Académie de Kaolack | **Année scolaire : 2024/2025**
Lycée Maba Diakhou Bâ | **Classe : 1S1**
Professeur : M. Sarr | **Durée : 04 h**

DEVOIR SURVEILLE N°1 DU PREMIER SEMESTRE

<u>Exercice 1</u> (08 pts)

1. Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{5x^2 - x + 1} = |x - 1|$ **b)** $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1$ **2x1,5pt**

b) $\sqrt{4x^2 - 5x + 1} \leq 2x - 5$ **d)** $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+x+1} > \frac{4}{3}\sqrt{x+1}$ **2x1,5pt**

2. L'objectif est de résoudre le système non linéaire $\mathbb{R}^3$ (S): $\begin{cases} -3x + y + 2z = -5 \\ 2x - 5y + 4z = 83 \\ x + y - 2x = -17 \end{cases}$ **1,5pt**

3. Une ferme spécialisée dans la production des lapins désire produire des lapins de couleur noire, blanche et grise. La production d'un lapin nécessite 5 mois de travail pour le noir, 3 mois pour le blanc et $\frac{1}{3}$ de mois pour le gris. La ferme produit 100 lapins pendant 100 mois de travail, le nombre de lapins blancs étant le tiers du nombre de lapins noirs. Parmi ces 100 lapins, combien sont de chaque couleur ? **0,5pt**

<u>Exercice 2 :</u> (03,5 pts)

Soit l'équation $(E): x^2 + (3m - 5)x + 2m^2 - 7m = 0$.

1. Déterminer suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E). **2pts**

2. Quel est le minimum de $|x_1 - x_2|$? **0,5pt**

3. Soit (E') : $\frac{3}{x+2m} + \frac{2}{x+m} = 1$. Montrer que (E') admet, deux racines distinctes sauf pour une valeur de m que l'on déterminera. **0,5pt**

4. Former une équation (E'') admettant pour racines $X_1 = x_1 - 2x_2$ et $X_2 = x_2 - 2x_1$. **0,5pt**

<u>Exercice 3 :</u> (03 pts)

1. On considère les polynômes suivants :

$P_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $P_2(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ avec $a \neq 0$ et $w \in \mathbb{R}$.

a) Effectuer la division euclidienne de $P_1(x)$ par $x^2 - 2wx + w^2$. **0,5pt**

b) Montrer alors que $P_1(x)$ peut s'écrire de la forme : $P_1(x) = (x - w)^2 Q(x) + R(x)$ avec

$Q(x) = ax + b + 2aw$ et $R(x) = P_2(w)x + P_1(w) - wP_2(w)$. **0,5pt**

c) Déduire que $P_1(x)$ est factorisable par $(x - w)^2$ ssi $P_1(w) = P_2(w) = 0$. **0,5pt**

2. Soit $P(x) = 105x^3 - 525x^2 + 840x - 420$.

   a) En se basant sur la question 1 c) Déterminer une racine d'ordre 2 de P. **0,25pt**

   b) Factoriser alors complètement $P(x)$. **0,75pt**

3. Résoudre dans IR $P(x) > 0$ puis $P(x^2 - x) < 0$ **2x0,25pt**

<u>Exercice 4</u> (03,5 pts)

Soit P et Q deux polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par : $P(s) = s^4 - 4s^2 + s + 1$; $Q(s) = s^4 - 4s^2 - s + 1$

et les réels $u, v, y\ et\ w$ sont tels que :

$$u = \sqrt{2 - \sqrt{3 - u}}\,,\ v = \sqrt{2 + \sqrt{3 - v}}\,,\ y = \sqrt{2 - \sqrt{3 + y}} \text{ et } w = \sqrt{2 + \sqrt{3 + w}}$$

1. Montrer que u et v sont racines de P et que y et w sont racines de Q. **4x0,5pt**

2. Pour tout réel s, déterminer une relation entre $P(s)$ et $Q(-s)$. **0,5pt**

3. Déterminer alors les autres racines de P puis donner la forme factoriser de $P(s)$. **0,5pt**

4. Déterminer la valeur exacte de $\rho = u \times v \times y \times w$ et montrer que $u + v = y + w$. **0,5pt**

<u>Exercice 5</u> (02 pts)

On rappelle que $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1})$

1. Montrer que $p(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est factorisable par $q(x) = x(x+1)(2x+1)$

Expliciter r(x) tel que $p(x) = q(x).r(x)$ pour n = 2 **1pt**

2. On considère le polynôme $K(x) = 2024x^{2025} - 2025x^{2024} + 1$

montrer que $K(x)$ est factorisable par $(x - 1)^2$. **1pt**

Good luck