Inspection d'académie de DAKAR — Année scolaire 2022/2023
Lycée LAMINE GUEYE — Terminale S1
M. DIACK

Série d'exercices sur :
Arithmétique : Bézout, PGCD, PPCM,…

Diviseurs –Division euclidienne :

Exercice 1 :

1) Démontrer que a | b si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, a | (b–ka).
2) Déterminer les entiers relatifs a, tels que (a–5) | (a + 7).

Exercice 2 :

Déterminer les entiers naturels n tels que : n –1 divise n+3.

Exercice 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = 13$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $2x^3 + xy - 11 = 0$.

Exercice 4 :

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Exercice 5 :

On considère la fraction $q_n = \frac{n+19}{n-7}$; n étant un entier naturel strictement supérieur à 7.
1) Comment choisi n pour que q_n soit simplifiable ?
2) Déterminer n pour que q_n soit égale à un entier naturel.

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de :
1) $n^2 + 2n$ par $n + 1$.
2) $7n + 15$ par $3n + 2$.

PGCD – PPCM

Exercice 1:

Calculer pour tout entier naturel n non nul :
1) PGCD(n, 2n+1) et PPCM(n, 2n+1) 2) PGCD(2n+2,4n+2) et ¨PPCM(2n+2,4n+2).

Exercice 2 :

Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par 15 ; 23 ; 27.

Exercice 3:

Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

Exercice 4 :

Deux entiers a et b ont pour PGCD δ. Quel est le PGCD des entiers x = 13a+ 5b et y = 5a + 2b.

Equations diophantiennes du type : ax +by = c

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $11x + 16y = 0$

Exercice 2 :

1) a) Montrer que l'équation $59x + 68y = 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $59x + 68y = 2$.

Congruence

Exercice 3 :

1) Vérifier que $1000 \equiv 1\ [37]$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1\ [37]$.
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 4 :

1) Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.
2) Pour quelles valeurs de n entier naturel, $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Exercice 5 :

Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme 5n–1 ou 5n ou 5n + 1, n entier naturel.

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
1) $14x \equiv 3\ [4]$; 2) $\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases}$

Exercices de synthèse :

Exercice 1 :

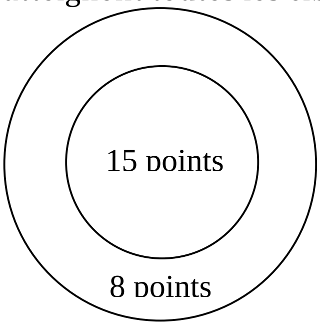
Soit n un entier naturel non nul. On considère deux nombres a et b définis par :
a = 2n+3 et b =5n-2.
1) Démontrer que le PGCD de a et b divise 19.
2 Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le PGCD de a et b est 19.

Exercice 2 :

1) Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E1) : $15x + 8y = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E2) : $15x + 8y = 1000$;

3) De combien de façon peut-on obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-dessous. (le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.)



15 points pour une fléchette qui atteint le disque central.
8 points pour une fléchette qui atteint la couronne.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in IN$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on faire émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?

2)a)Montrer que $\forall$ $n \in IN$, $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].

b) En déduire $\forall$ $k \in IN$ $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].

3)a)Montrer par récurrence que :

$\forall$ $n \in IN$ $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que $\forall$ $n \in IN$, $2u_n \equiv 28$ [100].

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 4 :

$\forall$ $x \in \mathbb{Z}$, on pose :

$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ et $A = \{ x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z} \}$.

1) Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis le déterminer.

2) Déterminer l'ensemble

$B = \{x \in A / 4x^2 - 9(f(x))^2$ est divisible par 7 }.

Exercice 5 :

Un astronome a observé, au jour J_o, le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard ($J_o + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronomie. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_o et J_1. Montrer que le couple (u ;v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2)a)Donner un couple d'entiers relatifs (x_o ;y_o) solution particulière de (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (u_o ;v_o) de (E_1)

c) Déterminer toutes les solutions de (E_1).

d) Déterminer la solution (u ;v) permettant de donner J_1.

3)a)Combien de jours s'écouleront entre J_o et J_1 ?

b) Le jour J_o était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ?

c) L'année 2000 était bissextile. Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Problèmes

Exercice 1

Partie A

1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans Z le système :

$$(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}.$$

1. Démontrer qu'il existe couple (u,v) d'entiers d'entier relatifs tel que : $19u + 12 = 1$(on ne demande pas cette question de donner un exemple de couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19v$ est solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}.$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$. équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3. a. Démontrer que le couple (u ;v) solution 19u + 12 v =1 et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 2

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$. où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et q ?

Partie B

On admet que 250507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a ;b) vérifiant la relation
$(E) : a^2 - 250507 = b^2$.

1. Soit X un entier naturel.
a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis les restes possibles de X^2 modulo 9.
b. Sachant que $(E) : a^2 - 250507 = b^2$. ; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple (a ;b) vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.
3. On suppose que le couple (a ;b) vérifie la relation (E).
a. Démontrer que a est congru à 501 ou à 5005 modulo 9.
b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple de solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 3

1. On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation.(E) ?
b. Résoudre (E). En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tel que 1109d = 1 + 226^{e}. (On précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels $a \leq 226$. On considère les fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : A tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} $par\, 227$. A tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} $par\, 227$.
a. vérifier que $g\left[f(0)\right] = 0$.
On rappel le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat **: Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors** $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1[227]$.
c. En utilisant 1.b, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g\left[f(a)\right] = a$. Que peut-on dire de $f\left[g(a)\right] = a$?

Exercice 4

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a+b; ab) = p$, où p est un nombre premier.
a. Démontrer que p divise a^2.(on remarque $a^2 = a(a+b) - ab$)
b. En déduire que p divise b.
On constate donc, de même, que d divise b.
c. Démontrer que PGCD(a ;b) = p.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
a. Résoudre le système :
$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}.$$
b. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} PGCD(a+b, ab) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}.$$

Exercice 5

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier
naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$; $13 = 9+2^2$ etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.
1. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in IN; n \in IN, n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.
b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$.
$a \in IN ; n \in IN, n \geq 3$.
a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à1 ou à 3 modulo 4.
b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
c. On pose n = 2p où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation
proposée n'a pas de solution.
3. étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$.
$a \in IN ; n \in IN, n \geq 2$.
a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
b. On pose n = 2p, en s'inspirant de 2. c. démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère les nombres
$a_n = 4 \times 10^n - 1, b_n = 2 \times 10^n - 1 \, et \, c_n = 2 \times 10^n + 1$.
1. a. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.
b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à100 donné ci-dessous que b_3 est premier.
d. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
e. Montrer que PGCD (b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2) En déduire que $b_n \, et \, c_n$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (1) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
a. Justifier le fait que (1) a au moins une solution.
b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).
c. Résoudre l'équation (1).
Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ;
53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Exercice 7

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u , v) tel que $6u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).2. Soit (O ; i , j , k) un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan (O; i , j).
Monter qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.
Déterminer les coordonnées de ce point.
3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
a. Montrer que l'entier y est impair.
b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Monter que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$
En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
d. En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.