Série d'exercices sur :
SUITES Numériques

Exercice 1 :

A. Calculer les sommes suivantes :

In = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) (somme des n premiers entiers naturels impairs)

Pn = 2 + 4 + 6 + ... + 2n (somme des n premiers entiers naturels pairs)

B. La suite (Un) est arithmétique de raison r = 8. On sait que u_{100} = 650. Que vaut U0 ?

Exercice 2 :

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

a) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour n ≥ 1 ; b) $u_n = n + \frac{1}{n}$, pour n ≥ 1 ; c) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 3 :

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1. Démontrer que ∀ p ≥ 2 , on a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.
2. Démontrer que ∀ $n \in IN^*$ on a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite bornée.

Exercice 4 :

Soit (Un) la suite définie pour n ≥ 2 par :

$U_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 2, on a : $\frac{1}{p^p} \leq \frac{1}{2^p}$
2. Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2^p}$.
3. En déduire que (Un) est bornée.

Exercice 5 :

A) On pose Sn = $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

1) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4.
2) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
3) Prouver que ∀ n ≥ 1 $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B) Une suite $(a)_{n\geq 0}$ arithmétique est telle que $a_2 = 3$ et $a_5 = 1$.

1) Calculer sa raison et son premier terme.
2) Calculer S = $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{99}$.

C) Déterminer a et b, réels, tels que a, a+2b, 2a + b, soit une suite arithmétique, et $(a+1)^2$, $(ab+5)$, $(b+1)^2$ soit une suite géométrique.

Exercice 6:

On considère la suite $(U_n)_{n\in IN}$ de réels définie par :

$U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right)$, ∀, $n \in IN$

1. Démontrer que ∀ n ; $U_n > 0$.

2. Soit $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$.Etablir une relation entre V_{n+1} et V_n .
   En déduire la limite de V_n puis celle de U_n quand n tend vers + ∞.

Exercice 7 :

Soit a un réel fixé et (U_n) la suite de réels définie par :

$U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = aU_n + (1\text{-}a)U_{n-1}$;

(V_n) la suite définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1. Démontrer que (Vn) est une suite géométrique. Calculer Vn puis Un en fonction de a et de n.
2. Déterminer a pour que la suite (Un) soit convergente. Préciser alors sa limite.

Exercice 8 :

On considère la suite (Un) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \; et \; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 6U_{n+1} - 5U_n \end{cases}$$

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4.
2. Résoudre l'équation du second degré suivante :
   $x^2 = 6x - 5$.
3. Déterminer deux réels A et B tels que : $U_n = A.5^n + B$. En déduire U_{10}.

Exercice 9 :

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$;

(U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \;\; et \;\; U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \;\; ; V_0 = b \;\; et \;\; V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

1. Démontrer que $\forall, n \in IN, 0 \prec U_n \prec V_n$
2. Démontrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
3. Démontrer que $\forall$ n $\in$ IN ;
   $V_{n+1} - U_{n+1} \le \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.
   En déduire que
   $V_n - U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (V_0 - U_0)$.En déduire que $(V_n - U_n)$ converge vers 0.
4. Soit L la limite commune aux deux suites (U_n) et (V_n) ; montrer que $U_nV_n = ab$ et en
   déduire L en fonction. de ab.

Exercice 10 :

Etudier la convergence des suites :

a) $U_n = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x(x+2)}$; b) $U_n = \frac{n^2 \cos n}{n^3 + 3n - 4}$; c) $U_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - (an + b)$;

d) $U_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$; e) $U_n = \frac{n - \cos n}{n + \sin n}$.

Exercice 11 :

Soit la suite (Un) définie par :

$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.

1) Dans un plan rapporté à un r.o.n. , représenter la fonction f(x) = $\sqrt{2+x}$ et les premiers termes de la suite (Un).
Quelle semble être la limite de la suite ?

2) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que , pour tout n, $U_n \in [0;2]$.

3) On considère la suite (Vn) définie par $V_n = 2 - U_n$

.a) Quel est le signe de Vn ?

b) Montrer que pour tout n , $\frac{V_{n+1}}{V_n} \le \frac{1}{2}$, puis , à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $V_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) En déduire la limite de la suite (Vn) , puis la limite de la suite (Un).

Exercice 12 :

Soit la suite (Un) définie par Uo = 1 et

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n}$$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Montrer que la suite (Un) est positive et croissante.
3) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} \succ U_n + \frac{1}{2}$.

   En déduire par réc. Que $U_n \succ 1 + \frac{n}{2}$.
4) la suite est elle convergente ?

Exercice 13 : ***<u>Extrait du concours général TS-2007</u>***

Soit U la suite définie par $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n + 1$, avec $U_1 = 1 \ et \ U_2 = 2$.

1 / Montrer que U est une suite positive et croissante.

2 / On définit la suite V par $V_n = U_n + 1$ pour tout n > 0.

Donner l'expression précise de V_n en fonction de n.

3 / Démontrer que :

(R1) : $(V_{2n})^2 = V_{2n-1}\ V_{2n+1} - 1$

(R2) : $(V_{2n+1})^2 = V_{2n}\ V_{2n+2} + 1$

4 / Déduire de la question 3 / la relation

(R3) : $(U_{2n+1} - U_{2n-1})^2 = U_{2n-1}U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1.}$

5 / Montrer que : (R4) :

$(U_{2n+1} + U_{2n-1})^2 = 5U_{2n-1}U_{2n+1} + U_{2n-1} + U_{2n+1.}$

(R5) :

$= 5U_{2n-1}U_{2n+1} = (U_{2n+1} + U_{2n-1})(U_{2n-1} + U_{2n+1.} - 1)$.

6 / A partir de (R5) démontrer que si U_{2n-1} est premier, alors il divise soit U_{2n+1}, soit $U_{2n+1} - 1$.

<u>Problème 1 :</u>

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

<u>1er contrat</u> :

un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.

<u>2ème contrat :</u>

un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36ème mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs)

(Remarque de vocabulaire : un bail est un contrat de location)

<u>Problème 2 :</u>

Les V.H.F. (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient, une nuit, volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :"Le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du troisième grade, trois. Et ainsi de suite."

Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice :"Nous en prendrons cinq chacun, dit le plus audacieux." Et ainsi fut fait.

Combien d'appareils les V.H.F avaient–ils volés ?