

Devoir N° 3 semestre N°2 de Mathématiques
Lundi 22/05/2023 de 08h à 12h (04h)



EXERCICE : 01 (05 points) [**rappel** : $x \wedge y$ signifie $\text{pgcd}(x, y)$]

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des E des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant l'équation de **Pythagore** : $x^2 + y^2 = z^2$.

1) Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, le triplet $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2) \in E$.

Donner trois éléments distincts de l'ensemble E .

2) On considère le triplet $(x, y, z) \in E$ vérifiant $x \wedge y = 1$.

a) Montrer qu'alors $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$

b) Montrer que les entiers x et y ne sont pas de même parité.

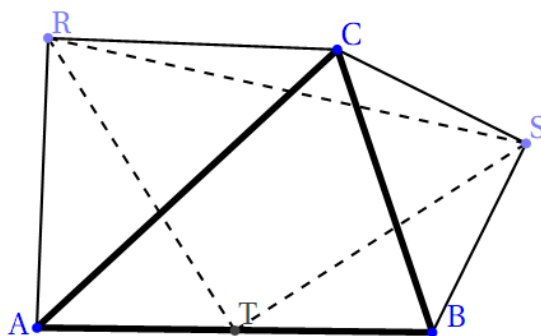
c) On suppose par exemple que x est impair et que y est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tels que :

$$x = p^2 - q^2 ; y = 2pq ; z^2 = p^2 + q^2$$

Montrer que p et q sont des carrés parfaits

3) En déduire l'ensemble E .

EXERCICE : 02 [04 points]



Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARC et BSC isocèles et rectangles respectivement en R et S . si T est le milieu de $[AB]$ montre que RST est rectangle et isocèle en C .

Indication : pensez à munir le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct d'origine T et les transformations planes.

EXERCICE : 03 (04 points)

Soit p et n des entiers naturels. On pose $I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{n,1}$.
2. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.
3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{p,n}$ et $I_{p+1,n+1}$. En déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n .

b) En déduire que la limite $n \rightarrow \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ a une limite que l'on précisera.

Petit Problème : (07 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

- 1) déterminer le domaine de définition de f
- 2)

a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}$

- b) Déterminer les variations de f
- 3)

a) Démontrer que $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[\left[\frac{x}{\ln 2x} < f(x) < \frac{x}{\ln x} \right.$

b) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

4) Soit g la fonction définie sur $]0;1]$ par : $g(x) = 2 - 2x + \ln x$

a) Etudier les variations de g et ses limites aux bornes de son domaine de définition

b) En déduire $\exists \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[/ g(\alpha) = 0$ et que $\forall x \in [\alpha; 1] \ln x \geq 2x - 2$

c) Montrer que $f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$. En déduire alors $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de f puis donner l'allure d sa courbe représentative