupent en Q ; les droites (BH) et (AC) se coupent en R ; les droites (CH) et (AB) se coupent en P .

1-)a-)Montrer que les points A ,B ,Q et R sont cocycliques .

En déduire que :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ})[\pi]$$

b-) On note T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle$(\mathcal{C})$.

Montrer que $(\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})[\pi]$ puis en déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles.

c-) Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires.

2-)a-)En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d'une part ; et Q, C, R et H d'autre part, montrer que :

$$(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})[\pi]$$

b-) En déduire que (AH) est une bissectrice du triangle QRP.

<u>Exercice 08</u>

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles sécants en A et en B. Soit I un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B et soit J un point de $(\mathcal{C}')$ distinct de A et de B tels que I, J et A ne soient pas alignés Une droite passant par B coupe $(\mathcal{C})$ en M et $(\mathcal{C}')$ en N.
On suppose que les droites (IM) et(JN) sont sécants en K.
Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

<u>Exercice 09</u>

Les parties I-) , II-) et III-)sont indépendantes

I-) Soit ABC un triangle ; P, Q, R sont des points respectifs des droites (BC), (AC) et (AB) tels que les cercles circonscrits aux triangles AQR et CPQ soient sécants en deux points Q et I.
Montrer que le cercle circonscrit au triangle BRP passe par I .

II-) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, M un point du cercle circonscrit au triangle ABC distinct des sommets du triangle. La droite (AM) coupe la droite (BC) en P.
Montrer que le cercle circonscrit au triangle BMP est tangent à (AB) en B.

III-) On considère deux cercles sécants en A et B .On mène par A une sécante rencontrant respectivement les cercles en M et N, par B une sécante les rencontrant respectivement en M' et N'.
Montrer que les droites (MM') et (NN') sont parallèles.

<u>Exercice 10</u>

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diagonales [AC] et [BD] se coupant en I .Soit P , Q , R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur
(AB) , (BC) , (CD) et (DA) .

1-) Construire la configuration précédente.

2-) Montrer que les points A, P, I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3-)a-) Montrer que :

$(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})[\pi]$.

b-) Montrer que :

$(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})[\pi]$.

4-) En déduire que :

$(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = 2(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA})[\pi]$.

5-) Montrer que les points
P, Q , R et S sont cocycliques si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires .Illustrer cette situation sur une figure.

<u>Exercice 11</u>

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC non aplati et non rectangle.

1-) Montrer que H est différent de A, B et C.

2-) Calculer $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})$ en fonction de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

3-) Soit K_C l'image de H par la réflexion par rapport à la droite (AB).

Montrer que les points A, B, C et K_C sont cocycliques.

4-) Soit (C) le circonscrit au triangle ABC et soit C_A, C_B, C_C les images de (C) par les réflexions par rapport respectivement aux droites (BC),(CA) et (AB).

Montrer que H est l'unique point commun aux trois cercles C_A, C_B, C_C.

ISOMETRIES ET SIMILITUDES PLANES DIRECTES

Exercice 01

1) Montrer qu'une isométrie conserve le produit scalaire.
2) Montrer qu'une isométrie est une application affine.

Exercice 02

Soient A, B, A′ et B′ quatre points tels que

$A \neq B$ et $A'B' = AB$.

On désigne par t la translation de vecteur

$\overrightarrow{AA'}$ et on pose $t(B) = B_1$.

1) Justifier qu'il existe une rotation r de centre A′ qui transforme B_1 en B′.
2) On pose $f = r \circ t$.
Démontrer que f est un déplacement qui vérifie $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
3) Soit g une isométrie vérifiant $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.
 a) Démontrer que $f^{-1} \circ g$ laisse invariant les points A et B.
 b) En déduire la nature de $f^{-1} \circ g$ et que f est unique.
4) Quelle conclusion peut-on tirer de cette étude?

Exercice 03

A) Dans le plan orienté, on trace un triangle non isocèle MNP tel que $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Soient les points A et B tels que :

- ✓ A est sur le segment [MN]
- ✓ B est sur le segment [MP]
- ✓ $AN = BP$, $A \neq N$.

Justifier l'existence d'une rotation r telle que r(A)=B et r(N)=P. Préciser son angle et son centre.

B) Déterminer la nature de l'application f associé à l'application complexe F définie par :

1) $F(z) = iz + 1 - i$.
2) $F(z) = i\bar{z} + 1 - i$

Exercice 04

Soit Ω un point du plan et f l'application du plan dans lui-même définie par :

- $f(\Omega) = \Omega$.
- Si $M \neq \Omega$, $M' = f(M)$ est le milieu de $[\Omega, M_1]$, ou M_1 est tel que $\Omega M M_1$ est un triangle équilatéral de sens direct.

1. Soit M un point distinct de Ω. Montrer que $M' = f(M)$ est tel que : $\Omega M' = \frac{1}{2}\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3}$.
2. Soit h l'homothétie de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2}$ et r la rotation de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 Prouver que $f = h \circ r = r \circ h$.
3. Montrer que f multiplie les distances par $\frac{1}{2}$ et conserve les angles orientés.

Exercice 05

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation s, d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.

1. Déterminer la nature de s et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'affixe du point C image par S du point $A(2 - i\sqrt{3})$.
3. Calculer l'affixe du point B tel que S(B)=O.
4. Donner l'expression analytique de s.

Exercice 06

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considéré la transformation S d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 4 - 2i$, les points A et B d'affixes respectives 2+4i et 1-i

1) Déterminer la nature de S et déterminer ses éléments caractéristiques.
2) Déterminer l'image de la droite (AB) par une similitude S.

Exercice 07

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A qui transforme B en O .
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s' qui transforme B en O et A en D .

Exercice 08

On dit qu'un triangle $A'B'C'$ est directement semblable à un triangle ABC s'il existe une similitude directe s telle que $A' = s(A), B' = s(B), C' = s(C)$.

1. Démontrer que si $A'B'C'$ est directement semblable au triangle ABC, alors ABC est directement semblable à $A'B'C'$.
2. Démontrer que si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables, alors :
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})[2\pi]$$
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'})[2\pi]$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})[2\pi]$$
3. Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $\begin{cases} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})[2\pi] \end{cases}$ sont directement semblables.
4. Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'})[2\pi]$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'})[2\pi]$ sont directement semblables.

Exercice 09

On considère les points A, B, C, P, Q et R dont les affixes respectives sont : a=1 – i ; b=2 + 3i ; c=-2 + i ;p=-1 + 3i ;q=2 – 2i ; et r=4 + 4i.

Démontrer que les triangles ABC et PQR sont directement semblables.

Exercice 10

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et G son centre de gravité.

Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s de centre A ,qui transforme G en B .

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et s la similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, qui transforme B en A .

Déterminer le centre de cette similitude et construire l'image C′ de C par s.

Le centre O de la similitude est tel que $\begin{cases} OA = 2OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .On considère les points A(2,0) , B(1,1) , C(-2,-1) , A'(3,10) , B'(4,10) et C'(-3,-1) .

Soit f l'application affine du plan telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1-) Démontrer que f est bijective.

2-) Déterminer l'expression analytique de f.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ et f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1-) Démontrer que fof =Id.

2-) Démontrer que l'ensemble des points invariant est une droite (D) que l'on déterminer.

3-) Soit M un point du plan et M' son image par f

a-)Démontrer que le milieu de [MM'] appartient à (D)

b-) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D)

c-)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 14

On considère trois points non alignés A, B et C. Pour tout réel α on définit l'application f_α du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

1-)Montrer que f_1 est une translation que l'on précisera.

2-)a-) On suppose que $\alpha \neq 1$. Montrer que f_α admet un unique point invariant G_α et que : $\overrightarrow{CG_\alpha} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ où k est un réel dépendant de α que l'on précisera.

b) Déterminer l'ensemble des points G_α lorsque $\alpha \in IR$ et $\alpha \neq 1$.

3-)On suppose que $\alpha \neq 1$ .Exprimer $\overrightarrow{G_\alpha M'}$ en fonction de $\overrightarrow{G_\alpha M}$ puis en déduire la nature de f_α suivant les valeurs de α .On précisera ses éléments caractéristiques.

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral de sens direct .On désigne par Γ le cercle circonscrit à ABC et O son centre .La médiatrice de $[BC]$ coupe Γ en A et D .On note A' le point d'intersection de des droites (BD) et (AC).

1-) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2-) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$S_{(BD)} o S_{(DC)}$; $S_{(CA)} o S_{(AB)}$; $S_{(DC)} o S_{(CA)}$

2-) On note $f = S_{(BD)} o S_C o S_{(AB)}$.

a-)Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f.

b-)En déduire la nature de la transformation $S_{(BD)} o S_C$.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, f l'application du plan qui associe à
tout point $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

1-) Montrer que f est une isométrie.

2-) Montrer que f admet un unique point invariant O.

3-)En déduire que la nature de f

4-)On pose I'=f(I) avec I(1,0) .

a-)Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'})$.

b-) En déduire les éléments caractéristiques de f.

5-) Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(D): y = x$.

Démontrer qu'il existe une symétrie orthogonale S' telle que $f = S' o S$ dont on déterminera l'axe.

Exercice 17

On note H l'orthocentre du triangle équilatéral ABC .On désigne par r_A , r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B et C et de même angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on pose : $f = r_A o r_B$ et $g = r_C o r_B o r_A$.

1-)Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $g(B)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g .

2-)On désigne par $S_{(AB)}, S_{(BC)}$ et $S_{(CA)}$ les réflexions d'axes respectifs $(AB), (BC)$ et (CA) et on pose $h = S_{(CA)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$ et soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par B .

Montrer que $S_{(AB)} o S_{(BC)} = S_{(d)} o S_{(AB)}$

3-)Soit B' le milieu de $[AC]$.Montrer que $h = t_{2\overrightarrow{BB'}} o S_{(AB)}$.

Exercice 18

Dans le plan orienté , on considère ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB \prec AC$.

On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre .Soit E le milieu de $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$.

La droite (OE) coupe Γ en I et J , tels que J et A soient sur le même arc de corde $[BC]$ du cercle Γ .

1)a)Faire une figure.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

2)a)Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que : $R(A)=P$ et $R(B)=C$.

Déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point de Γ que l'on précisera .

c)Quelle est la nature du triangle JAP ?

3)a)Déterminer l'image de C par RoS_E où S_E est la symétrie de centre E

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de RoS_E

Exercice 19 **Bac C 1994**

On considère un triangle ABC direct .On appelle I, J, K les milieux respectifs des cotés $[BC], [CA], [AB]$ .Soit N l'image de C par la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et P l'image de A par la rotation de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $KP = IJ$.

2) On appelle r la rotation qui transforme K en J et P en I .

Quelle est une mesure de l'angle de cette rotation ?

3) Démontrer que les triangles IJN et IKP sont isométriques.

En déduire l'image de I par r et que le triangle PIN est isocèle et rectangle en I.

4) On appelle r_1 la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de B par $r_1 o r_2$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_1 o r_2$.

Exercice 20

ABC est un triangle de sens direct, $ABED$ et $ACGF$ sont des carrés construits extérieurement à ABC sur les cotés $[AB]$ et $[AC]$ .On désigne par H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, K le milieu de $[DF]$, I centre du carré $ABED$ et J centre du carré $ACGF$.

1) Soient les quarts de tours directs R et R' de centres respectifs I et J .

Démontrer que $RoR' = R'^{-1} oR^{-1} = S_K$ (avec S_K symétrie de centre K).

2) Déterminer l'image de la droite (AH) par S_K .En déduire que les points K, A, H sont alignés.

3) Soit A' l'image de du point A par S_K .

a)Démontrer que $R(C) = A'$.En déduire que $(EC) \perp (A'B)$.

b) Démontrer que $(BG) \perp (A'C)$.

4) En déduire des questions précédentes que les droites $(EC), (BG)$ et (AH) sont concourantes.

Exercice 21

Dans le plan orienté, on considère le triangle MPQ tel que :

$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit Ω le symétrique de M par rapport au milieu de [PQ] et soit H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MPQ. S la similitude de centre M qui transforme H en P.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2)a) Montrer que $S(Q) = \Omega$

b) En déduire l'image de la droite (PQ) par S.

Exercice 22

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B .Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment[AB].

1-)Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

2-)Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3-)Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ .On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D.

a-)Déterminer le rapport et l'angle de .
b-) On note I le centre de la similitude S .Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ .En déduire la position du point I et le placer sur la figure.
c-) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD .

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1-)Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
a-)Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.
b-) Montrer que $S_1(C) = I$.En déduire l'image de la droite (BC) par S1.

2-)Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C .
a-)Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.
b-) Soit M un point de (BI) , M′ son image par S_2.On suppose que M et M′ sont distincts de I. Montrer que les quatre points A, M, I, M′ sont cocycliques.

Exercice 24

Dans le plan orienté on considère un carré direct MNPQ de centre O .Soit I un point de [NP] distinct de N .On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ).La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1-)Faire une figure avec NP = 5cm et NI = 2cm (On placera (NP) « verticalement 3 » c'est-à-dire parallèlement au grand coté de la feuille).

2-)Soit R le quart de tour de direct de centre M .
a-)Préciser l'image de la droite (NP) par R
b-) Déterminer les images de K et I par R.
c-) Quelle est la nature des triangles KMJ et IML.

2-)On note E le milieu du segment [IL] ; F celui de [JK].Soit S la similitude directe de centre M , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
a-)Préciser les images de K et de I par S .
b-) Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit le segment [NP] privé de N
c-) Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

Exercice 25

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que :
$r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1-)Montrer que $r_C o r_B o r_A$ est la symétrie de centreB.Préciser la position du point B .

2-)On admet qu'il existe une seule similitude plane directe S de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$ .En déduire que $S(E) = D$.

3-)Soit Ω le centre de la similitude S.
Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DE .
Construire le point Ω .

4-)a-)Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).
b-) Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD] . En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu segment [DE] .

Exercice 26

Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 2$.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2) Soit Ω le centre de S. Quelle est la nature du triangle $M\Omega M'$, où M' est l'image de M par S.
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $OM = OM'$.
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$

Exercice 27

Soit

$\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $f_\alpha : M(z) \to M'(z')$ tel que $z' = (-1+i\tan\alpha)z - i\tan\alpha + 2$.

1) Déterminer le module et un argument de $-1+i\tan\alpha$.
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
3) Soit h_α l'homothétie de centre Ω (d'affixe 1) et de rapport $\frac{1}{\cos\alpha}$. Donner une écriture complexe de la rotation r_α telle que $f_\alpha = r_\alpha o h_\alpha$.

Exercice 28

Le plan est rapporte au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .On appelle T l'application du plan dans lui-même qui au point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que : $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -x+y-1 \end{cases}$

1-) On appelle z l'affixe du point M et z' celle de M'image de M par T. Ecrire z' en fonction de z
2-)Montrer que T est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques, on notera son centre Ω et ω l'affixe de Ω.
3-)Montrer que pour $M \neq \Omega$ on a : $\frac{z'-z}{\omega - z} = i$ .En déduire une construction géométrique de M'=T(M)
4-)Donner une équation cartésienne de la droite (D'), image de (D) :2x-y+1=0 par T.
5-)Soit A le point d'affixe -1+i et soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.
Pour M un point du plan, on pose M'=T(M) , M''= RoT(M) et on appelle g l'application du plan dans lui-même qui au point M associe le point G barycentre des points pondérés (M,1) , (M',-2) et (M'',-1).Ecrire une expression complexe de g .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 29

dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ définie par : $z' = u^2z + u - 1$; où u désigne un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une translation ; caractériser f chacune des valeurs trouvées.
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser f.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2; caractériser f.
4) Caractériser f lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 30

Pour tout nombre réel a non nul , on désigne par f_a l'application de C dans C qui associe à tout nombre complexe z le nombre complexe $Z - ia = \frac{i}{a}(z - ia)$
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on note F_a qui associe à tout point m d'affixe z , le point M d'affixe $f_a(z)$.

1-)Montrer que F_a admet un unique point invariant S_a dont on déterminera l'affixe.
2-)a-)Pour $m \neq S_a$, exprimer en fonction de a le rapport $\frac{S_aM}{S_am}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{S_am},\overrightarrow{S_aM})$.
b-)En déduire la nature de l'application F_a et préciser ses éléments caractéristiques .
3-)Montrer que $F_{a^{-1}} o F_{-a}$ est une translation.

Chapitre 14 : Produit vectoriel, produit mixte, transformations élémentaires de l'espace

Exercice 00

Répondez par Vrai(V) ou Faux(F) en mettant une croix dans les cases V ou F. Rectifiez quand c'est faux en

donnant dans la case(R) un contre-exemple sur le dessin en perspective cavalière d'un cube.	V	F	R
1- Par deux points de l'espace il passe une infinité de plans.			
2- Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.			
3- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.			
4- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul perpendiculaire à un plan donné.			
5- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.			
6- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites de ce plan.			
7- Si deux droites sont parallèles dans l'espace, alors toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.			
8- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite dans l'espace, alors elles sont parallèles.			
9- Si deux plans sont parallèles dans l'espace, alors toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.			
10- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.			
11- Si deux plans sont perpendiculaires à un même plan, alors ils sont parallèles.			
12- Si deux plans sont parallèles dans l'espace, alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre.			
13- Si deux plans sont perpendiculaires dans l'espace, alors toute droite de l'un est perpendiculaire à toute droite de l'autre.			
14- Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan, alors ils sont parallèles.			
15- Si une droite est parallèle à un plan (P), alors il existe un seul plan (Q) parallèle à (P) et contenant cette droite.			
16- Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors il existe un seul plan (P) parallèle à (D) et contenant (D').			
17- Si trois plans sont deux à deux perpendiculaires, alors l'intersection de deux d'entre eux est perpendiculaire au troisième.			
18- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.			
19- Si une droite (D) est perpendiculaire à une droite (D') et si (D') est parallèle à (D'') alors (D'') est perpendiculaire à (D)			
20- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.			

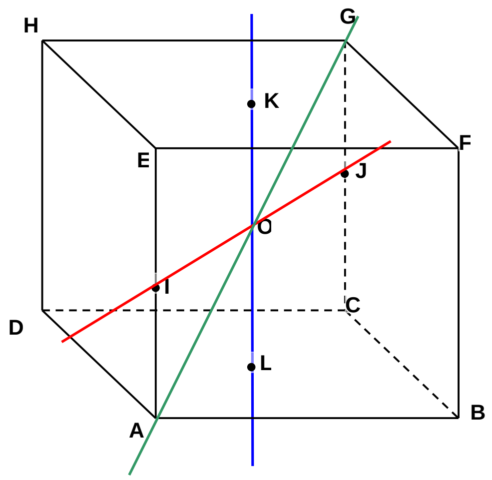
Exercice 01: [Recherche de rotations laissant invariant un cube]

On considère un cube ABCDEFGH.

(BDE) et (CFH) aux centres des triangles équilatéraux BDE et CFH.

b. Trouver deux rotations du cube autour de l'axe (AG).

c. En déduire 8 autres rotations laissant invariant le cube.



Exercice 02 : [Tétraèdre orthocentrique]
Soit ABCD un tétraèdre tel que les droites (AB) et (AC) sont respectivement orthogonales aux droites (CD) et (BD). On appelle H l'orthocentre du triangle BCD.

a) Démontrer que les plans ABH et ACH sont perpendiculaire au plan (BCD).
b) En déduire que la droite (AD) est orthogonale à la droite (BC).

Exercice 03: [Théorème des trois perpendiculaires]
Soit (D) une droite perpendiculaire en (O) à un plan (P) et (Δ) une droite incluse dans(P) et ne contenant pas O. Soit A un point quelconque de (D) distinct de O et B un point quelconque de (Δ).

a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale à (Δ) si et seulement (OB) est orthogonale à (Δ).

Exercice 04 :

Sur un tétraèdre EFGH on considère les points I,J, et K respectivement sur les arêtes [EF], [EG], [EH]. Déterminer les intersections du plan (IJK) et du tétraèdre EFGH suivant chacune des conditions ci-dessous :

1- (JK) est parallèle à (GH) et (IJ) non parallèle à (FG).
2- (JK) est parallèle à (GH) et (IJ) est parallèle à (FG).
3- Dans la condition (2-) donner la nature du contour de l'intersection.

EXERCICE 05

Un cône de révolution a pour hauteur 4m .Le rayon du cercle de base est 2,5m .

a) Faire un dessin .

b) Calculer l'aire latérale du cône .

c) Calculer le volume du cône .

EXERCICE 06

Un cône de révolution a pour base un cercle de rayon 1,89m .La longueur d'une génératrice est de 6,5m .

a) Faire un dessin.

b) Calculer la hauteur du cône.

c) Calculer le volume du cône.

EXERCICE 07

Un cône de révolution a pour hauteur 3,5cm .La longueur d'une génératrice est 5cm.

a) Faire un dessin.

b) Calculer le rayon du cercle de base.

c) Calculer l'aire latérale du cône.

d) Calculer le volume du cône.

EXERCICE 08 Un cône de révolution a un demi - angle au sommet de 60°. La longueur d'une génératrice est de 8,4cm.

a) Faire un dessin.

b) Calculer la hauteur du cône .

c) Calculer le volume du cône .

EXERCICE 09

1°/ Un octogone régulier ABCDEFGH est inscrit dans un cercle de centre O de rayon 6cm .

a) Faire un dessin en vraie grandeur .

b) Calculer AB et OM , où M est le milieu de [AB]

2°/ Une pyramide régulière de sommet S a pour base cet octogone .

On donne SM=12cm .

a) Faire un dessin .

b) Calculer la hauteur de la pyramide .

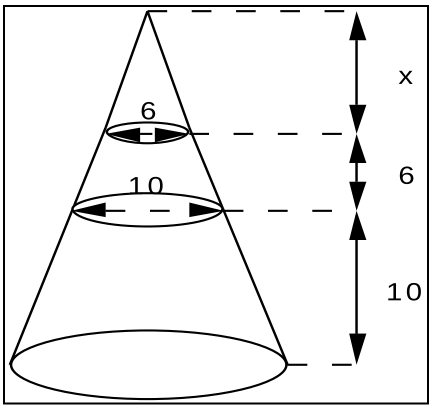
c) Calculer la longueur d'une arête latérale .

d) Calculer l'aire latérale de la pyramide .

e) Calculer le volume de la pyramide.

EXERCICE 10

On découpe un cône de révolution parallèlement à sa base en trois morceaux comme indiqué sur le dessin ci-dessous.



Les sections ont pour diamètres 6cm et 10cm.

a) Calculer x .

b) Quelle est l'aire de la base du cône initial ?

EXERCICE 11:

L'espace orienté E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui à tout point M de coordonnées (x,y,z) associe le point M' de coordonnées (x',y',z') tel que :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z+1 \\ z' = x-1 \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est une isométrie (c'est-à-dire que f conserve la distance).

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0,0,-1)$ et de vecteur directeur :
$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2) Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.

a) Montrer que le point $I\ (-1,0,0)$ appartient à P.

b) Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P.

3) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

4) Déterminer l'ensemble des points M de E d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :

a) au plan Q d'équation cartésienne : $2x+y-z=0$.

b) à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : $x=y=z$.

c)

EXERCICE 12 : [Recherche de rotations (Terracher TCE)]

On désigne par (C) et (C') les cercles inscrits dans les faces EFGH et BCGF du cube, par Ω et Ω’ leurs centres et par (P) le plan (ADG).

1- Démontrer que $S_{(P)}$ (C) = (C’).
2- Analyse
Soit R une rotation d’axe (Δ) transformant (C) en (C’).

a. Démontrer que (Δ) est contenu dans le plan (P).
b. Démontrer que R peut s’écrire R = $S_{(P)}$ 0 $S_{(Q)}$ où Q est un plan de symétrie de (C).
c. En déduire que (Δ) = (FG) ou que (Δ) est une droite de (P) passant par le centre du cube.
3- Synthèse
a. Prouver que (FG) est l’axe d’une rotation transformant (C) en (C’).Préciser son angle.
b. Soit (Δ) une droite de (P) par le centre du cube et (Q) le plan défini par (Δ) et Ω.
Démontrer que $S_{(P)}$ 0 $S_{(Q)}$ est une rotation d’axe (Δ) transformant (C) en (C’).

Exercice : 13

A, B et C sont trois points non alignés de l’espace, I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. De quels coefficients a , b , c faut –il affecter les points A, B, C, respectivement , pour que I soit leur barycentre ?
2. Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), soient les points A , B , C ont pour coordonnées respectives (-1 ;0 ;0) , (0 ;-$\sqrt{3}$;1) et (5 ;$\sqrt{3}$;2).
a. Vérifier que les points A , B et C ne pas sont alignés .Déterminer les coordonnées de I
b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
c. Déterminer l’ensemble des points M(x; y; z) de l’espace tels que $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -12$.Donner les éléments caractéristiques de l’ensemble E.

Exercice : 14

L’espace est orienté par le repère ortho normal direct (O ; $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$).On considère le cube OIRJNKLM.

A est le milieu de [IL] et B le point définit par :

$\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.P désigne le plan (OAB).

1. a) Précisez les coordonnées des points A et B.
b) Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.
c) Déduisez –en que l’aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$.
d) Le point C(1 ;$\frac{1}{3}$;1) appartient –il à P ?

2. On considère le tétraèdre OABK. Montrer que son volume est $\frac{1}{9}$.

Déduisez – en la distance du point K au plan P.

Exercice 15

Soit ABCD un tétraèdre régulier. G son centre de gravité et H celui du triangle BCD.

On note I , J , K , et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [AC] et [BD] .

1. a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) se coupent en G.
-b) Démontrer que la droite (CG) perce le plan (ABD) en H.
-c) Placer sur une figure les données précédentes.

2. Soient S_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et S_2 la réflexion par rapport au plan (ALC). On pose $r=S_2 \circ S_1$.

a. Montrer que (BIC) est le plan médiateur du segment du segment [AD] ; en déduire les images de A et de D par S_1.Déterminer de même les images de B et de D par S_2 .

b. Déterminer les images des points A, B, C et G par r.

c. Démontrer que r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Exercice : 16

ABCDEFGH est le cube ci-dessous.

O est son centre, I est le milieu de [AB] , J le centre de gravité de la face DCGH.

1. a) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments [ED] et [FC] .
b) On note S_1 , S_2 et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG) , (BCH) et (IOJ) .Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

2. On considère l'application f telle que $f=S_1 \circ S_2$:

a. Prouver que f est une rotation d'axe (BH).

b. En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$, déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f.

3. Soit r le demi –tour d'axe (OI) et g l'application $r \circ f$

a. En décrivant r comme la composée de deux réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de g.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

Exercice 17

On considère le cube ABCDEFGH.

1. Soit L , le centre du carré ABFE et J le milieu de [AL].Soit la similitude directe du plan (ABF) telle que f(A)=L et f(B)=J.
a. Déterminer l'angle et le rapport de f .
b. Construire E'=f(E).Montrer que f(F) est le milieu du segment [AB] .
c. Soit Ω le centre de la similitude f. Montrer que les points Ω , A , L et E d'une part et Ω , A , B et J d'autre part sont cocycliques . En déduire une construction de Ω .
d. Montrer que les droites (ΩA) et (ΩE) sont orthogonales.
2. On désigne par I le milieu du segment [FG] et toujours L le centre du carré ABFE.
a. Vérifier que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB}$. En déduire l'aire du triangle IHB.
b. Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan (BIH).

EXERCICE 18

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, I le centre de ABCD.

1) a) Determiner $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.

c) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BM} = 0$.

2° a) Soit $P = bary\{(A;2),(C;-1)\}$.

Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que
$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Déterminer l'ensemble (Γ). Montrer que $A \in (\Gamma)$.

c. 3° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$.

EXERCICE 19

On considère le cube ABCDEFGH, et I le centre de gravité du triangle EBD. Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(E,1),(B,1-m),(G;2m-1),(D;1-m)\}$.

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.

2. Préciser la position de G_1.

3. Vérifier que G_0 =A. En déduire que les points A, I et G sont alignés.

4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.

5. a. Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.

b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthonormal au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

2. Déterminer les coordonnées du point G_m.

3. Pour quelles valeurs de ù la distance de G_m au plan (EBD) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, I le centre de ABCD.

1) a) Determiner $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.

c) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BM} = 0$.

2° a) Soit $P = bary\{(A;2),(C;-1)\}$. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Déterminer l'ensemble (Γ). Montrer que $A \in (\Gamma)$.

3° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$.

Chapitre 15 : Transformations du plan

Exercice : 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M, de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 2) \\ y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 4 - 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

1. Exprimer x et y en fonction de x' et y'. En déduire que f est une transformation
2. Soit M_1 et M_2 deux points d'images respectives M'_1 et M'_2 par f. Exprimer $M'_1 M'_2$ en fonction de $M_1 M_2$, en déduire que f est une isométrie.
3. Montrer que f possède un unique point invariant I. En déduire la nature de f.
4. O' désigne l'image de O par f, déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'})$.
   En déduire la nature de f

Exercice : 2

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et A', B' et C' trois autres points tels que A'B' = AB, A'C' = AC et BC = B'C'. On suppose qu'il existe deux isométries f et g vérifiant f(A)=g(A)=A', f(B)=g(B)=B' et f(C)=g(C)=C'.
Montrer que $g^{-1} \circ f = id_p$; en déduire que f = g.
Soit A et B deux points distincts du plan et A' et B' deux autres points tels que A'B' = AB.

1. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha\ [2\pi]$ et $f = R_{(A',\alpha)} o t_{\overrightarrow{AA'}}$. Montrer que f(A) = A', f(B)=B'.
2. Soient g et f deux déplacements qui transforment A en A' et B en B'. Montrer que $g^{-1} \circ f$ est un déplacement qui possède deux points invariants distincts.
   En déduire que f = g. Conclure.
3. On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Caractériser le déplacement f.
4. On suppose que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ et on pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = \alpha\ [2\pi]$. Montrer que f est une rotation d'angle α dont le centre O appartient aux médiatrices (si elles existent) de [AA'] et [BB'].
5. Les données sont les même qu'au 2.
   a. f étant l'unique déplacement tel que f(A) = A' et f(B)=B' ; on pose $h = foS_{(AB)}$. Quelle est la nature de h ? Montrer que h(A)=A' et h(B)=B'.
   b. Soit h et k deux antidéplacements qui transforment A en A' et B en B'. En considérant $k^{-1}oh$, montrer que h = k.

Exercice : 3

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose f=Rot et g= toR.
1) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

2°) a) déterminer la nature de la transformation gof^{-1}.
b) Chercher l'image de A par gof^{-1} et caractériser alors cette application.

c) Soit M un point du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.

Quelle est la nature du quadrilatère AC M_1M_2 ?

Exercice : 4

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$; on désigne par I le milieu de [BC] . On note R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer $f = R_C o t o R_B$.
2. Préciser l'image par f du point B .

Caractériser f .

TRANSFORMATIONS AU BAC

Exercice 1 Bac 93

Tous les points considérés dans cet exercice appartiennent a un plan euclidien orienté IP. Soit D une droite de IP, O un point de D et C un cercle de centre O. C coupe D en A et B.
Soient H le milieu de [OB] et I le point de C tel que $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HI})=\frac{\pi}{2}$.

Soient K et J les symétriques de H et I par rapport à O .

1. Montrer que les triangles KAJ et HIA sont directement semblables (on pourra utiliser le triangle HBI).
2. Soit S la similitude directe transformant K, A, J en H, I, A respectivement. Déterminer son angle α et son rapport k.
3. prouver que les trois cercles de diamètre [KH] , [AI] et [JA] respectivement passent par le centre Ω de la similitude S.
4. Déterminer l'image du point O par la similitude S.

Exercice 2 Bac 89

Dans le plan IP, on considère un triangle équilatérale ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC].

On note r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

S_I la symétrie de centre I.

$t_{\overrightarrow{BC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = r_C \circ s_I \circ r_B$ et $g = r_C \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_B$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g

Exercice 3 Bac 94

Dans le plan IP orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocéle en A tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note I le milieu du segment [BC].

1. Construire J = R(I).
2. On note F_1 = RoT et F_2 = ToR ; déterminer F_1(J) et F_2(I) puis en déduire la nature et lesz éléments caractéristiques F_1et F_2 .
3. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2. Quelle est la nature du quadrilatére BCM_1M_2 ?

Exercice 4 Bac 96

Dans le plan orienté on considère deux points A et B. On prendra AB = 6cm pour la figure.

1. Déterminer et représenter l'ensemble ξ des points M du plan tel que $\frac{MA}{MB}=3$.
2. Déterminer et représenter l'ensemble ψ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. a. Placer le point C image de B par la rotation r de centre A et d'angle

de mesure $\frac{2\pi}{3}$, puis le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

b. On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D. déterminer le rapport et l'angle de S.

c. On note Ω le centre de S. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle ($\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}$).

d. En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

e. Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

Exercice 5 Bac 99

On considère dans le plan euclidien orienté, un triangle ABC équilatéral direct ; on note H le pied dela hauteur issue de C, H_1 le projeté orthogonal de H sur [AC].

1. a. Calculer le rapport $\frac{H_1C}{H_1A}$

   b. Déterminer les centre des simlitudes plane directes d'angle nul ou plat transformant A en C.

2. Déterminer l'ensemble des points M du ^plan tel que MC = 3MA
3. Construire le centre Ω de la similitude plane directe S de rapport 3 et d'angle -$\frac{\pi}{3}$ telle que S(A) = C

Exercice 6 Bac 01

Dans un plan orienté, on considère un carré direct MNPQ de centre O.
Soit I un point de [NP] distinct de N.
On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1. Faire une figure avec NP = 5cm ; NI = 2cm (on placera (NP) « verticalement » c'est-à-dire parrélement au grand coté de la feuille).
2. Soit R le quart de touir direct de centre M.
   a. Préciser l'image de la droite (NP) par R.
   b. Déterminer les images de K et I par R.
   c. Quelle est la nature des triangles KMJ et IML.
3. On note E le milieu[IL], F celui [JK] ; soit S la similitude directe de centre M d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Préciser les images de K, et de I par S.
   b. Quel est le lieu géomètrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.
   c. Déduire de ce qui précède que les points O,N, E et Q sont alignés.

Exercice 7 Bac 03

Soit ABCD un losange de centre Ω. Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E ; et J celuit despoints O et Ω.

1. a. Démontrer que G est barycentre de chacun des systémes $\{(\Omega,4);(E,1)\}$ et $\{(J,4);(A,1)\}$

   b. Soit f l'application du plan dans lui-même associant à tout point M le point M' défini par : 4 $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}$ .Déterminer la nature de f et ses éléements caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par f ?

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ et s rof.
   a. Démontrer que s est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.
   b. Construire H = s(G) et L = s(A) .
   c. Démontrer que le centre I de la similitude s appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.

Exercice 8

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que ($\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure soignée avec AB = 6cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B..
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser l'image de E par s. En déduire l'angle ($\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}$).
   b. On note Γ le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Placer Γ et I sur la figure. Montrer que I appartient à Γ.
   c. Montrer que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales.
3. Soit Γ' le cercle circonscrit au carré DEFG. Placer Γ' sur la figure. Montrer que I appartient à Γ'.

Etablir que les points C, G et I sont alignés