

MATHEMATIQUES

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe Z_n défini par :

$$Z_0 = 1 \text{ et } Z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) Z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |Z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique
b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
- 3) Quelle est la nature du triangle OA_nA_{n+1} ?

Exercice 2

Une urne contient quatre jetons portant chacun le nombre 1, deux jetons portant chacun le nombre e et six jetons portant chacun le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus respectivement sur le premier et le deuxième jeton tiré.

A cette expérience on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « M appartient à l'axe des abscisses »

B : « M appartient à l'axe des ordonnées »

C : « M appartient aux deux axes »

D : « M n'appartient à aucun des axes »

E : « l'angle $(\vec{OM}; \vec{i}) = -\frac{\pi}{4}$ »

F : « M appartient au cercle trigonométrique »

2) Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance OM .

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X

PROBLEME

(C) est la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\ln(2x)}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

PARTIE A

- 1)a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- b) Calculer les limites aux bornes de D_f
- c) Interpréter graphiquement le résultat de chaque limite
- 2)a) Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = -\frac{\ln(2x)}{x^2}$; $\forall x > 0$
- b) Déterminer le sens de variation de f
- c) Dresser le tableau de variation de f
- 3) Construire la courbe (C) de f
- 4)a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$
- b) Vérifier que $2 < \alpha < 3$ puis que $\ln(2\alpha) = \alpha - 1$
- 5) On pose $I(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x) dx$
- a) En remarquant que $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln(2x)$, montrer que $I(\alpha) = \ln(2\alpha) + \frac{1}{2} [\ln(2\alpha)]^2$
- b) En déduire que $I(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$

PARTIE B

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) = 1 + \ln(2U_n) \end{cases}$ où g est la fonction définie sur $I = [2; 3]$ par $g(x) = 1 + \ln(2x)$

- 1) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$
- 2) Montrer que $\forall x \in I$; $g(x) \in I$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in I$
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$
- 5) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 6) En déduire que la suite (U_n) converge
- 7) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Données : $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$; $\ln 5 = 1,6$