MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE, ET DE L'INNOVATION (MESRI)
UNIVERSITE IBA DER THIAM DE THIES
Ecole Nationale Supérieure d'Agriculture

CONCOURS D'ENTREE

MATHEMATIQUES

(Session Normale, Mai 2021; Durée : 2 heures)

-----------~~~~~~~~~~~---------

EXERCICE 1 : (/ 4 points)

Neufs étudiants, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux parmi eux pour effectuer leur stage dans une importante entreprise de la place.

Chacun écrit son nom sur un carton et le glisse ensuite dans une boîte. L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les événements suivants :

G_1 « Un garçon est désigné au premier tirage »
G_2 « Un garçon est désigné au deuxième tirage »
F_1 « Une fille est désignée au premier tirage »
F_2 « Une fille est désignée au deuxième tirage »

1-
- **a-** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu lors du 1er tirage.
- **b-** Calculer la probabilité de l'événement $G_1 \cap F_2$; la comparer à celle de $G_2 \cap F_1$.

2- Calculer la probabilité qu'il ait deux filles pour faire leur stage dans cette entreprise.

3- Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au 2ème tirage.

4- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.
- a- Déterminer la loi de probabilité de X.
- b- Calculer son espérance mathématique.
- c- Définir puis représenter la fonction de répartition.

EXERCICE 2 : (/ 6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos x\,(1 - 2\cos x)$.

1) Expliquez pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2)

a) Montrez que $f'(x) = (4\cos x - 1)\sin x$.

b) Soit α est un nombre de $[0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.(**On ne cherche pas à déterminer α)**

Dressez le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

3) Tracez la courbe Cf sur $[-2\pi, 2\pi]$.

4) Calculer $f((x - \frac{\pi}{2})$ et déduisez du tracé de Cf , le tracé de la courbe représentant la fonction g définie par : $g(x) = \sin x\,(1 - 2\sin x)$.

PROBLEME : (/ 10 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :$f(x)=\frac{1}{3}x^3-lnx-\frac{1}{3}$

1. a. Etudier les variations de f.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
c. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2. Construire dans un repère orthogonal (unités :10cm en abscisse, 5cm en ordonnée), la courbe représentative (C_f) de f sur l'intervalle $]0;1]$.

3. Sot λ un réel strictement positif.
a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 lnt\,dt$.
b. En déduire $I(\lambda)=\int_\lambda^1 f(t)dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.
c. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda)$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
a. Soit k un entier tel que $1\leq k\leq n-1$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b. En déduire les inégalités :
$\frac{1}{n}[f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)]\leq\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}[f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)]$, qu'on peut écrire aussi sous la forme : $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{k=n}f(\frac{k}{n})\leq I(\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1}f(\frac{k}{n})$.
c. En utilisant la courbe (C_f) et en prenant $n=10$, interpréter graphiquement cet encadrement.

5. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$S_n=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f(\frac{n}{n})\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f(\frac{k}{n})\ .$$

a. Déduire des inégalités précédents l'encadrement :

$$I\left(\frac{1}{n}\right)\leq S_n\leq I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n}).$$

b. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda f(\lambda)$ et prouver alors que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{4}$

6. Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier ≥ 1 , par : $u_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
a. Montrer, par exemple en utilisant un raisonnement par récurrence, que :

$$\sum_{k=1}^{k=n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

b. Justifier, pour tout entier $n\geq 1$ l'égalité : $\sum_{k=1}^{k=n}ln\left(\frac{k}{n}\right)=ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
c. En déduire que, pour tout entier $n\geq 2$:

$$S_n=\frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2-\frac{1}{n}ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)-\frac{1}{3}$$

d. A partir du résultat précédent, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ puis la limite de la suite (u_n).