Inspection d'académie de DAKAR — Année scolaire 2022/2023

Lycée LAMINE GUEYE — Première S1

M. DIACK

Série d'exercices sur :
Dérivation & Etude de fonctions

EXERCICE 01

1. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

c. $h(x)=\dfrac{-2x+1}{4x^2}$ d. $k(x)=3x^2-2x+\dfrac{1}{1-x^2}$

e. $f(x)=\dfrac{x^2}{3-2x^2}$ f. $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$

g. $h(x)=\dfrac{(-2x^2+x)^2}{4x^4}$ h. $k(x)=\dfrac{2}{3\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$a(x)=\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{7}{2}x^4+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x-7$ $b(x)=(4-3x)^7$

$c(x)=\dfrac{4}{7x}-\dfrac{5x^2}{2}$ $d(x)=\dfrac{-2x^2-x+3}{3x-4}$ $e(x)=\sqrt{2x-x^2}$

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$ (donner f' en fonction de $\sin x$).

2. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et préciser leur sens de variation :

a. $f(x)=4x^5-6x^3+2x-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

c. $h(x)=\dfrac{-2x+1}{4x^2}$ d. $k(x)=3x-2+\dfrac{1}{1-x^2}$

3. Déterminer D_f, calculer la fonction dérivée, déterminer le signe de la fonction dérivée et dresser le tableau de variations de chacune des fonctions :

a. $f(x)=-2x^2+\sqrt{2}x+\dfrac{3}{5}$ b. $f(x)=\dfrac{-3x^4+4x^3+3}{2}$

c. $f(x)=\dfrac{1-2x}{3x-4}$ d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{8-2x^2}$ e. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

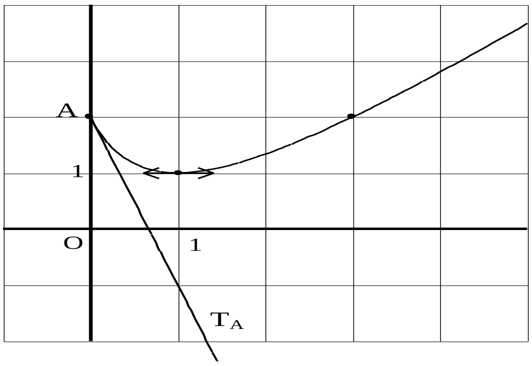
f. $f(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{3x-1}$ g. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

EXERCICE 02

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note f' la fonction dérivée de f.

La droite T_A est tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.



1. A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, compléter le tableau ci-dessous :

X	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

2. Donner l'équation de la tangente au point A et de la tangente au point d'abscisse 1.

EXERCICE 03

On suppose que la fonction g est dérivable sur $[-10\,;10]$ et admet le tableau de variations suivant :

X	-10	-1	5	10
g	0 ↘	-5 ↗	3 ↘	-7

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Entourer la bonne réponse sans justifier.

1. $g(0)<g(4)$	V	F
2. $g(-1)<g(10)$	V	F
3. $g(-9)>g(-2)$	V	F
4. L'équation $g(x)=1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-10\,;10]$	V	F
5. $g'(x)>0$ sur $]-1\,;5[$	V	F
6. $g'(x)<0$ sur $[5\,;10]$	V	F
7. La dérivée g' peut s'annuler en -10	V	F
8. C_g admet au moins deux tangentes horizontales	V	F

EXERCICE 04

I. Soit la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x+1}$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 0.

Préciser $f'(0)$.

b. A l'aide des formules de dérivation, vérifier que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>-1$. Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

II. Soit f la fonction trinôme telle que $f(x)=ax^2+bx+c$. Déterminer les réels *a, b, c* tels que sa courbe C_f admette au point $A(-2;-5)$ une tangente de coefficient directeur égal à −2 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

III. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\frac{2x-3}{-x+2}$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de *f*.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 1.

b. Etudier le signe de $f(x)-(x-2)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Existe-t-il des points en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

EXERCICE 05

Déterminer l'ensemble de définition, la dérivée, le signe de la dérivée et le tableau de variations de $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(1-x)^2}$.

1-1 : Rationnelle 2

Soit $f(x)=\frac{(1-x)^3}{x^2}$. C sa courbe représentative

a. Trouver *a, b, c, d* tels que $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2}$ pour tout *x* réel non nul.

b. Etudier les variations de *f*: dérivée, signe de la dérivée, limites, tableau.

c. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

d. Peut-on trouver un point de C où la tangente à C soit parallèle à la droite Δ ($y=-x$) ? Si oui, préciser l'équation de cette tangente T'.

e. Montrer que C a une asymptote oblique D. préciser leurs positions respectives, tracer T' si elle existe, T, D et C.

f. Justifier l'existence d'une solution unique de l'équation $f(x)=1$. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

1-2 : Rationnelle 3

Soit $f(x)=\frac{4x^2-8x+7}{1-2x}$.

a. Déterminer son ensemble de définition, trouver *a, b, c* réels tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{1-2x}$.

b. Montrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2},2\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C) de *f*.

c. Déterminer suivant les valeurs de *x* la position de (C) par rapport à la droite (D) $y=2x+3$

d. Tracer dans un repère orthonormé la droite (D) et la courbe (C). (on placera particulièrement les points A et B de (C) d'abcisses respectives −1/2 et 3/2).

e. Déterminer graphiquement puis algébriquement le signe de *f*.

1-3 : Rationnelle 4

On considère la fonction *f* définie sur IR\{−2 , 2} par $f(x)=\frac{x^3-4x-4}{x^2-4}$.

a. Trouver deux nombres *a* et *b* tels que $f(x)=ax+\frac{b}{x^2-4}$

b. Etudier les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

c. Montrer que la courbe (C) de *f* a une asymptote oblique (D) et préciser la position de (C) par rapport à (D).

1-4 : Rationnelle 5

Soit la fonction *f*, définie sur IR \{−1, +1} par $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit *g* définie sur IR par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. Etudier les variations de la fonction *g*, et calculer ses limites en +∞ et -∞.
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de *g* sur IR .

Partie B : Etude de la fonction *f*.

1. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout *x* de IR \{−1, +1}, $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de *f*.

3. Montrer que pour tout x de IR \{−1, +1},

$f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que C admet une asymptote oblique D à l'infini. Etudier la position de C par rapport à D.

4. Déterminer les abscisses des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$

5. Tracer la droite D, les tangentes du 4. ainsi que la courbe C.

1-5 : Rationnelle 6 : problème long

Sur la feuille annexe, on a représenté la courbe (C) de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3}{x}-1$ dans un repère ortho normal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$. Préciser les équations des asymptotes à (C).
2. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation complet.
3. Placer, sur la feuille annexe, les points A et B de C d'abscisses respectives 1 et 3, puis déterminer une équation de la droite (AB).
4. Soit M un point quelconque de (C) d'abscisse x. La parallèle à l'axe des ordonnées et passant par M coupe la droite (AB) en un point N. On note alors P le milieu de $[MN]$.

Déterminer les coordonnées de M et vérifier que $N(x\,;-x+3)$ et $P\left(x\,;\frac{3+2x-x^2}{2x}\right)$.

Partie B : Le but de cette partie est d'étudier l'ensemble Γ des points P lorsque le point M décrit la courbe (C).

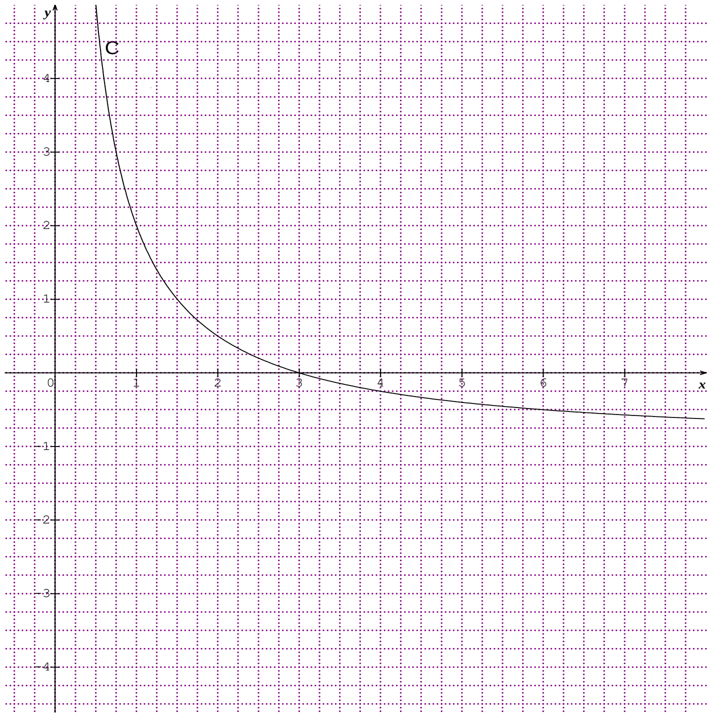
On pose alors g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\frac{3+2x-x^2}{2x}$ et Γ sa représentation graphique.

1. a. Déterminer la limite de g en 0 et en $+\infty$.

b. En déduire que Γ admet une asymptote dont on précisera une équation.

c. Démontrer que la droite D d'équation $y=-\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote à Γ.

2. Calculer $g'(x)$ puis établir le tableau de variation de g.
3. Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la courbe Γ.
4. Tracer Γ en vert et es asymptotes avec soin sur la feuille annexe.



EXERCICE 06

1-6 : Irrationnelle 1

Soit $f(x)=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Montrez que la dérivée de f est :

$f'(x)=\frac{-x^2-x+1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

3. Déterminez son sens de variation.

1-7 : Irrationnelle 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x)=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x<1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\frac{1}{3}<x_1<0$.

b. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que

$0 < x_2 < \frac{2}{3} < x_3 < 1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3 - 6u - 1 = 0.$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i = \frac{3}{2}(x_i - \frac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i = \cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel. (On rappelle que $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ et $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

EXERCICE 07

1-8 : Cours

Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Déduisez-en la dérivée de la fonction sinus.

1-9 : Cosinus

f est la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$. C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Etudiez les variations de f.
2. Déterminez une équation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente T_2 à C au point d'abscisse π.
3. Tracez les droites T_1 et T_2 ainsi que C.
4. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans $[0 ; \pi]$. Montrez que $1,7 < x_0 < 1,8$. Déduisez-en le signe de f.

1-10 : trigo+courbe

a. Montrez que $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

b. Soit la fonction $f(x) = -4x^3 + 3x - \frac{1}{2}$.

Etudiez f sur IR et tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

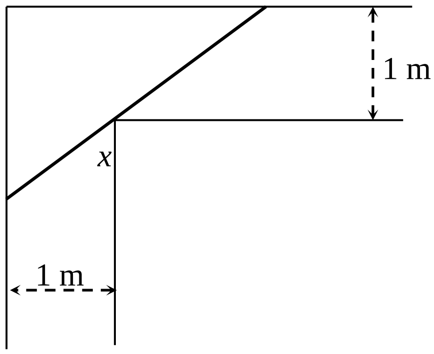
c. Calculez $f(-1)$ et $f(+1)$. Trouvez graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1 ; +1]$; donnez en une valeur approchée.

d. Déduisez de ce qui précède le nombre de solutions de l'équation $\sin 3a = \frac{1}{2}$ sur [0 ; 2 π]. Aurait-on pu utiliser une autre méthode ?

1-11 : trigo

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f(x) = x + \sin^2 x$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

1-12 : L'échelle dans le couloir



Soit f la fonction définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

1. Résoudre sur cet intervalle l'inéquation $\sin x \geq \cos x$.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a même signe que $\sin^3 x - \cos^3 x$.

b. Montrez que la fonction $g : x \to x^3$ est croissante sur IR. En déduire le signe de f'.

3. Dresser le tableau de variation de f et préciser ses limites en 0 et $\frac{\pi}{2}$.

4. On veut déplacer une échelle dans un couloir de 1 m de large en lui faisant tourner un coin à angle droit. Quelle est la longueur maximale de l'échelle ? On pourra noter x l'angle entre l'échelle et le mur. Que se passe-t-il (physiquement parlant) si l'échelle est plus longue que cette longueur maximale ?