



Année scolaire 2024-2025	Série d'exercices Chap : limites-continuité-dérivation-étude de fonction	Niveau 1S2.
		Cellule Mixte de Maths

Nota bene : les exercices avec étoile seront corrigés en classe.

Exercice 1

Répondre à chacune des affirmations par vrai (V) ou faux (F).

1. Si $a \in D_f$ alors la limite de f en a si elle existe est égale à $f(a)$.
2. Lorsqu'une fonction admet une limite en a alors cette limite est unique.
3. Si une fonction est continue en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
4. Si f est une fonction continue en a alors elle est ... en a .
5. Lorsqu'une fonction f est continue en tout élément d'un intervalle I alors elle est ... sur I

Exercice 2

Calculer les limites ci-dessous ::

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 3x^2 + 5)$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (x - 4)$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) \left(\frac{1}{x} - 4 \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^3 - 3x^2 - 7$

Exercice 3

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
2. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x + 1$;
3. $f(x) = -5x^4 - 3x^3 + x$
4. $f(x) = 2$;
5. $f(x) = -\sqrt{3}$

Exercice 4

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$
2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$

3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{-x^2+x-2}$
4. $f(x) = \frac{-2x^3-3x^2+1}{5x+1}$
5. $f(x) = \frac{3x+4}{-x^2+x-2}$

Exercice 5

Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$ ou en $-\infty$ lorsque c'est possible.

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$
2. $f(x) = \sqrt{-x-4}$
3. $f(x) = \sqrt{4x-7}$
4. $f(x) = \sqrt{-5x+1}$

*Exercice 6

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$; $a = 2$.
2. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$; $a = 1$.
3. $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^2+x-2}$; $a = 2$.
4. $f(x) = \frac{-2x^3-3x^2+1}{x^2+4x+3}$; $a = -1$
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $a = 1$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$; $a = 3$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; $a = 1$.
8. $f(x) = \frac{2x-10}{\sqrt{x+11}-4}$; $a = 5$

*Exercice 7

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$; $a = 2$.
2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$; $a = -2$.
3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{2x^2-x-1}$; $a = 1$ puis $a = \frac{-1}{2}$
4. $f(x) = \frac{-2x^3+3x^2+1}{-x+1}$; $a = 1$.

$$5. f(x) = \frac{5x+4}{x^2+2x+1} \quad a = -1$$

$$6. f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{4x^2-4x+1}; \quad a = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8

Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas ci-dessous.

- $f(x) = 3x-1; \quad a = 0$
- $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ si $x \neq -1$ et $x \neq 1$,
 $f(1) = 2; \quad a = 1.$
- $f(x) = x\sqrt{x} + 1; \quad a = 0.$
- $f(x) = |x+1|; \quad a = 2.$

*Exercice 9

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

- $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2x+5}{\sqrt{x-3}-1}; \quad a = 4$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}+2x+5}{\sqrt{3x+13}-2}; \quad a = -3$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^2+x+3}-3}; \quad a = 1$

Exercice 10

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, déterminer l'ensemble définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f dans chacun des cas ci-dessous.

- $f(x) = -x^3 + x.$
- $f(x) = x^4 + 3x.$
- $f(x) = \frac{2x-5}{-x+1}$
- $f(x) = \frac{x+10}{x^2+6x+9}.$

*Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = -4.$

- Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Etudier la continuité de f en 2.
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = ax^2 - 3bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}; \quad a \text{ et } b \text{ étant des nombres réels.}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue en 1.

*Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+b}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 3ax + 1, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}; \quad a \text{ et } b \text{ étant}$$

des nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit continue en 0.

DERIVATION

Exercice 1

Répondre à chacun des énoncés ci-dessous par vrai (V) ou faux (F)

1. Si f est dérivable en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, l \in \mathbb{R}.$

2. Si f est une fonction dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente à la courbe représentative de f point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}.$

4. Si f est une fonction dérivable en x_0 et que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum en $x_0.$

5. Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une bijection de I sur $f(I).$

6. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en un réel a alors f est dérivable en $a.$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 5.$$

Montrer que f est dérivable en 3 puis préciser $f'(3).$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x)$

$$= \frac{-x}{2-x}.$$

Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -2.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -2.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

3. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en -2.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x - 3|$

1. Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1 ; en 3 et en 4 .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 .
4. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en 3 .

*Exercice 6

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0 .
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 7

Soit g la fonction définie par : $g(x) =$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0 .
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 8

Etudier la dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de f , dans chacun des cas ci-dessous.

$f(x) = 2x^3$	$f(x) = 5x^2$	$f(x) = 3x\sqrt{x}$	$f(x) = \frac{-3}{x+1}$
$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + 1$	$f(x) = 3x + 4 + \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x + 1}$

Exercice 9

Déterminer le sens de variation de f puis préciser s'il existe un réel en lequel f admet un extrémum.

1. $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$; 2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$; 3. $f(x) = 3x + \sqrt{x}$; 4. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; 5. $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 2}{x+3}$; 6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$; 7. $f(x) = 3x + 4 + \frac{1}{x+1}$

*Exercice 10

Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité de f , calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 2}$
2. $f(x) = \frac{4x^2 - 5}{3x^2 + 2x - 3}$
3. $f(x) = x^6\sqrt{x}$
4. $f(x) = \sin x + \cos 4x$
5. $f(x) = \frac{2x+1}{(3x+1)^3}$
6. $f(x) = (3x^2 - x + 1)(-x^2 + x + 1)$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$
8. $f(x) = |x^3 - 7x + 6|$

*Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points de C_f ou la tangente (T) à C_f répond à la condition indiquée.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$, le coefficient directeur de (T) est 0 .
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ (T) passe par le point $B(2, -4)$.
3. $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2 + 1}$ (T) parallèle à la droite (D) : $y = x - 1$

*Exercice 12

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 3x^2 - 2x - b & \text{si } x < 2 \\ g(x) = \frac{2ax+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \\ g(2) = b \end{cases}$$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier alors la dérivabilité de g en 2 .

Exercice 13

Soit f la fonction f la fonction définie sur

$\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{|1-x|}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1 .
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de dérivabilité.

Exercice 14

Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

- a. $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ $I = [0 ; 2]$
- b. $f(x) = \frac{-x+1}{x+3}$ $I = [-7 ; -4]$
- c. $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ $I = [3 ; 10]$.

ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS

Exercice 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous :

1. f est paire si ...
2. f est impaire si ...
3. Le point I de couple de coordonnées $(a ; b)$ est centre de symétrie de la courbe de f si ...
4. La droite $(D) : x = a$ est axe de symétrie à C_f si et seulement si ...

*Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f .
2. Montrer que $I(0 ; 1)$ est centre de symétrie de C_f .
3. Construire C_f .

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2 + x - 2}{x+1}$ et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser le domaine de définition de f , D_f puis étudier les limites aux bornes de ce domaine et C_f admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.
- 2 a. Trouver des réels a , b et c tels que pour tout x élément de D_f $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
b. Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f .
c. Etudier la position de C_f par rapport à l'asymptote oblique.
4. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f .
5. Construire C_f .

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) =$

$\sqrt{2x+3}$ et C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f .
2. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f .
3. a. Montrer C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-\frac{3}{2}$
b. Construire C_f .

Exercice 5

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \cos(2x)$$

1. Etudier la parité de f .
2. Etudier la périodicité de f
3. Justifier le choix de $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ comme ensemble d'étude de f .
4. Etudier les variations de f sur I puis dresser son tableau de variation.
5. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

*Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{2x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f , étudier les limites aux bornes des intervalles de D_f .
2. a. Montrer qu'ils existent des réels a , b et c tels que pour tout x de D_f ; $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+1}$.
b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C_f) .
c. Déterminer la position de (C_f) par rapport à (D) .
3. Montrer que (C_f) admet une asymptote parallèle à (Oy) et donner son équation.
4. Etudier le sens de variation de f dans les intervalles où elle est définie.
5. On désigne par A le point de la courbe (C_f) ayant pour abscisse 0, déterminer une équation de la droite (T) , tangente à la courbe (C_f) en A .
6. Construire, les asymptotes de (C_f) , le point A , la droite (T) et la courbe (C_f) .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f ensemble de définition puis les réels a et b tels que pour tout x de D_f :

$$f(x) = a + \frac{bx}{x^2 - 1}$$

2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3. Montrer que le point I de (C_f) d'abscisse 0 est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .
4. Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) en I .
5. Etudier la position de (C_f) par rapport à (T) .
6. Tracer la courbe (C_f) et sa tangente (T) .

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f En déduire les asymptotes éventuelles de (C_f) .
2. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f , et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f .
3. a. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.
b. En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera.
c. Etudier la position relative de (C_f) et de (D) .

4. Tracer (C_f) et ses asymptotes.
5. En déduire dans le même repère que (C_f) la représentation graphique de la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$$

6. a. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 + mx - m = 0$, où m est un réel.

b. Retrouver les résultats graphiquement.

*Exercice 9

On considère la fonction f définie

par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les réels a et b tels que (C_f) passe par le point $A(0, 1)$ et admette en ce point une tangente horizontale.

1. On suppose $a = 1$ et $b = -1$
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f .
3. a. Déterminer les réels α , β et γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$.
a. En déduire que la droite $(D) : y = x + 2$ est asymptote à (C_f) .
b. Préciser l'autre asymptote.
4. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f .
5. Construire (C_f)
7. Résoudre graphiquement l'équation : $x^2 + (1 - m)x + m - 1 = 0$
8. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{|x - 1|}$.
Construire la courbe (C_g) de g à l'aide de (C_f)