

Examens

d'Excellence



**Nouvelle
édition**

Mathématiques
MAROC

*Session Ordinaire 2020
Session De Rattrapage 2020
Fiches Mnémotechniques Du Cours*

60 sujets

2015

2016

2017

2018

2019

2020

2 **OUARZAZATE 2021**
Bac SM

MATHS
2021

*Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2021*



EXAMENS DE CERTIFICATION

« 2ème Année Bac – SM »

Projet de livre 2020-2021

Sommaire planifié :

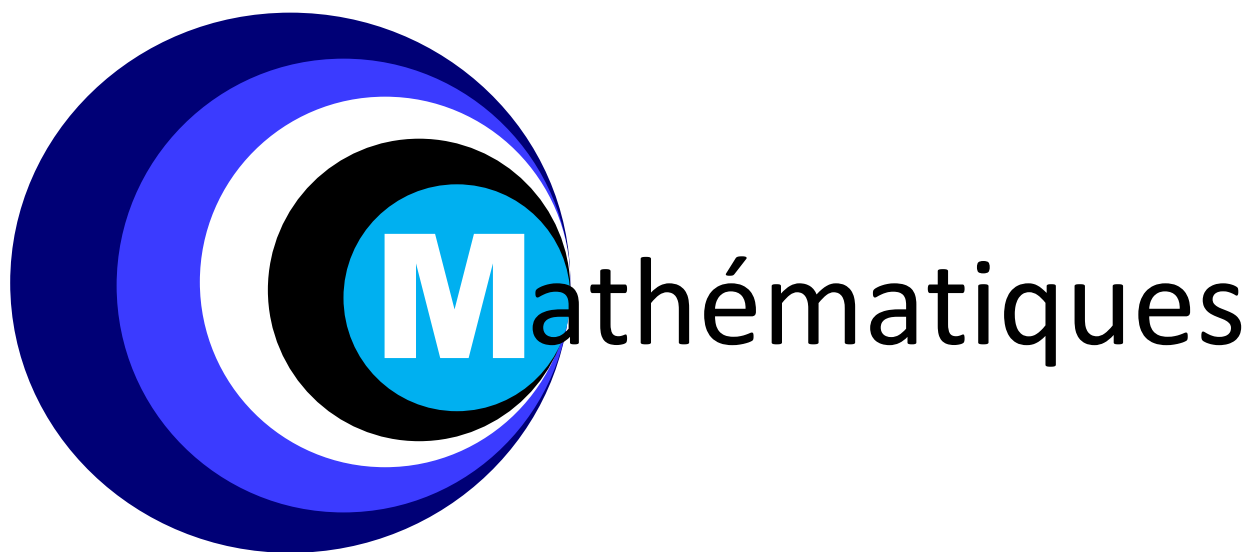
- **60 sujets de l'examen national normalisé**
- **Résumé clair et pratique du cours**
- **Mes Propositions de corrections détaillées**
- **Rédigé en langue française tout entier**
- **Examens Blancs pour le soutien à distance**
- **Méthodes simples, élégantes et rigoureuses**
- **Des recommandations et du coaching efficient**
- **Des Annexes utiles pour un travail flexible**

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2020

Samedi 13 juin 2020

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Badr Eddine EL FATIHI', written over a horizontal line.



Résumé de Cours

Énoncés des examens

Mes Propositions de Correction

Méthodes Claires

Détails des détails

Professeurbadr.blogspot.com



Préface 2018

Louanges à ALLAH seul, et bénédiction et Salut soient sur son prophète MOHAMED.

Ce document vient pour combler une des lacunes que connaît la filière SM en matière de rareté des livres traitant les sujets d'examens de Maths en terminale. Je l'ai conçu, et rédigé, volontairement dans le but d'aider les élèves du Maroc et d'ailleurs à concevoir une image approximative sur les attendus du programme.

Avant de partir passer cet examen national, vous êtes censés connaître toutes les techniques, les astuces, les trucs, les méthodes, les algorithmes, les procédures et les réponses typiques à toutes les questions typiques que vous allez apercevoir tout au long de ce document. Là-bas, le jour de l'examen en salle, vous n'avez rien à faire que de choisir la bonne méthode comme réponse à la question adéquate qui convient. Malheureusement, il y en a encore beaucoup d'élèves qui ne croient absolument en cette stratégie « d'apprendre par cœur » les procédés classiques et les méthodes typiques. La vérité c'est que vous aurez 240 minutes comme masse horaire pour répondre à près de 40 questions, soit 6 minutes en chaque question ☹.

En poursuivant mon soutien aux élèves, me voilà prêt à vous proposer ma méthodologie de préparation pour s'entraîner bien, et pour répondre aisément aux questions de l'examen national. J'ai proposé quelques sujets pour la préparation comme plateforme de travail. Et je crois que c'est tant suffisant. Mais si vous en voulez plus, consultez les éditions précédentes. Par la suite, voici quelques conseils à suivre pendant vos révisions, et pour vous aider à aborder sereinement les épreuves écrites de juin 2019, et ainsi mettre toutes les chances de votre côté pour décrocher votre précieux Bac ☺.

Pour réussir cet examen, il faut aimer travailler les maths au premier abord. Et ce n'est pas du tout banal que quelqu'un débute toujours l'année avec motivation. Faire des fiches qui récapitulent l'essentiel du cours et utiliser des moyens mnémotechniques afin d'en faire un vrai capital mémoire.

Savoir bien gérer son temps en se fixant des délais et en s'accordant des pauses. On ne retient bien que ce qu'on aime. Et généralement, On aime bien les matières où on a eu de bonnes notes ☺. Partant de ce principe, j'estime qu'il faut se motiver d'autant plus pour les matières où l'on se sent moins à l'aise (les arithmétiques comme exemple ☹). Il s'agit d'installer un cercle vertueux dès le début de l'année si l'on se plonge dans une matière avec passion, alors on va mieux retenir, mieux restituer et avoir de bons résultats. Ce qui permet d'associer une image positive à l'examen tout entier ☺.

Un bon étudiant est celui qui connaît sa grille d'évaluation et les cadres référentiels des examens. Savoir ce que l'on attend de vous en Maths (connaissances et compétences), vous aidera à voir quoi mettre en avant, à anticiper les questions. Et c'est d'ailleurs mon premier but derrière ces documents.

Dans un examen, il y a une part de stratégie puisqu'il faut convaincre l'examineur (ou directement le correcteur). Comprendre ce qu'on attend de vous est très primordial, car dans l'examen du baccalauréat vous êtes amenés, sans qu'on le dit institutionnellement, vous êtes censés recracher le cours sous diverses formes : algorithmes, théorèmes, applications, méthodes, procédés etc....

Certains élèves commencent à réviser dès le mois de Mars, alors que d'autres attendent le mois de Mai pour se plonger dans leurs livres en prévision des examens de fin d'année. Mais peu importe la stratégie, il faut savoir que la réussite à ces épreuves ne dépend

que de la qualité du travail de révision. La préparation mentale y joue également un grand rôle. Savoir chasser le stress et gérer son temps est aussi important que d'arriver à assimiler le cours des mathématiques tout entier.

Souvent, les sujets des examens, notamment à l'écrit, sont liés de près ou de loin à l'actualité. En plus de vous donner des indications claires sur les éventuels sujets. Travailler les sujets des années précédentes permet d'enrichir vos connaissances, de confirmer que vous êtes curieux et que vous avez déjà une expérience cumulée.

Un examen, c'est comme une épreuve sportive ! si l'on arrive sans énergie, alors on est sûr de rater son départ ou de ne pas arriver jusqu'au bout. Le moral c'est qu'il est important de bien manger de bonnes Msimnates de la chère maman et de bien dormir, notamment dans les derniers jours précédents les épreuves ☺. L'alimentation permet de fournir de l'énergie, le sommeil aussi, en plus de permettre au cerveau de récupérer et d'enregistrer toutes les informations acquises dans la journée. Je vous conseil aussi de s'aérer l'esprit en faisant du sport.

Enfin, il importe d'aborder l'épreuve de façon positive, de se présenter à l'examen prêt à faire de son mieux tout en étant conscient que la partie ne sera pas facile ☹. Il faut savoir que visualiser la réussite peut influencer et programmer le succès dans l'inconscient, autant mettre toutes les chances de son côté ☺. Je souhaite que ce document aide à achever tous vos buts. Louanges à ALLAH seul et bénédiction et salut soient sur son prophète MOHAMED.

Bon courage ☺.



Préface 2020

Ci-après quelques notes, indispensables à lire et à reconnaître, sur la nature de la filière SM. Je les ai proposées pour que vous puissiez se rendre compte de ce qui se passe réellement autour de vous :

Le stress est un mécanisme normal, déclenché par le cerveau pour déclarer un état d'urgence du corps tout entier. C'est-à-dire que vous ne devriez surtout pas être mal à l'aise quand cela se produirait ou quand on aperçoit ce sentiment dans un examen. Le stress vous permettrait de mobiliser toute l'énergie et de la focaliser sur la feuille où les questions auraient été énoncées. C'est un facteur catalyseur comme un chien rageur qui traque un coureur fainéant.

Lisez attentivement chaque question. Souvent, l'idée de la réponse vient immédiatement à travers le travail pénible que vous auriez fait en classe, sur les livres ou encore au cours des heures de soutien scolaire. Je fais d'abord mes esquisses de calcul sur le brouillon ensuite je passe immédiatement pour noter ma réponse sur la copie soigneusement en utilisant éventuellement des phrases courtes pour guider le correcteur.

Parfois il arrive qu'on se plante deux ou trois fois devant une question qu'on a bien compris, mais qu'on n'arrive pas à dénicher la stratégie de réponse qui va avec. Essayez de relier cette question avec celles d'avant. Il faudrait s'interroger à tout moment sur la relation qui pourrait exister entre cette question et l'exercice tout entier.

Dans le cas où l'échec persiste, dépassez cette défaillance en y retournant de temps à autre. Signalons qu'on pourra utiliser le résultat de la question qui a foirée dans d'autres questions qui viendraient au fur et à mesure de l'exercice.

N'ayez pas peur à propos de quelques questions auxquelles vous n'avez pas pu répondre rigoureusement, il se peut que la notation adoptée sur quelques-unes soit de 0,25 ou 0,50. Ça ne mérite pas de gaspiller du temps précieux là-dessus. Ce type de questions ambiguës et rhétoriques sont rares dans un examen dans la session ordinaire. Les questions que vous verriez sont littéralement typiques et classiques et admettent une ou deux méthodes de résolution au plus.

Parfois on se rend compte que la réponse retrouvée est insuffisante et ça manque de rigueur et de pertinence. Ne jamais abandonner une tentative de résolution, qui n'a pas abouti, aussi male soit elle. Il se peut que le correcteur prenne ton travail en considération.

Pour le management du temps, je vous propose cet emploi du temps pour bien gérer les quatre heures et pour éviter le gaspillage autour des questions ambiguës de type 0,25.

- Structures Algébriques : 40 minutes
- Nombres complexes : 50 minutes
- Analyse réelle : 2 heures
- Arithmétiques (proba) : 30 minutes

Il y aurait toujours des gens fainéants et losers, leur job est de pousser et provoquer les autres à devenir comme eux. Quand ils perdent, ils se mettent à râler et à se plaindre contre tout le monde. Ils se réjouissent en faisant toujours la victime. Pour lui, le pauvre, il est toujours innocent et opprimé. C'est les autres autour de lui qui sont coupables et qui ont eu tort. C'est ce que j'appelle le syndrome de l'échec de la victime innocente. Méfiez-vous !

Sachez que le but derrière le régime de l'école publique était, et resterait toujours, l'acquisition d'une formation solide pour vous faciliter une intégration flexible et rapide dans le tissu économique. Bref, acquérir un job. Autrement-dit on vous dit que l'enseignement public ou privé est la clé à l'intégration

économique quelle que soit l'amour que l'on fournit à ce qu'on fait. Mais dire que l'école publique contribuerait à la promotion de l'éthique, des mœurs et de la moralité publique ; alors là i don't think so ! Ce que j'aperçois est carrément le contraire, parce que la majorité des tumeurs d'attitude et de comportement affectent ceux qui auraient reçu une formation au sein d'une école publique. Ça devient clair et remarquable dans les populations du tiers monde. N'espérez jamais une amélioration dans l'éthique et sur les mœurs des individus en franchissant une école publique, aussi prestigieuse soit elle, dans les pays en voie de développement.

Quand on performante un exploit ou lorsqu'on aurait un succès, on ne s'attend jamais à ce que les autres soient fiers. Ça marche aussi quand on est dans une compétition face à d'autres concurrents de la même classe et de la même filière. Et c'est tout à fait normal puisqu'on est des humains et la jalousie est un sentiment inné. Donc ce ne serait pas la peine d'attendre des applaudissements de la part de quelqu'un. Comme celles qu'on manifeste à l'égard de *NADAL* ou *FEDERER*.

Je peux même aller très loin en disant que tu pourrais en avoir de l'ironie et de l'harcèlement verbal comme simple feed-back. Prends soin de tes projets personnels et ne surtout pas espérer de la reconnaissance. Un exemple vivant m'a vraiment marqué quant tout le monde se moquait d'un jeune garçon prodigieux et talentueux, originaire de *TIZNIT* et qui s'appelle *Ider MOTIÏ* ; en disant qu'il se plante en parlant le dialecte marocain ! C'est ridicule parce que tout le monde omettait ses compétences en programmation et son talent linguistique en parlant couramment l'anglais, et on lui avait reproché d'avoir parlé mal une langue qui n'était jamais la sienne. C'est ridicule et insensé, d'ailleurs cette langue, même soutenue, dans le monde technique, est une arnaque technologique. La seule interprétation de l'harcèlement provoqué par ces groupes de losers est une jalousie et méchanceté.

*I*der, tu n'aurais pas dû parler une longue, qui n'était jamais la tienne, et faire de l'effort pour satisfaire le besoin d'un roturier. T'aurais dû s'exprimer en langue *AMAZIGH*, et pour la compréhension je recommande des casques de traduction. ☺

J'estime profondément que vous devriez, peut être, se motiver d'autant plus pour le travail individuel, personnel et autodidacte chez-vous à la maison. Et ce n'est pas de m'arrêter de dire que l'activité mathématique serait d'effectuer des tâches de calcul comme on l'entend souvent dans les controverses et les préjugées à l'égard des matheux, en disant ainsi que nous ne serions que des calculettes programmables. Non ! il suffit de penser à l'athlète qui, comme vous le saviez, effectue dans son entraînement des mouvements mécaniques, robotiques, parfois ennuyeux et parfois honteux et ridicules. Il les fait, non pas pour idéaliser ces mouvements et d'en faire l'objectif, ou parce qu'il en aurait besoin pour son concert d'acrobatie, non ! Mais parce que ces mouvements vont l'aider à avoir un physique flexible et compatible avec d'autres contextes et valables à d'autres environnements là où on en aura besoin.

Ainsi, le mathématicien, si l'on peut établir une modélisation, serait un athlète qui s'entraîne avec des exercices et des problèmes pour faire bouger les muscles de la raison, de la logique, de la contradiction, de l'absurde, de l'implication, de l'induction, de la déduction, de la manipulation de lois et de faire communiquer et partager son raisonnement rigoureusement avec autrui.

Les élèves des années précédentes ont cordialement contribué à la détection de quelques fautes, que j'ai reconnu être graves quant-même. Ces étudiants, que je remercie infiniment, ont travaillé beaucoup dans mes livres. Et ce fut vraiment un grand plaisir pour moi d'avoir enseigné implicitement beaucoup d'étudiants partout dans le *Maroc* et l'*Algérie*, que je n'aurais même pas l'occasion de les voir tous ensemble assis dans une même salle.

Ils aient détecté ces quelques fautes que j'ai commises inconsciemment et aient pu me contacter pour m'informer volontairement.

La partie majeure des étudiants qui ont pu me contacter via *WhatsApp* m'ont communiqué leurs appréciations et leurs points de vue à propos de cette expérience de soutien à travers des examens corrigés des années précédentes que j'ai proposés. Et la majorité d'entre eux auraient pu exprimer leur satisfaction et leur joie en décrivant ma méthode de résolution qui était claire et bien détaillée, parfois simple mais élégante et profonde. Ce serait toujours un plaisir pour moi de lire vos commentaires qui me donneraient encore et toujours le courage et de l'adrénaline pour continuer à mener à bien cette honorable cause.

Parmi les remarques que j'avais reçues le plus souvent sur WhatsApp je cite la nature du contenu des questions qui étaient, comme prévu pour 2019, classiques et typiques. Et pourtant je considère cette composition (2019N) comme l'une des meilleures que j'ai vu jusqu'à maintenant. Je crois que c'est génial d'avoir des questions classiques puisque ce serait en votre faveur. D'ailleurs, ce qui est important ce n'est pas les mathématiques comme matière, mais plutôt d'avoir sélectionné, via les maths, des étudiants qui travaillent et pensent logiquement pour les préparer pour les métiers du monde réel : ingénierie, médecine, architecture, économie, finances, réseaux, systèmes informatiques industrie, bâtiments et travaux publics. Je ne sais pas pour vous, mais vous vous rendez compte qu'il n'existeraient jamais des ingénieurs assis dans leurs bureaux et entrain de résoudre des équations ☹. Même, si vous obtiendriez des doctorats en électronique, rassurez-vous vous ne seriez jamais capable de fabriquer une montre. Et si vous arriviez à en manufacturer une, vous devriez sûrement la vendre au kilo puisqu'il existent déjà des compagnies multinationales qui manufacturent des montres depuis bien longtemps, 100 et 150 ans déjà ☹. Bon courage.



Préface 2021

Quand on examine le profil d'un bon étudiant de spécialité SM, on se rend compte que l'image répandue dans l'imaginaire reconnu collectif est trop exigeante ; ils essaient de nous faire croire que la filière SM exige des capacités très particulières et incarne les compétences les plus distinguées, alors que c'est juste un programme chargé par des techniques à maîtriser , des algorithmes à mettre en marche et des procédures à compiler. Je ne vois pas où exactement l'intelligence pourrait manifester dans un programme à la tâche comme l'indique clairement la forme des examens de certification ou même des concours d'admission. La notification finale des élèves jouera par la suite le rôle de la ligne déterminante pour juger au finale est ce que cet élève est apte ou pas à intégrer une école prestigieuse.

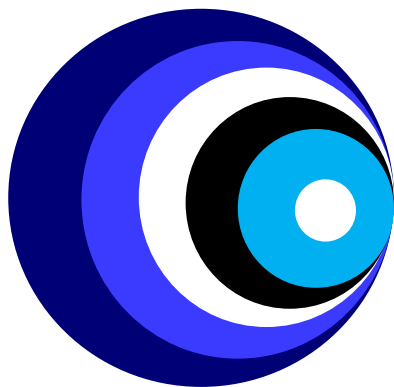
Ce qu'il faudrait retenir ici c'est que l'apprentissage par cœur des procédures classiques de résolution serait utile pour accomplir l'objectif attendu qui est une bonne note que ce soit à l'examen national ou aux concours. D'abord l'étudiant SM est le seul qui est capable d'obtenir une bonne note sans avoir assisté à aucune séance en classe, parce que une part importante des apprentissages sont acquises hors classe.

Les élèves inscrits au programme de la filière SM ont un objectif commun c'est la réussite avec une bonne note qui leurs permettra d'intégrer les classes préparatoires, et par la suite suivre la phase finale des études au sein d'une école d'ingénierie ou de médecine de grande renommée au Maroc ou ailleurs. la filière SM est l'occasion de filtrer ses bons élèves qui travaillent avec intelligence et avec économie d'énergie. Ils savent très bien que les apprentissages qui ont été acquises tout au long de leurs parcours se manifestent

Dans les notes et dans les diplômes. Ils savent très bien que les carrières dépendront de ces diplômes. Parfois on leurs demande d'accomplir des tâches dans des professions totalement différentes de ce qu'on leurs a appris en classe. Ils savent très bien qu'il est indispensable de maîtriser une méthode ou d'appliquer bêtement un théorème puisque prochainement l'ordinateur le fera à leurs places, et ce ne serait absolument pas utile de courir derrière des démonstrations difficiles et des exercices d'Olympiades sauf pour la passion et pour le plaisir.

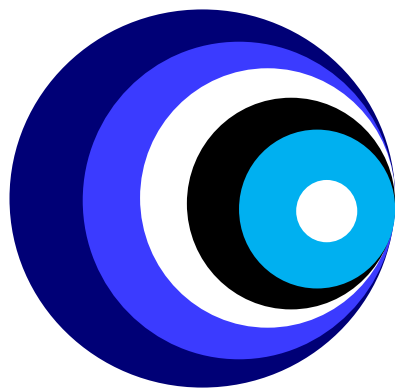
Les mathématiques appliqués représentent une part médiocre de ce qu'on a vu au lycée , en supérieur et en spécial. Parce que tout simplement la majeure partie des carrières se basent sur l'ordinateur comme outil de production. Et l'intelligence artificiel assassine de plus en plus de professions. Quand on qualifie un examen de typique cela ne signifie pas que la filière vit une phase de décadence. Au contraire c'est génial puisque c'est juste un outil pour sélectionner des élèves capables de pratiquer des professions techniques et sophistiquées. On n'a guerre besoin d'une promotion toute capable de créer de nouvelles méthodes de calcul de limites ou d'intégrales. Juste les plus rares passionnés le feront. En contre partie, On aurait besoin d'une promotion d'ingénieurs qui développeraient des moteurs électromotrices et des constructions industrielles , militaires et civiles.

Les élèves du Maroc, après avoir achevé leurs parcours de formation, deviennent des cadres de haut niveau et la majorité d'entre eux développent de grandes compétences au niveau professionnel partout dans le monde. Mais pourquoi le Maroc ne développe pas une industrie automobile indépendante ? Est – ce à cause d'un manque de compétence ? la réponse est défavorable 😞. La compétence est là , Mais la politique n'est plus au rendez-vous. 😞



SOMMAIRE

Préfaces 2018 et 2020.....	003
Sommaire.....	014
Fiches Mnémotechniques (Résumé de cours).....	015
Enoncés des Examens.....	039
Mes propositions de correction de 2015N.....	232
Mes propositions de correction de 2015R	239
Mes propositions de correction de 2016N	248
Mes propositions de correction de 2016R	255
Mes propositions de correction de 2017N	259
Mes propositions de correction de 2017R.....	303
Mes propositions de correction de 2018N.....	287
Mes propositions de correction de 2018R.....	295
Mes propositions de correction de 2019N.....	310
Mes propositions de correction de 2019R.....	321
Mes propositions de correction de 2020N.....	331
Mes propositions de correction de 2020R.....	341
Mes propositions de correction de Khmiset.....	267
Mes propositions de correction de Oujda.....	279



Mathématiques **Résumé De Cours**

Structures Algébriques

Analyse Complexe

Arithmétiques dans $\mathbb{Z}$

Calcul de Probabilités

Analyse Réelle

Quelques intégrales indéfinies

Structures Algébriques

1 Loi de composition interne

$$\left| \begin{array}{l} * \text{ est une loi} \\ \text{de composition} \\ \text{interne dans } E \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall (a, b) \in E^2 ; a * b \in E$$

Avec E est un ensemble défini implicitement ou explicitement.

2 La Stabilité

$$\left| \begin{array}{l} S \text{ est une partie} \\ \text{Stable dans } (E, *) \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall (x, y) \in S^2 ; x * y \in S$$

Avec * est une loi de composition interne dans E et $S \subseteq E$

3 La stabilité conserve

La stabilité conserve l'Associativité
La stabilité conserve la Commutativité
La stabilité conserve la Distributivité

4 La Stabilité – Avertissement :

$$\left| \begin{array}{l} * \text{ est LCI dans } E \\ S \subseteq E \end{array} \right| \not\Leftrightarrow S \text{ est stable dans } (E, *)$$

5 L'associativité :

$$\left| \begin{array}{l} * \text{ est une loi} \\ \text{associative} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall (x, y, z) \in E^3 \\ (x * y) * z = x * (y * z) \end{array} \right|$$

Avec * est une loi de composition interne dans E .

6 La commutativité :

$$\left| \begin{array}{l} * \text{ est une loi} \\ \text{commutative} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2 \\ x * y = y * x \end{array} \right|$$

7 L'élément neutre :

$$\left| \begin{array}{l} e \text{ est l'élément} \\ \text{neutre dans } (E, *) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\exists ! e \in E), (\forall x \in E) \\ e * x = x * e = x \end{array} \right|$$

8 L'élément neutre - Avertissement

$$\left| \begin{array}{l} S \text{ est stable dans } (E, *) \\ e \text{ est l'élément neutre} \\ \text{dans } (E, *) \end{array} \right| \not\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} e \text{ est l'élément} \\ \text{neutre dans } (S, *) \end{array} \right|$$

9 La Symétrie :

$$\left| \begin{array}{l} a' = \text{sym}(a) \\ \text{dans } (E, *) \end{array} \right| \Leftrightarrow a * a' = a' * a = e$$

Avec * est une LCI dans E.

e est l'élément neutre dans $(E, *)$.

L'élément a' est unique dans E.

10 Le symétrique d'un composé :

$$\left| \begin{array}{l} \text{oubien : } \text{sym}(a * b) = \text{sym}(b) * \text{sym}(a) \\ \text{oubien : } (a * b)' = b' * a' \end{array} \right|$$

Avec * est une loi de composition interne associative dans E.

e est l'élément neutre dans $(E, *)$.

a et b sont deux éléments de E.

11 L'élément régulier d'une LCI :

$$\left| \begin{array}{l} a \text{ est un élément} \\ \text{régulier dans } (E, *) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{array} \right|$$

Quelques soient x et y dans E.

Pour toute LCI * dans E.

12 L'Homomorphisme :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ \text{de } (E, *) \text{ vers } (F, \top) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2 : \\ f(x * y) = f(x) \top f(y) \end{array} \right|$$

13 L'Isomorphisme :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est un isomorphisme} \\ \text{de } (E, *) \text{ vers } (F, \top) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f \text{ homomorphisme} \\ f \text{ est une bijection} \end{array} \right|$$

14 L'Homomorphisme conserve la stabilité :

$$f : (E, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ f(E) \text{ est une partie} \\ \text{stable dans } (F, \top) \end{array} \Rightarrow$$

15 L'Homomorphisme conserve l'associativité :

$$f : (E, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est associative dans } (E, *) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \top \text{ est associative} \\ \text{dans } (f(E), \top) \end{array}$$

16 L'Homomorphisme conserve la commutativité :

$$f : (E, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est commutative dans } (E, *) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \top \text{ commutative} \\ \text{dans } (f(E), \top) \end{array}$$

17 L'Homomorphisme et l'élément neutre :

$$f : (E, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ e \text{ est l'EN dans } (E, *) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(e) \text{ est l'EN} \\ \text{dans } (f(E), \top) \end{array}$$

Avec : L'EN = l'élément neutre.

18 L'Homomorphisme et la symétrie :

$$f : (E, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ x' = \text{sym}(x) \text{ dans } (E, *) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x') = \text{sym}(f(x)) \\ \text{dans } (f(E), \top) \end{array}$$

19 La structure de groupe :

$$(G, *) \text{ est un groupe} \Leftrightarrow \begin{array}{l} * \text{ est associative dans } G \\ * \text{ admet un EN } e \text{ dans } G \\ (\forall a \in (G, *)) (\exists ! \text{sym}(a) = a' \in (G, *)) \end{array}$$

$$(G, *) \text{ est un groupe abélien} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (G, *) \text{ est un groupe} \\ * \text{ est commutative dans } G \end{array}$$

Groupe abélien = Groupe commutatif

$$(G, *) \text{ est un groupe} \mid \begin{array}{l} a \in E \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a \text{ est un élément} \\ \text{régulier dans } (E, *) \end{array}$$

20 Le sous-groupe d'un groupe :

$$(H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) \Leftrightarrow \begin{array}{l} H \subseteq G ; H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2 ; x * \text{sym}(y) \in H \end{array}$$

21 L'Homomorphisme conserve la structure de groupe :

$$f : (G, *) \mapsto (F, \top) \mid \begin{array}{l} f \text{ est un homomorphisme} \\ (G, *) \text{ est un groupe} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f(G; *) = (f(G); \top) \\ \text{est un groupe} \end{array}$$

* associative dans G $\Rightarrow$ $\top$ associative dans f(G)

e = EN(G, *) $\Rightarrow$ f(e) = EN(f(G), $\top$)

x' = sym(x) dans G $\Rightarrow$ f(x') = sym(f(x)) dans f(G)

22 La structure d'Anneau :

$$(A, *, \top) \text{ est un Anneau} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (A, *) \text{ est un groupe abélien} \\ \top \text{ est associative dans } A \\ \top \text{ est distributive prp à } * \text{ dans } A \end{array}$$

prp = par rapport

$$(A, *, \top) \text{ est un Anneau commutatif} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (A, *, \top) \text{ est un anneau} \\ \top \text{ est commutative dans } A \end{array}$$

23 Diviseurs de Zéro dans un anneau

$$a \text{ est un diviseur de Zéro dans } (A, *, \top) \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\exists b \in A), (b \neq e) \\ a \top b = b \top a = e \end{array}$$

Avec (A, *, $\top$) est un anneau.

e est l'élément neutre de la loi *.

et a $\neq$ e.

24 Anneau intègre :

$$(A, *, \top) \text{ est un Anneau intègre} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall (a, b) \in A^2 : \\ a \top b = e \Rightarrow \begin{array}{l} \text{soit } a = e \\ \text{soit } b = e \end{array} \end{array}$$

25 La structure de corps :

$$(K, *, \top) \text{ est un corps} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (K, *, \top) \text{ est un anneau unitaire} \\ (\forall x \in K^*) (\exists ! x' = \text{sym}_1(x)) \end{array}$$

Le mot unitaire veut dire que $\top$ admet un élément neutre (appelé souvent l'unité) dans K.

Avec e est l'élément neutre de * dans K. et $K^* = K \setminus \{e\}$

26 Caractérisation des corps :

$$(K, *, \top) \text{ est un corps} \Leftrightarrow \begin{cases} (K, *) \text{ est un groupe abélien} \\ (K^*, \top) \text{ est un groupe} \\ \top \text{ est distributive prp à } * \text{ dans } K \end{cases}$$

Abélien signifie commutatif.

e est l'élément neutre de $*$ dans K .

$K^* = K \setminus \{e\}$.

27 Espace vectoriel réel :

$$(E, *, \cdot) \text{ est un espace vectoriel} \Leftrightarrow \begin{cases} (E, *) \text{ est un groupe abélien} \\ (\alpha * \beta) \cdot x = \alpha \cdot x * \beta \cdot x \\ (\alpha \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ \alpha \cdot (x * y) = \alpha \cdot x * \alpha \cdot y \\ 1 \cdot x = x \end{cases}$$

Avec α et β sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

et x et y sont deux éléments de E .

28 Famille génératrice :

$$\text{La famille } (x, y) \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall a \in E), (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ a = \alpha \cdot x + \beta \cdot y \end{cases}$$

29 Dépendance & indépendance :

$$\text{La famille } (x, y) \text{ est liée} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2*} : \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$\text{La famille } (x, y) \text{ est libre} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Et } \alpha = 0 \\ \text{Et } \beta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

30 Caractérisation des SEV :

$$F \text{ est un sev de } (E, +, \cdot) \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall \alpha \in \mathbb{R}), (\forall x, y \in F) : \\ (\alpha x + y) \in F \end{cases}$$

sev = sous-espace vectoriel.

avec $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

et $F \subseteq E$.

31 Base d'un espace vectoriel :

$$\text{La famille } (x, y) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall m \in E), (\exists! \alpha, \beta \in \mathbb{R}) : \\ m = \alpha x + \beta y \end{cases}$$

Avec E est un espace vectoriel.

32 La dimension d'un esp vectoriel :

Le nombre d'éléments d'une base d'un esp vect E s'appelle la dimension de E . notée $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

33 Espace vectoriel de dim fini $E = \mathbb{R}^2$:

$$\text{La famille } (\vec{x}, \vec{y}) \text{ est libre} \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) \text{ est une base de } E$$

$$\text{La famille } (\vec{x}, \vec{y}) \text{ est libre} \Leftrightarrow \det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$$

$$\text{La famille } (\vec{x}, \vec{y}) \text{ est libre} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} \\ \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} \end{vmatrix} \neq 0$$

34 Calcul du Déterminant d'une Matrice:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab - cd$$

$$\det(N) = \begin{vmatrix} a & i & g \\ e & b & j \\ k & f & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & j \\ f & c \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} i & g \\ f & c \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} i & g \\ b & j \end{vmatrix}$$

$$= (abc + efg + ijk) - (gbk + ajf + iec)$$

$$= -i \begin{vmatrix} e & j \\ k & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & g \\ k & c \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & g \\ e & j \end{vmatrix}$$

$$= g \begin{vmatrix} e & d \\ k & f \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & i \\ k & f \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & i \\ e & b \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} b & j \\ f & c \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} e & j \\ k & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} e & d \\ k & f \end{vmatrix}$$

$$= -e \begin{vmatrix} i & g \\ f & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & g \\ k & c \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & i \\ k & f \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} i & g \\ b & j \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & g \\ e & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & i \\ e & b \end{vmatrix}$$

$$\text{Règle des signes : } \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Nombres Complexes

35 Parties réelle et imaginaire :

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$$

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$$

$$\Re(z + \lambda z') = \Re(z) + \lambda \Re(z')$$

$$\Im(z + \lambda z') = \Im(z) + \lambda \Im(z')$$

Avec λ est un réel.

36 affixe d'un vecteur dans le plan :

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$$

$$\text{aff}(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \lambda \text{aff}(\vec{v})$$

Ça s'écrit aussi sous : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Et encore : $z_{\vec{u} + \lambda \vec{v}} = z_{\vec{u}} + \lambda z_{\vec{v}}$.

Avec λ est un nombre réel.

37 Colinéarité de trois points :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \in \mathbb{R}$$

38 Affixe d'un Barycentre :

$$G = \text{Bary}\{(A_i; \alpha_i)\} \Leftrightarrow \text{aff}(G) = \frac{\sum_i \alpha_i \text{aff}(A_i)}{\sum_i \alpha_i}$$

39 Conjugué d'un nombre complexe :

$$z = \Re(z) + i \Im(z) \Leftrightarrow \bar{z} = \Re(z) - i \Im(z)$$

40 Relations de conjugaison :

$$z \times \bar{z} = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 \in \mathbb{R}^+$$

$$z + \bar{z} = 2 \Re(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \Im(z)$$

41 Distribuer la conjugaison :

$$\overline{z + \lambda z'} = \bar{z} + \lambda \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} ; z' \neq 0$$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$$

Avec P est un polynôme à coefficients réels.

42 Module d'un nombre complexe :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

$$|\Im(z)| \leq |z| \text{ et } |\Re(z)| \leq |z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} ; z' \neq 0$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

43 Argument d'un nombre complexe :

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(z) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z) [2\pi] ; n \in \mathbb{N}$$

$$\overrightarrow{(\overline{AB}, \overline{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi] ; \begin{vmatrix} A \neq B \\ C \neq D \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{(\overline{u}, \overline{v})} \equiv \arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) [2\pi] ; \begin{vmatrix} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{vmatrix}$$

44 Forme trigonométrique - exponentielle :

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z| \cdot e^{i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Avec : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}^*$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

45 Colinéarité de deux vecteurs :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \right) \in \mathbb{R}$$

Avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

46 Parallélisme :

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \in \mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

47 Perpendicularité :

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \in i\mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

48 Points cocycliques :

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \times \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } A, B, C, D \text{ colinéaires} \\ \text{soit } A, B, C, D \text{ cocycliques} \end{cases}$$

Avec A,B,C et D sont différents 2à2.

49 Formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

50 Racines nièmes d'un nombre complexe :

$$z^n = a = |a| e^{i\theta} \Leftrightarrow z \in \left\{ \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} ; \begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{matrix} \right\}$$

On dit que z est une racine nième du nombre complexe a.

51 Zéros d'un polynôme :

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les zéros du polynôme } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Avec a,b,c sont des nombres complexes.

52 Translation :

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{v}}$$

53 Homothétie :

$$H_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_{\Omega}) = k(z_M - z_{\Omega})$$

54 Rotation :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_{\Omega}) = e^{i\theta}(z_M - z_{\Omega})$$

55 La transformation $\varphi(z) = az + b$:

$$a = 1 \Rightarrow \varphi \equiv T_{\vec{u}(b)}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \Rightarrow \varphi \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); a\right)}$$

$$a = e^{i\theta} \Rightarrow \varphi \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); \theta\right)}$$

$$a = re^{i\theta} \Rightarrow \varphi \equiv R \circ H = H \circ R ; \begin{cases} R \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); \theta\right)} \\ H \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); r\right)} \end{cases}$$

Arithmétiques Dans $\mathbb{Z}$

56 PGCD & PPCM

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} d \text{ divise } a \\ d \text{ divise } b \end{cases} \Rightarrow d' \leq d$$

$$m = a \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divise } m \\ b \text{ divise } m \end{cases} \Rightarrow m' \geq m$$

$$(ac) \wedge (bc) = |c| \cdot (a \wedge b)$$

$$(ac) \vee (bc) = |c| \cdot (a \vee b)$$

$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab|$$

$$(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$$

Avec a, b et c sont des éléments de $\mathbb{Z}$.
et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

57 Réduction de $a \wedge b = d$:

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 ; \\ \text{avec } a = \alpha d \text{ et } b = \beta d \end{cases}$$

Avec a et b sont deux éléments de $\mathbb{Z}^*$.

58 Algorithme d'Euclide :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a \wedge b = b \wedge c$$

Avec a, b, c et d sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Et $b \neq 0$.

59 PGCD & PPCM

$$d = a \wedge b \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = au + bv$$

Avec a et b appartiennent à $\mathbb{Z}$.

60 Théorème de Bezout :

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; au + bv = 1$$

Avec a et b appartiennent à $\mathbb{Z}^*$.

61 Théorème de Gauss :

$$\begin{matrix} a \text{ divise } bc \\ a \wedge c = 1 \end{matrix} \Rightarrow a \text{ divise } b$$

Avec a, b et c sont des éléments de $\mathbb{Z}^*$.

62 Le produit diviseur :

$$\begin{matrix} a \text{ divise } c \\ b \text{ divise } c \\ a \wedge b = 1 \end{matrix} \Rightarrow ab \text{ divise } c$$

63 Nombres premiers entre eux :

$$\begin{matrix} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$. Et m et n sont dans $\mathbb{N}^*$.

64 L'équation $ax + by = c$:

$$\begin{matrix} ax + by = c \\ \text{est} \\ \text{solvable dans } \mathbb{Z}^2 \end{matrix} \Leftrightarrow (a \wedge b) \text{ divise } c$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$.

65 Division Euclidienne :

$$\begin{matrix} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}^* \end{matrix} \Rightarrow \exists (r, q) \in \mathbb{Z}^2 ; \begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

66 La relation modulo ($\equiv$) :

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow n \text{ divise } (a - b)$$

Avec a, b deux entiers relatifs.

67 modulo est une relation d'équivalence :

$$\begin{cases} a \equiv a [n] & ; \quad \forall a \in \mathbb{Z} \\ a \equiv b [n] & \Leftrightarrow b \equiv a [n] \\ a \equiv b [n] \mid b \equiv c [n] & \Rightarrow a \equiv c [n] \end{cases}$$

Avec a, b deux relatifs et n un entier naturel non nul.

68 Division Euclidienne vs modulo :

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ et } b \text{ ont le même} \\ \text{reste quand on divise} \\ a \text{ et } b \text{ sur le nbr } n \end{cases}$$

Avec a, b et n sont des entiers naturels non- nuls.

69 La relation modulo est compatible avec l'addition et la multiplication

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} & \Rightarrow ac \equiv bd [n] \\ a \equiv b [n] & \Rightarrow a^k \equiv b^k [n] \\ \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} & \Rightarrow (a + c) \equiv (b + d) [n] \\ a \equiv b [n] & \Rightarrow ka \equiv kb [n] \end{aligned}$$

Avec a, b, d et d sont dans $\mathbb{Z}$.

Et $n \in \mathbb{N}^*$; $k \in \mathbb{N}$.

70 Réduire une égalité modulo n :

$$ac \equiv bc [n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[\frac{n}{c \wedge n} \right]$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$. Et $n \in \mathbb{N}^*$.

71 Réduire une égalité modulo :

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &= \{ \overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \dots; \overline{(n-1)} \} \\ \blacksquare \bar{r} &= \{ x \in \mathbb{Z} ; x \equiv r [n] \} \end{aligned}$$

Avec : $n \in \mathbb{N}^*$; $r \in \mathbb{N}$; $0 \leq r \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \blacksquare \bar{x} + \bar{y} &= \overline{x+y} \\ \blacksquare \bar{x} \times \bar{y} &= \overline{x \times y} \\ \blacksquare \bar{n} &= \overline{0} \\ \blacksquare -\bar{x} &= \overline{0-x} = \overline{n-x} \end{aligned}$$

Avec : $x, y \in \mathbb{Z}$.

72 La relation modulo dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

Avec : $n, a, b \in \mathbb{N}^*$.

73 Certificat de primalité :

$$\begin{array}{|l} n \text{ est un} \\ \text{nombre} \\ \text{premier} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|l} \text{Tous les nombres} \\ \text{premiers dont le carré} \\ \text{est inférieur à } n \\ \text{ne divisent pas } n \end{array}$$

Avec : $n \in \mathbb{N}^*$.

74 Nombres premiers entre eux dans $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{|l} (p, q) \in \mathbb{P}^2 \\ p \neq q \end{array} \Rightarrow p \wedge q = 1$$

75 Le premier qui divise un produit :

$$\begin{array}{|l} p \text{ est premier} \\ p \text{ divise } ab \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} \text{soit } p \text{ divise } a \\ \text{soit } p \text{ divise } b \end{array}$$

Avec a et b sont deux entiers relatifs non nuls.

76 Théorème de Fermat (Forme Générale) :

$$\begin{array}{|l} p \text{ est premier} \\ a \in \mathbb{Z} \end{array} \Rightarrow a^p \equiv a [p]$$

77 Théorème de Fermat (Forme Réduite) :

$$\begin{array}{|l} p \text{ est premier} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

78 Décomposition en produit de facteurs premiers :

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \exists! (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{P}^k \\ \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \\ a = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113

79 PGCD & PPCM :

- $(p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}) \wedge (p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_k}) = (p_1^{\gamma_1} \times \dots \times p_k^{\gamma_k})$
- $(p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}) \vee (p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_k}) = (p_1^{\sigma_1} \times \dots \times p_k^{\sigma_k})$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \gamma_i = \inf(\alpha_i; \beta_i) \\ \sigma_i = \sup(\alpha_i; \beta_i) \\ 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

80 Nombres de diviseurs d'un entier :

l'entier naturel $a = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ admet exactement $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)$ diviseurs positifs dont on trouve les nombres 1 et a

81 L'équation $ax \equiv b [n]$ dans $\mathbb{Z}$:

$$ax \equiv b [n] \text{ est } \left| \begin{array}{l} \text{solvable dans } \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow (a \wedge n) \text{ divise } b$$

Avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

et $S = \left\{ x_0 + \left(\frac{n}{a \wedge n} \right) k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

x_0 est une solution particulière de l'équation .

82 Généralisation du Théo de Gauss :

$$\begin{array}{l} a \wedge bc = d \\ a \wedge b = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \end{array} \right. a \wedge c = d$$

Avec : $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{array}{l} a \wedge b = d \\ c \text{ divise } b \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \end{array} \right. a \wedge c = d$$

83 Produit d'entiers consécutifs :

Le produit de k nombres entiers naturels consécutifs est toujours divisible par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... , k .

Avec : $a, b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

84 La division au carré :

$$a^2 \text{ divise } b^2 \Leftrightarrow a \text{ divise } b$$

Avec a et b sont deux entiers relatifs.

85 diviser le diviseur :

$$\begin{array}{l} d \text{ divise } a \\ d \text{ divise } b \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \end{array} \right. d \text{ divise } (a \wedge b)$$

Avec a et b sont deux entiers relatifs.

86 Le produit exponentiel :

$$\begin{array}{l} ab = c^n \\ a \wedge b = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \end{array} \right. \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 ; \left| \begin{array}{l} a = \alpha^n \\ b = \beta^n \end{array} \right.$$

Avec a, b et n sont des entiers naturels. $n \neq 0$

87 La partie entière $E(x)$

$$\blacksquare E(x) = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare E(x) \leq x < E(x) + 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right. ; E(x + n) = E(x) + n$$

$$\blacksquare E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\blacksquare E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

$$\blacksquare 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\blacksquare nE(x) \leq nx < nE(x) + n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\blacksquare E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x) ; \forall x \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} \leq x ; \forall x \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare \sum_{k=1}^{n-1} E\left(\frac{km}{n}\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2} ; \left| \begin{array}{l} \forall m, n \in \mathbb{N}^* \\ m \wedge n = 1 \end{array} \right.$$

$$\blacksquare \sum_{k=1}^{n-1} E\left(\frac{km}{n}\right) = \frac{(m-1)(n-1) + m \wedge n - 1}{2} ; \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

88 Égalité modulo un produit

$$a \equiv b [mn] \Rightarrow \begin{cases} Et a \equiv b [m] \\ Et a \equiv b [n] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Et a \equiv b [m] \\ Et a \equiv b [n] \\ Et m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b [mn]$$

Calcul De Probabilités

89 Hypothèse d'équiprobabilité :

L'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée $\Leftrightarrow \forall (1 \leq i \leq n) ; p(\omega_i) = cte$

Avec $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est l'univers de toutes les éventualités possibles. Les expressions qui montrent que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée sont souvent : dé non truqué, boules similaires, identiques, boules indiscernables au toucher.

90 Probabilité d'un événement :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues vérifiant } A}{\text{nombre total de possibilités}}$$

Avec : A est un événement dans une expérience aléatoire et Ω est l'univers de toutes les éventualités possible. Et l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée.

91 Dénombrer le card(Ω) :

Tirage au hasard spontané de k boules parmi n autres toutes identiques $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = C_n^k$

Tirage au hasard successif sans remise de k boules parmi n autres toutes identiques $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = A_n^k$

Tirage au hasard successif avec remise de k boules parmi n autres toutes identiques $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = n^k$

Le nombre total de combinaisons possibles de n éléments. $\Rightarrow \text{card}(\Omega) = n!$

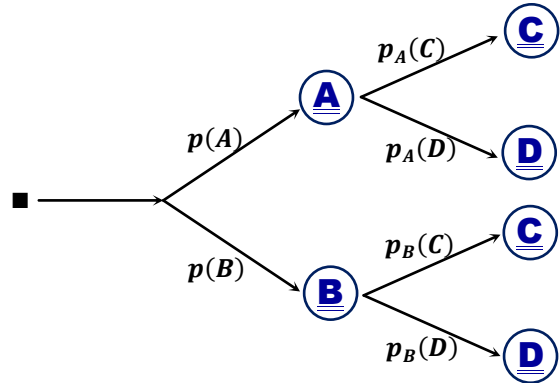
92 Répétition d'un événement :

Quand on répète indépendamment une expérience aléatoire n fois, Alors la probabilité de vérification d'un événement k fois est donnée par la formule :

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Avec : $p = p(A)$ avant de répéter l'expérience n fois.

93 Probabilités composées :



- $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C)$
- $p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D)$
- $p(B \cap C) = p(B) \times p_B(C)$
- $p(B \cap D) = p(B) \times p_B(D)$

- $p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C)$
- $p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$

$$\blacksquare p_C(A) = \frac{p(A)}{p(C)} \times p_A(C)$$

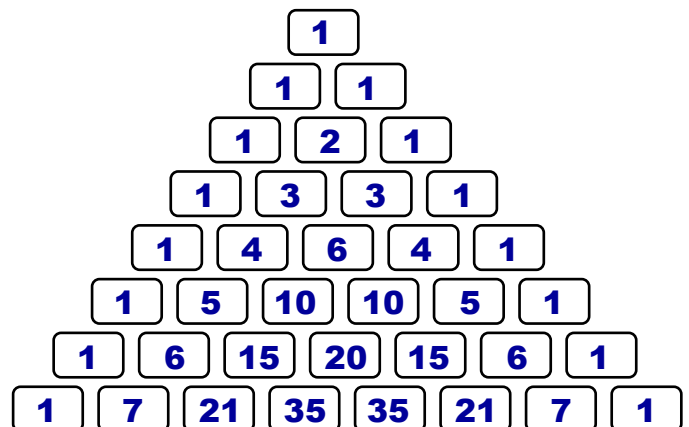
$$\blacksquare p_D(A) = \frac{p(A)}{p(D)} \times p_A(D)$$

$$\blacksquare p_C(B) = \frac{p(B)}{p(C)} \times p_B(C)$$

$$\blacksquare p_D(B) = \frac{p(B)}{p(D)} \times p_B(D)$$

94 Triangle de Pascal - Binôme Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$



95 Variable aléatoire :

Toute application $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
 $\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$

est appelée variable aléatoire

Avec Ω est l'univers de toutes les éventualités possibles dans une expérience aléatoire $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

96 Loi de probabilité :

L'application $P_X : X(\Omega) \mapsto [0, 1]$
 $x_i \mapsto P_X(x_i) = p[X = x_i]$

s'appelle la loi de probabilité de la variable X .

97 Espérance Mathématique :

l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre $E(X)$ défini ainsi :

$$\bar{X} = E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$$

$\bar{X}$ représente La valeur moyenne de X .

soit la variable aléatoire $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
 $\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$

et la loi de proba $p_X : X(\Omega) \mapsto [0, 1]$
 $x_i \mapsto p_X(x_i) = p[X = x_i]$

98 Variance & Covariance :

La variance de la variable aléatoire X est le nombre positif $V(X)$ défini ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - \bar{X})^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

La covariance de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$V(X)$ mesure le rapprochement ou l'éloignement des valeurs de X autour de la valeur moyenne $\bar{X}$.

99 Fonction de répartition :

L'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$
 $x \mapsto p_X(X < x)$

s'appelle la fonction de répartition de la var X .

Avec X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P_X) .

100 Intersection et Réunion d'événements

- $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

101 Sommes classiques

- $\sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} ; n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 ; n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} ; n \in \mathbb{N}^*$
- $\sum_{k=0}^{k=n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} ; n \in \mathbb{N}^*$

102 Quelques lois discrètes

Loi uniforme
 $\mathcal{U}(n)$ $P_X : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = \frac{1}{n}$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ $P_X : \{0, 1\} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = p^k \times (1-p)^{1-k}$

Loi Binomiale
 $\mathcal{B}(n, p)$ $P_X : \{0, 1, 2, \dots, n\} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

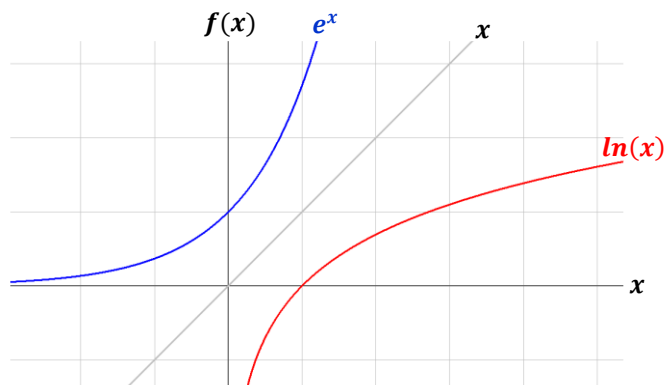
Loi de Poisson
 $\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$ $P_X : \mathbb{N} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Loi Hypergéométrique
 $\mathcal{H}(n, N, p)$ $P_X : \{0, 1, 2, \dots, n\} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}$

Loi Géométrique
 $\mathcal{G}(p)$ $P_X : \mathbb{N} \mapsto]0, 1]$
 $k \mapsto p(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

Analyse réelle

103 L'exponentielle & Le logarithme



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}}} e^x = x_0$$

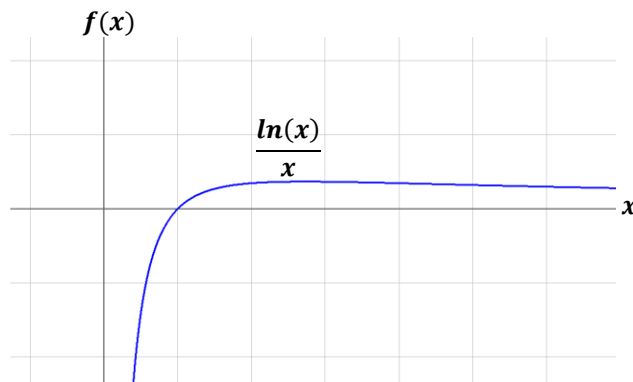
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}_+^*}} \ln(x) = \ln(x_0)$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

105 La fonction $\ln(x)/x$:



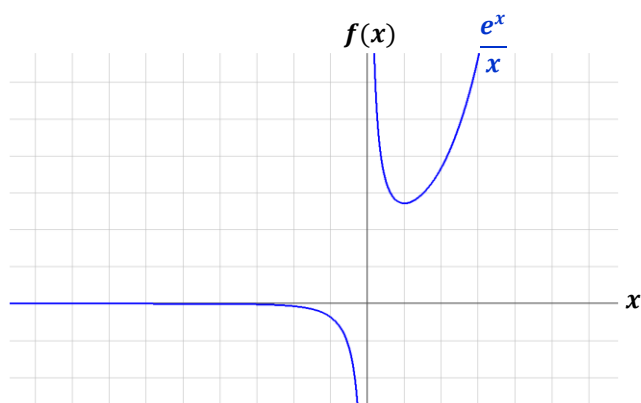
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}_+^*}} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x_0)}{x_0}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

104 La fonction $\exp(x)/x$:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

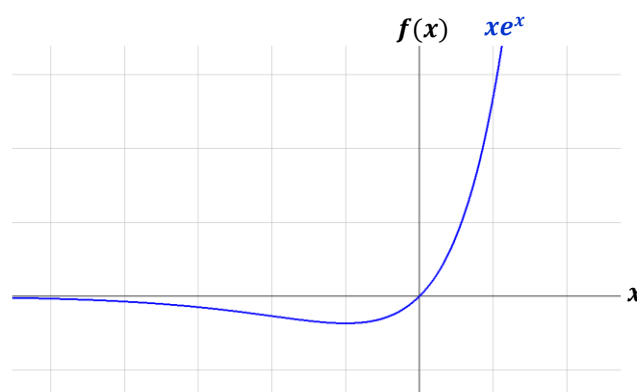
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}_+^*}} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{x_0}}{x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

106 La fonction $x \exp(x)$:



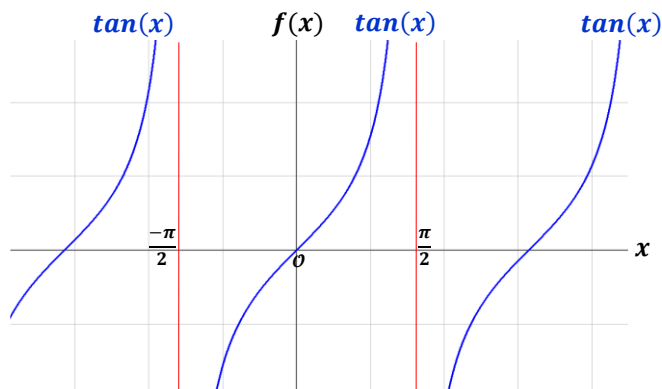
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}}} x e^x = x_0 e^{x_0}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

107 La fonction $\tan(x)$:

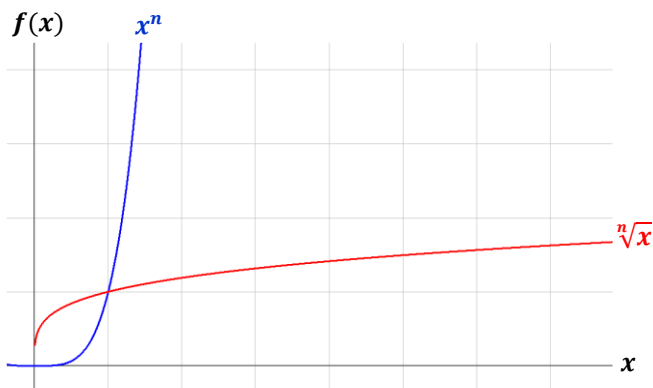


$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

108 La fonction x^n :



$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} x^n = +\infty$$

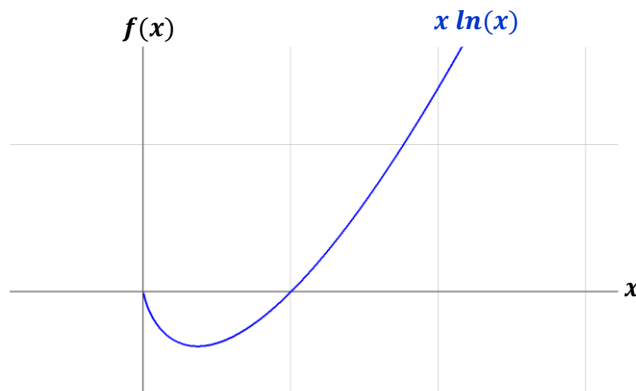
$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \alpha > 0}} n^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \alpha < 0}} n^\alpha = 0$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

109 La fonction $x \ln(x)$:



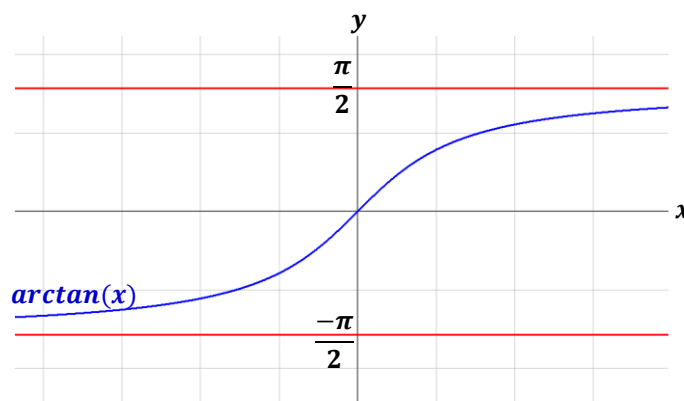
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \mathbb{R}_+^*}} x \ln(x) = x_0 \ln(x_0)$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

110 La fonction $\arctan(x)$:



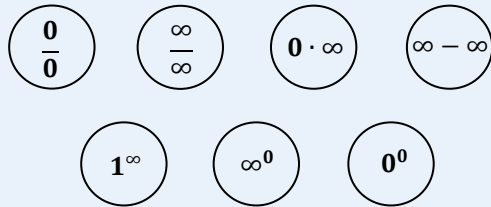
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour
en tirer les limites que vous voulez ☺

111 Formes indéterminées :



112 Règle de l'Hôpital :

La forme $\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$

Les autres formes valables sont : $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $+\infty - \infty$

Les formes non-valables sont : 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞

113 Existence d'une primitive :

f continue sur $I \Rightarrow \begin{cases} f \text{ admet des} \\ \text{primitives sur } I \end{cases}$

114 Axe de Symétrie :

(C) est symétrique par rapport à $(\Delta) : x = a \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

115 Centre de Symétrie :

(C) est symétrique par rapport à $\Omega(a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

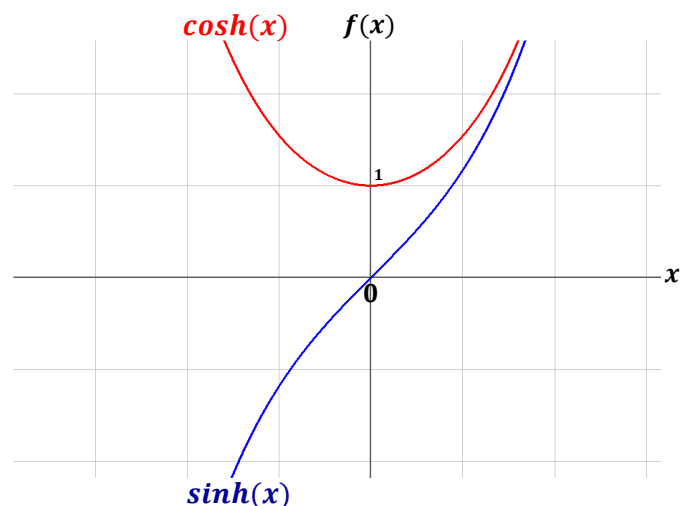
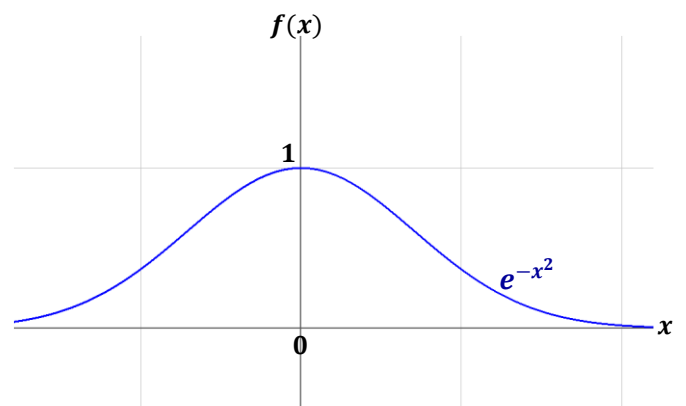
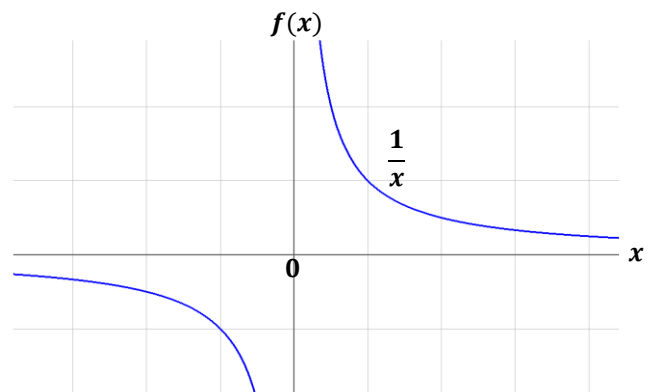
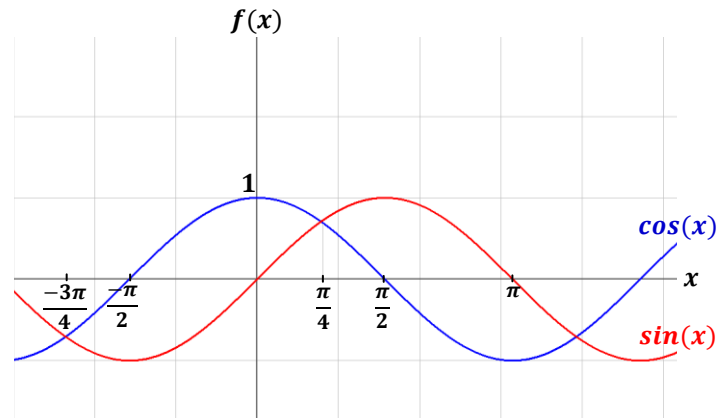
116 Fonction périodique :

f est T -périodique $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : \begin{cases} (x + T) \in D_f \\ (x - T) \in D_f \end{cases} \\ f(x + T) = f(x - T) = f(x) \end{cases}$

117 convexité d'une courbe :

x	a	β	b
$f''(x)$	+	0	-
(C_f)			

118 Quelques fonctions usuelles :



119 Branches infinies :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : x = a \text{ est une} \\ \text{asymptote verticale} \\ \text{à la courbe (C)} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = b \text{ est une} \\ \text{asymptote horizontale} \\ \text{à la courbe (C)} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{l'axe (OY)} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{l'axe (OX)} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = ax + b \\ \text{est une asymptote} \\ \text{à la courbe (C)} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{La droite } (\Delta) : y = ax \end{array} \right.$$

120 Continuité en un point :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x > x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x < x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right.$$

121 Continuité d'une somme de fcts :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (f + g) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$$

122 Continuité d'un produit de fcts :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (f \times g) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$$

123 Continuité d'un quotient de fcts :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(\frac{f}{g}\right) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$$

124 Continuité d'une composition :

$$\left| \begin{array}{l} f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \text{ . avec } x_0 \in I \\ f : J \mapsto \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \text{en } f(x_0) \text{ . avec } f(I) \subseteq J \end{array} \right| \Rightarrow g \circ f \text{ est continue en } x_0$$

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } J \\ f(I) \subseteq J \end{array} \right| \Rightarrow g \circ f \text{ est continue sur } I$$

125 TVI – version générale :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ y \in [f(a); f(b)] \end{array} \right| \Rightarrow \exists x \in [a, b] ; f(x) = y$$

$[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$ Selon la monotonie de la fonction f .

126 TVI – version particulière :

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) \leq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \exists x \in [a, b] ; f(x) = 0$$

127 limites trigonométriques

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

128 Dérivabilité en un point :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$$

129 Tableau des dérivées :

- $\forall x \in \mathbb{R} ; (\text{constante})' = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (ax + b)' = a$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (x^r)' = r x^{r-1}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall a > 0) ; (a^x)' = a^x \ln(a)$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (e^x)' = e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; (\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (\sin(x))' = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (\cos(x))' = -\sin(x)$
- $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\forall x \neq k\pi ; (\cotan(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
- $\forall x \in]-1; 1[; (\text{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in]-1; 1[; (\text{Arccos}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; (\text{Arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

130 Dérivabilité ►► continuité :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue en } x_0$$

131 Dérivée d'une composition :

$$\left. \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \text{ dérivable sur } I \\ g : J \mapsto g(J) \text{ dérivable sur } f(I) \\ f(I) \subseteq J \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \circ f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ (g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' \end{array} \right.$$

132 Opérateur de dérivation :

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
- $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

133 Monotonie (Variations) :

$$f : I \mapsto f(I) \text{ est une fonction croissante sur l'intervalle } I \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 : \\ \text{ou bien } x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \\ \text{ou bien } x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \end{array} \right.$$

$$f : I \mapsto f(I) \text{ est une fct décroissante sur l'intervalle } I \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 : \\ \text{ou bien } x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{ou bien } x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{array} \right.$$

$$f : I \mapsto f(I) \text{ est une fonction croissante sur l'intervalle } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in I^2 : f'(x) \geq 0$$

$$f : I \mapsto f(I) \text{ est une fonction décroissante sur l'intervalle } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in I^2 : f'(x) \leq 0$$

134 Extrémums :

$$f \text{ admet un extrémum en } a \quad \Leftrightarrow \quad f'(a) = 0$$

135 Fonction bijective :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f : I \mapsto f(I) \\ \text{est bijective} \end{array} \right.$$

$$f : I \mapsto f(I) \quad \Rightarrow \quad f \text{ et } f^{-1} \text{ ont les mêmes variations}$$

$$f : I \mapsto f(I) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (C_f) \text{ et } (C_{f^{-1}}) \text{ sont} \\ \text{symétriques par} \\ \text{rapport à } (\Delta) : y = x \end{array} \right.$$

136 Dérivée de la fonction inverse :

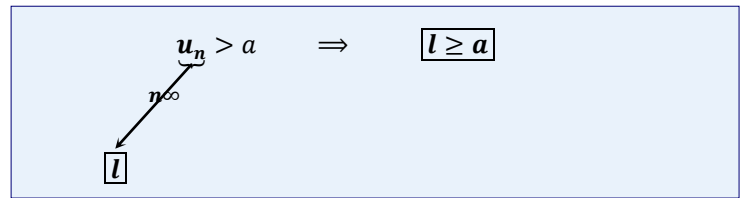
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ f' \neq 0 \text{ sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(I) \\ (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array} \right.$$

137 Théorème de ROLLE :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \exists c \in]a, b[; f'(c) = 0$$

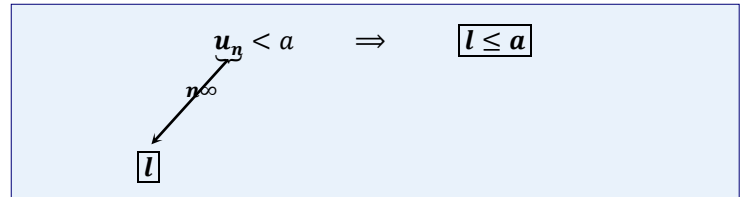
138 TAF – Égalité :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont sur } [a, b] \\ f \text{ déri sur }]a, b[\end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in]a, b[; \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = f'(c)$$



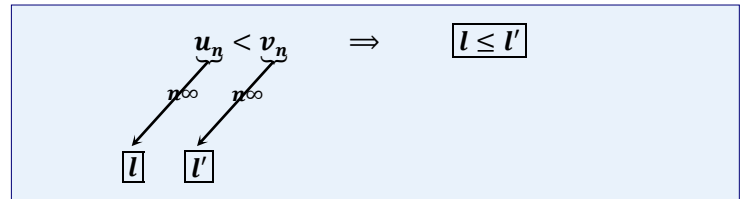
139 TAF – Inégalité :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont sur } [a, b] \\ f \text{ déri sur }]a, b[\\ m \leq f'(x) \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \leq M$$



140 Monotonie d'une suite numérique :

$$\begin{array}{ll} (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n & \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite } \nearrow \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n & \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite } \searrow \end{array}$$



141 Suite arithmétique :

$$\begin{array}{ll} (u_n)_n \text{ est arithmétique} & \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + r \\ (u_n)_n \text{ est arithmétique} & \Leftrightarrow u_n = u_p + (n - p)r \\ \Leftrightarrow & u_p + \dots + u_n = \left(\frac{n - p + 1}{2} \right) (u_p + u_n) ; n \geq p \end{array}$$

144 Suite majorée ou minorée :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ est croissante} \\ (u_n)_n \text{ est majorée} \\ (u_n \leq M) \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } l \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ (u_n)_n \text{ est minorée} \\ (u_n \geq m) \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } l \in \mathbb{R}$$

142 Suite géométrique :

$$\begin{array}{ll} (u_n)_n \text{ est géométrique} & \Leftrightarrow u_{n+1} = q u_n \\ (u_n)_n \text{ est géométrique} & \Leftrightarrow u_n = u_p \cdot q^{n-p} \\ \Leftrightarrow & u_p + \dots + u_n = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} u_p ; \begin{array}{l} n \geq p \\ q \neq 1 \end{array} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ est croissante} \\ (u_n)_n \text{ non - majorée} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

143 Suites & ordre :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \nearrow n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ (u_n)_n \text{ non - minorée} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \searrow n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty$$

145 la suite $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n) = +\infty$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n) = 1$$

$$-1 < \alpha < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n) = 0$$

$$\alpha \leq -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n) = n \text{ existe pas}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \nearrow n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l$$

146 la suite $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = +\infty}$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_*^- \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha) = 0}$$

Inversement : Si $y = \lambda \cdot e^{ax}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $y' = ay$

Finalement : les solutions de l'équation diffé
 $y' = ay$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent
 Sous la forme $y : x \mapsto \lambda e^{ax}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

147 convergence ►► bornée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$$

148 La suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\left. \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ conti sur } I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I ; u_0 \in I \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in I \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{f(l) = l}$$

149 La suite récurrente $v_n = f(u_n)$:

$$\left. \begin{array}{l} v_n = f(u_n) \\ f \text{ conti en } l \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right)}$$

Avec $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l \in I$

150 Suites adjacentes :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (u_n) \text{ est } \nearrow ; (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = l \in \mathbb{R}$$

151 Résolution de l'équation différentielle :

$$\underline{y' = ay} ; a \in \mathbb{R}^*$$

$$y' = ay \Rightarrow \frac{y'}{y} = a$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{y'}{y} \right) dx = \int a dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| + c_1 = ax + c_2$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y| + c_1} = e^{ax + c_2}$$

$$\Rightarrow e^{c_1} \cdot |y| = e^{c_2} \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow y = \left(\pm \frac{e^{c_2}}{e^{c_1}} \right) \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \lambda \cdot e^{ax} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

152 Résolution de l'équation différentielle :

$$\underline{y' = ay + b} ; a, b \in \mathbb{R}^*$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow (y' - 0) = a \left(y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow Y' = aY ; Y = \left(y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow Y = \alpha \cdot e^{ax} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{b}{a} \right) = \alpha \cdot e^{ax} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\alpha e^{ax} - \frac{b}{a} \right) ; \alpha \in \mathbb{R}$$

153 Résolution de l'équation différentielle :

$$\underline{y'' + ay' + by = 0} ; a, b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} ; a, b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} ; a, b \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \boxed{r \in \mathbb{R}} \rightarrow \boxed{y = (\alpha x + \beta) e^{rx}} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} r_1 \in \mathbb{R} \\ r_2 \in \mathbb{R} \end{array}} \rightarrow \boxed{y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \boxed{(m \pm in) \in \mathbb{C}^2}$$

$$\rightarrow \boxed{y = (\alpha \cos(nx) + \beta \sin(nx)) e^{mx}} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

154 Évaluation d'une intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec : f est continue sur I .

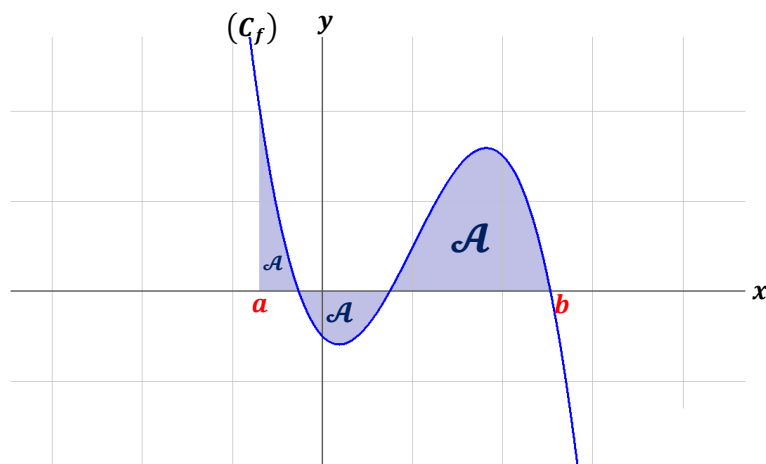
F est une primitive de f sur I .

$a, b \in I$.

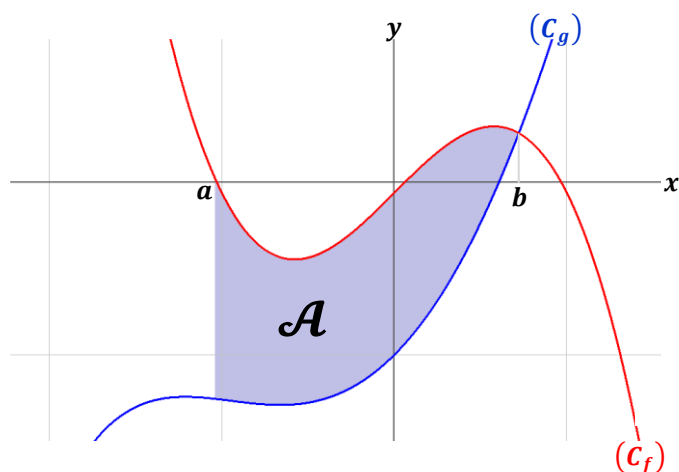
155 La fonction intégrale (primitive) :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \text{et soit } a \in I \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \exists! \varphi = \text{primitive}(f) \text{ sur } I : \\ \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt ; \forall x \in I \\ \varphi(a) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) ; \forall x \in I \end{array} \right|$$

156 Calcul d'aires :



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

157 Intégration par parties :

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Il faut faire attention à l'existence et la continuité des fonctions f et g' sur l'intervalle $[a, b]$.

158 Changement de variable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \frac{f(u(t))}{f(x)} \cdot \frac{u'(t)}{dx} dt$$

Avec :

- f continue sur J
- $u : I \mapsto J$
- $t \mapsto x = u(t)$ est une bijection
- u' est continue sur I .
- $u(I) \subseteq J$

159 Intégration et Ordre :

$$f(x) \leq g(x) \mid \begin{matrix} a \leq b \end{matrix} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Avec : f continue sur I et a et b appartiennent à I .

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Avec : f continue sur I et $a \leq b$ appartiennent à I .

160 valeur médiane d'une fonction :

$$\left. \begin{matrix} f \text{ continue sur } I \\ a, b \in I ; a \leq b \\ \forall x \in [a, b] ; m \leq f(x) \leq M \end{matrix} \right| \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est la valeur médiane de la fonction f sur $[a, b]$.

161 Théorème de la médiane :

$$\left. \begin{matrix} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \text{avec } a < b \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} \exists c \in [a, b] : \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \end{matrix} \right|$$

162 Solide de révolution autour de (ox) :

$$\left. \begin{matrix} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \text{avec } a \leq b \end{matrix} \right| \Rightarrow \mathcal{V}_S = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Avec S est le solide de révolution de f autour de (OX) .
Et l'unité de mesure est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

163 Sommes de Riemann sur $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f \left(a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) \right) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f \left(a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) \right) = \int_a^b f(x) dx$$

Avec : f est continue sur $[a, b]$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

164 Sommes de Riemann sur $[0, 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f \left(\frac{k}{n} \right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f \left(\frac{k}{n} \right) \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Avec : f est continue sur $[0, 1]$.

165 Intégrales indéfinies immédiates :

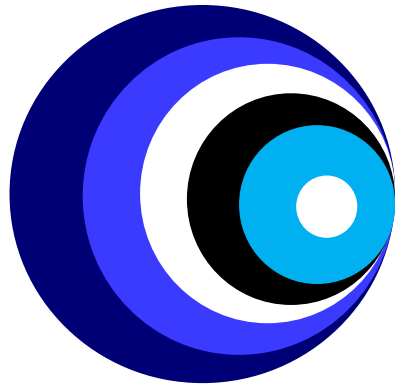
- $\int 1 \, dx = x + c$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1$
- $\int \sqrt[n]{x} \, dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + c$
- $\int x^{-1} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \quad ; \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\frac{1}{\tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c \quad ; \quad |x| > 1$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \quad ; \quad |x| < 1$
- $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c \quad ; \quad |x| > 1$
- $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad ; \quad \begin{cases} n \neq -1 \\ a \neq 0 \end{cases}$
- $\int (ax+b)^{-1} \, dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c \quad ; \quad a \neq 0$
- $\int x(ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{a^2(n+1)} + c \quad ; \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ n \neq -1 \\ n \neq -2 \end{cases}$
- $\int x(ax+b)^{-1} \, dx = \frac{x}{a} - \frac{b \ln|ax+b|}{a^2} + c$
- $\int x(ax+b)^{-2} \, dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{\ln|ax+b|}{a^2} + c$

- $\int \frac{1}{x(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + c$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c$
- $\int \frac{x^2}{x^2+a^2} dx = x - a \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \frac{1}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{1}{2a^2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + c ; |x| > a$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$
- $\int \frac{x}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-a^2| + c$
- $\int \frac{x}{(x^2-a^2)^n} dx = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} + c ; \left| \frac{n \neq 1}{|x| < a} \right|$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$
- $\int \frac{x}{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|a^2-x^2| + c$
- $\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + c ; n \neq 1$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c ; \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}} \right| + c ; \Delta > 0 \end{cases}$
- $\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + c$
- $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} + c$
- $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$
- $\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c$

- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + c$
- $\int \frac{x}{x\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c$
- $\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{-\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x} + 2$
- $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$
- $\int x\sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int x\sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}{3} + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{-(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{3} + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + c$
- $\int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sin(ax)} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2}\right) \right| + c$
- $\int \frac{1}{1 + \sin(ax)} dx = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c$
- $\int \frac{1}{1 - \sin(ax)} dx = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c$
- $\int \frac{x}{1 + \sin(ax)} dx = \frac{x}{a} \tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| + c$
- $\int \frac{x}{1 - \sin(ax)} dx = \frac{x}{a} \cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) \right| + c$

- $\int \frac{\sin(ax)}{1 + \sin(ax)} dx = x + \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \frac{\sin(ax)}{1 - \sin(ax)} dx = -x + \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$
- $\int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\cos(ax)} dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + c$
- $\int \frac{1}{1 + \cos(ax)} dx = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \frac{1}{1 - \cos(ax)} dx = \frac{-1}{a} \cotg\left(\frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \frac{x}{1 + \cos(ax)} dx = \frac{x}{a} \tan\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos\left(\frac{ax}{2}\right) \right| + c$
- $\int \frac{x}{1 - \cos(ax)} dx = \frac{-x}{a} \cotg\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin\left(\frac{ax}{2}\right) \right| + c$
- $\int \frac{\cos(ax)}{1 + \cos(ax)} dx = x - \frac{1}{a} \tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \frac{\cos(ax)}{1 - \cos(ax)} dx = -x - \frac{1}{a} \tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$
- $\int \frac{1}{\sin(ax) + \cos(ax)} dx = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + c$
- $\int \frac{1}{\sin(ax) - \cos(ax)} dx = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \right| + c$
- $\int \frac{\cos(ax)}{\sin(ax) + \cos(ax)} dx = \frac{x}{2} + \frac{\ln|\sin(ax) + \cos(ax)|}{2a} + c$
- $\int \frac{\cos(ax)}{\sin(ax) - \cos(ax)} dx = \frac{-x}{2} + \frac{\ln|\sin(ax) - \cos(ax)|}{2a} + c$
- $\int \frac{\sin(ax)}{\sin(ax) + \cos(ax)} dx = \frac{x}{2} - \frac{\ln|\sin(ax) + \cos(ax)|}{2a} + c$
- $\int \frac{\sin(ax)}{\sin(ax) - \cos(ax)} dx = \frac{x}{2} + \frac{\ln|\sin(ax) - \cos(ax)|}{2a} + c$
- $\int \tan(ax) dx = \frac{-1}{a} \ln|\cos(ax)| + c$
- $\int \frac{\tan^n(ax)}{\cos^2(ax)} dx = \frac{\tan^{n+1}(ax)}{a(n+1)} \quad ; \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{\tan(ax)} dx = \frac{1}{a} \ln|\sin(ax)| + c$
- $\int \frac{\cotg^n(ax)}{\sin^2(ax)} dx = \frac{-\cotg^{n+1}(ax)}{a(n+1)} + c \quad ; \quad n \neq -1$

- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
- $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + c$
- $\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right) + c$
- $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}(a \sin(bx) - b \cos(bx))}{a^2 + b^2} + c$
- $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}(a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2} + c$
- $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}(a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2} + c$
- $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int x^n \ln(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1} \right) + c \quad ; \quad \begin{cases} x > 0 \\ n \neq -1 \end{cases}$
- $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \frac{(\ln(x))^n}{x} dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad \begin{cases} x > 0 \\ n \neq -1 \end{cases}$
- $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) + c \quad ; \quad x > 1$
- $\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \ln(x^2 - a^2) dx = x \ln(x^2 - a^2) - 2x + a \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \sin(\ln(x)) dx = \frac{x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))}{2} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \cos(\ln(x)) dx = \frac{x(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))}{2} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + c$
- $\int x \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4} + c$
- $\int \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + c$
- $\int x \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4} + c$
- $\int \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$
- $\int x \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2}(a^2 + x^2) \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{ax}{2} + c$



Enoncés des Examens

- **2003 normale et de Rattrapage**
- **2004 normale et de Rattrapage**
- **2005 normale et de Rattrapage**
- **2006 normale et de Rattrapage**
- **2007 normale et de Rattrapage**
- **2008 normale et de Rattrapage**
- **2009 normale et de Rattrapage**
- **2010 normale et de Rattrapage**
- **2011 normale et de Rattrapage**
- **2012 normale et de Rattrapage**
- **2013 normale et de Rattrapage**
- **2014 normale et de Rattrapage**
- **2015 normale et de Rattrapage**
- **2016 normale et de Rattrapage**
- **2017 normale et de Rattrapage**
- **2018 normale et de Rattrapage**
- **2019 normale et de Rattrapage**
- **2020 normale et de Rattrapage**
- **Examens Blancs pour le soutien**



التحضير الجيد للامتحان الوطني الموحد

Bac Publique
Bac Privé
Bac Libre

عرض خاص بشعبة العلوم الرياضية

الاعم عن بعد

تلاميذ جميع مدن المغرب من طنجة إلى الكويرة

- الاستفادة من خدمة تصحيح التمارين و الفروض و الامتحانات.
- الاستفادة من حصص مركزة مضمونها مراجعة شاملة للمقرر الدراسي.
- شهر أبريل خاص بمراجعة الدروس و التركيز على الخصائص المهمة فقط.
- شهر ماي خاص بإنجاز و تصحيح 12 امتحان تجريبي من هذا الكتاب.
- عدد الساعات المقررة لشهر أبريل هو 30 ساعة - فيديوهات للمراجعة.
- عدد الساعات المقررة لشهر ماي هو 36 ساعة - فيديوهات للتصحيح.
- سوف يتم التركيز على ما هو مهم للامتحان الوطني و المباريات فقط.



للتسجيل 06 - 60 - 34 - 41 - 36

أثمنة جد مناسبة للجميع

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2020

Dimanche 20 Décembre 2020

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB

Coefficient : 9

Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2003

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ On aimerait bien résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) définie ainsi :

$$(E) : x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$$

☐**1**☐ Soit (x, y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $\delta = \text{PGCD}(x, y)$.

On pose : $x = \delta a$ et $y = \delta b$.

On suppose que le couple (x, y) est une solution de l'équation (E).

0,50 ☐☐**a** Vérifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$.

0,50 ☐☐**b** En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que :

$$2a + b = ka^2 \quad \text{et} \quad \delta^2 a^2 + 7 = kb$$

0,50 ☐☐**c** En déduire que : $a = 1$.

0,75 ☐☐**d** En déduire que : $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$.

0,75 ☐**2**☐ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe (E) d'équation : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

0,75 ☐**1**☐**a** Montrer que (E) est une partie d'une ellipse qu'on déterminera.

0,50 ☐☐**b** Tracer la courbe (E).

☐☐☐ Soit A(4,0) et B(0,3) deux points du plan.

Soit $M_1(x_1)$ un point de la courbe (E) tel que x_1 soit dans $[0,4]$.

On pose $x_1 = 4\cos(t_1)$ avec $0 \leq t_1 \leq \pi/2$.

On considère l'intégrale suivante : $I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

1,00 ☐**2**☐**a** Par le changement de variable $x = 4\cos(t)$; $0 \leq t_1 \leq \pi/2$;

Montrer que : $I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1)$.

☐☐☐ Soit $S(x_1)$ l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe (E) et les droites (OA) et (OM₁). Et soit S l'aire de la portion délimitée par les droites (OA) et (OB) et la courbe (E).

0,25 ☐☐**b** Vérifier que l'ordonnée du point M₁ est $3\sin(t_1)$.

- 0,25 ☐ ☐ **c** Calculer l'aire $S(x_1)$ en fonction de t_1 .
- 0,25 ☐ ☐ **d** En déduire l'aire S .
- 0,25 ☐ ☐ **e** Montrer l'équivalence suivante : $S(x_1) = S/2 \Leftrightarrow t_1 = \pi/4$
- 0,25 ☐ ☐ **f** Déterminer les coordonnées du point M_1 dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dans le cas où $t_1 = \pi/4$.

■ **Exercice Numéro 3 : (04,50 points)**

☐ ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I ☐ ☐ **1ère partie** : Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- 0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- 0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- 0,50 ☐ **3 a** Montrer l'équivalence suivante : $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \times)$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

II ☐ ☐ **2ème partie** : Soit σ un élément de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que $(1, \sigma)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- ☐ ☐ ☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \psi : (E, +) &\mapsto (\mathbb{C}, +) \\ M(a, b) &\mapsto a + \sigma b \end{aligned}$$

- 0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que l'application ψ est un isomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - z + 1 = 0$.
- 0,75 ☐ **3** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation et donner les solutions sous la forme exponentielle.
- 0,50 ☐ **4** ☐ On suppose dans cette question que $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que l'application ψ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

■ **Exercice Numéro 4 : (08,50 points)**

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

- 0,50 ☐ **1** ☐ Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
☐ ☐ Puis déterminer les branches infinies de la courbe (C).
- 0,25 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = 4 \left(\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \right)$
- 0,75 ☐ ☐ **b** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 0,75 ☐ **3** ☐ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β tels que : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$.
- 0,50 ☐ **4** ☐ Déterminer l'équation de la tangente (T) de la courbe (C) en $x_0 = 1$.
- 0,75 ☐ **5** ☐ Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,25 **II** ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; 1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$
- 0,50 ☐ **2** ☐ En déduire que : $\forall a \in [0, +\infty[; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(a+1) \leq a$
- III** ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2} ; n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 4$$
- Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Étudier les variations de la fonction f_n .
- 0,50 ☐ **2** ☐ Étudier la concavité de la courbe (C_n) et montrer qu'il admet un point d'inflexion dont l'abscisse est $e^{5/6}$.
- 0,25 ☐ **3 a** ☐ Comparer les quantités $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ selon les valeurs de la variable x .
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire la position relative de la courbe (C_n) par rapport à (C_{n+1}) .
- 0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées u_n et v_n telles que : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$.
- 0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est strictement décroissante.
- 0,25 ☐ **6 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $(\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}$
- 0,25 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $(\forall n \geq 4) ; \frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}$
- 0,50 ☐ ☐ **d** ☐ En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est convergente et donner sa limite.
- 0,50 ☐ **7 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \geq 4) ; v_n > e^{5/6}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = +\infty$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
juillet 2003

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ On dispose de deux urnes : la première, notée U, contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La 2^{ème}, notée V, contient 2 boules rouges et 4 boules bleues. On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une boule de l'urne U ; si elle est rouge on la range dans l'urne V puis on tire une boule de l'urne V, sinon on la met à part puis on tire au hasard une boule de l'urne V » Soient les événements suivantes :

- R_1 : « La boule tirée de l'urne U est rouge »
- B_1 : « La boule tirée de l'urne U est bleue »
- R_2 : « La boule tirée de l'urne V est rouge »
- B_2 : « La boule tirée de l'urne V est bleue »

- 1,00 ☐☐☐ **1** Calculer les probabilités $p(R_1)$ et $p(B_1)$.
- 1,00 ☐☐☐ **2** Calculer la probabilité de l'événement B_2 sachant que R_1 est vérifié.
- 0,50 ☐☐☐ **3** Calculer la probabilité de l'événement B_2 sachant que B_1 est vérifié.
- 0,50 ☐☐☐ **4** Calculer les probabilités $p(B_2)$ et $p(R_2)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,50 points)**

☐☐☐ Soit : $p = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$; avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

☐☐☐ Soit l'équation : (E) : $z^2 - 2pz + 16 = 0$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que : $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$.

0,50 ☐☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On pose : $|z_1| < |z_2|$.

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que si θ varie sur $[0, 2\pi[$ alors M varie sur un cercle qu'on déterminera.

☐☐☐ Soit : $(\Gamma) = \{ P \equiv milieu[M_1 M_2] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que (Γ) est une ellipse de foyers $F(4)$ et $F'(-4)$.

0,50 ☐☐☐ **3 a** Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{C} \setminus \{4\} : \left(\frac{b+4}{b-4} \right) = - \left(\frac{a+4}{a-4} \right) \Leftrightarrow ab = 16$

0,50 ☐☐**b** En déduire que : $\left(\frac{z_2 + 4}{z_2 - 4}\right) = -\left(\frac{z_1 + 4}{z_1 - 4}\right)$

0,50 ☐☐**c** Montrer que : $\left(\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2F}, \overrightarrow{M_2F'}\right) [2\pi]$

☐**4**☐ Soit la droite : $(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$.

0,50 ☐☐**a** Montrer que (T) est tangente à (Γ) en P .

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $(T) \perp (M_1M_2)$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif : $0_{\mathbb{Z}} = 0$; $1_{\mathbb{Z}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} ; a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$

☐☐☐ Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

0,25 ☐**1**☐ Vérifier que : $A \in E$.

0,50 ☐**2**☐**a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Puis Montrer que $\times$ est une loi commutative sur E .

0,50 ☐☐**b** Montrer que toutes les matrices de E sont inversibles par la loi $\times$.

0,50 ☐☐**c** Montrer que $(E, \times)$ est un groupe abélien (commutatif).

☐☐☐ On pose : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{n+1} = A^n \times A$; $\forall n \in \mathbb{N}$

☐☐☐ Soient : $G = \{ A^n ; n \in \mathbb{N} \}$ et $H = \{ M^{-1} \in E ; M \in G \}$.

0,25 ☐**3**☐**a** Vérifier que : $G \subseteq E$.

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $H = \{ B^n ; n \in \mathbb{N} \}$.

0,50 ☐☐**c** Montrer que $G \cup H$ est un sous-groupe de $(E, \times)$.

■ Exercice Numéro 4 : (09,50 points)

I☐☐ Soit g_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = x + e^{-nx} ; n \in \mathbb{N}^*$$

☐☐☐ Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,50 ☐**1**☐**a** Étudier les variations de la fonction g_n .

0,50	☐ ☐ b	Montrer que la fonction g_n admet une valeur minimale en un nombre réel u_n que l'on déterminera en fonction de n .
0,50	☐ 2 a	Calculer chacune des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$
0,50	☐ ☐ b	Déterminer les branches infinies de la courbe (C_n) .
0,50	☐ 3 a	Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2) .
0,50	☐ ☐ b	Tracer dans le même repère les courbes (C_1) et (C_2) .
1,00	☐ 4 a	Calculer en fonction de x l'intégrale suivante : $I(x) = \int_0^x t e^{-2t} dt$
0,50	☐ ☐ b	Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de (C_2) autour de l'axe des abscisses un tour complet sur l'intervalle $[0, \ln 2]$.
1,00	☐ 5	Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes puis déterminer leur limite. Avec : $v_n = g_n(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
	II ☐ ☐ ☐	Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
		$f_n(x) = x + e^{nx} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$
	☐ ☐ ☐	Soit (Γ_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère
	☐ ☐ ☐	orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$.
0,50	☐ 1	Étudier les variations de la fonction f_n .
0,50	☐ 2	En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n .
0,50	☐ 3 a	Montrer que : $\alpha_1 \in \left] -\ln 2 ; \frac{-1}{2} \right[$
0,50	☐ ☐ b	Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.
	☐ ☐ ☐	Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left] -\infty ; \frac{-1}{2} \right[$ par :
		$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} x$
0,50	☐ 4 a	Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $\left] -\infty ; \frac{-1}{2} \right[$.
0,50	☐ ☐ b	En déduire que : $ e^x + \alpha_1 \leq \frac{1}{\sqrt{e}} x - \alpha_1 $
	☐ ☐ ☐	Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} \beta_{n+1} = -e^{\beta_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \beta_0 = \frac{-1}{2} \end{cases}$
0,50	☐ 5 a	Montrer l'existence d'un réel a tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \beta_{n+1} - \alpha_1 \leq a \beta_n - \alpha_1 $.
0,50	☐ ☐ b	Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2004

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ Soit n un entier naturel.

0,50 ☐ **1 a** Montrer l'implication suivante : n impair $\Rightarrow n^2 \equiv 1 [8]$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer l'implication suivante : n pair $\Rightarrow n^2 \equiv 4 [8]$ ou $n^2 \equiv 0 [8]$.

0,50 ☐ **2 a** Prouver : a, b, c impairs $\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)$ n'est pas un carré parfait.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : a, b, c impairs $\Rightarrow 2(ab + bc + ac) \equiv 6 [8]$.

On pourra remarquer : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

0,50 ☐☐ **c** Prouver : a, b, c impairs $\Rightarrow 2(ab + bc + ac)$ n'est pas un carré parfait

0,50 ☐☐ **d** Prouver : a, b, c impairs $\Rightarrow (ab + bc + ac)$ n'est pas un carré parfait.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐☐☐ Soit : $E = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^* \right\}$

☐☐☐ Soit : $F = \left\{ N(a) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^* \right\}$

☐☐☐ On considère l'application suivante : $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (E, \times)$
 $x \mapsto M(x)$

0,75 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{2*} ; M(a) \times M(b) = M(a \times b)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,50 ☐☐ **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, \times)$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{2*} ; N(a) \times N(b) = M\left(\frac{b}{a}\right)$.

0,75 ☐☐ **b** Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Avec $G = E \cup F$.

0,50 ☐☐ **c** Le groupe $(G, \times)$ est-il commutatif ?

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

- 0,75 ☐ **1** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi proposée : $z^2 + z + 1 = 0$.
- ☐ ☐ ☐ Soit : $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$ et $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ et $\theta \neq \frac{-2\pi}{3}$.
- ☐ ☐ ☐ On pose : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1} = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 0,75 ☐ **2 a** Vérifier que : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ .
- 0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que $M(z')$ décrivent une hyperbole qu'on devrait définir.

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

- I** ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$; $-\infty$; 0^- ; 0^+
- 0,50 ☐ **2** ☐ Étudier les variations de la fonction f .
- 0,50 ☐ **3 a** Déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- II** ☐ ☐ ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$.
- 0,25 ☐ **2** ☐ En déduire que : $(\forall x > 0) ; x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$
- 0,50 ☐ **3 a** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.
- ☐ **4** ☐ Soit la suite suivante : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
- 0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

III ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ F(0) = 2 \ln 2 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit (C_F) la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $(\forall x > 0) ; \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt = 2 \ln 2$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall t > 0) ; -t < e^{-t} - 1 \leq 0$

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall x > 0) ; -3x^2 \leq F(x) - 2 \ln 2 \leq 0$.

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que F est dérivable à droite en zéro.

0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall t \geq 1) ; f(t) \leq e^{-t}$.

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,75 ☐ **4 a** Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

0,50 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction F .

0,50 ☐ ☐ **c** Tracer la courbe (C_F) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☐ **5** ☐ Soit G la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t dt$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall x > 0) ; G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln x$.

0,50 ☐ ☐ **b** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2004

■ Exercice Numéro 1 : (02,50 points)

☐☐☐ Une urne contient dix boules blanches et dix boules rouges indiscernable au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne ; si elle est rouge on la remet dans l'urne, et si elle est blanche on la substitue par trois boules rouges à rajouter dans l'urne à la place de la boule blanche exclue. Puis on tire une boule de l'urne.

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

0,50 ☐ **2** ☐ Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

0,75 ☐ **3** ☐ Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

0,75 ☐ **4** ☐ Calculer la probabilité d'obtenir la 1^{ère} boule tirée étant blanche sachant que la 2^{ème} est de couleur blanche.

■ Exercice Numéro 2 : (03,00 points)

0,75 ☐ **1** ☐ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $3x - 2y = 1$.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que le couple $(14n + 3 ; 21n + 4)$ est une solution de l'équation (E) ; avec $n \in \mathbb{N}$.

0,50 ☐☐ **b** En déduire que les nombres $(21n + 4)$ et $(14n + 3)$ sont premiers entre eux.

0,50 ☐ **3 a** Soit : $d = (21n + 4) \wedge (2n + 1)$, Montrer que : $d = 1$ ou bien $d = 13$.

0,25 ☐☐ **b** Montrer l'équivalence suivante : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 [13]$.

☐ **4** ☐ On pose : $(\forall n \geq 2) ; A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

0,25 ☐☐ **a** Montrer que les nombres A et B sont divisibles par $(n - 1)$.

0,50 ☐☐ **b** Déterminer en fonction de n le PGCD(A,B).

■ **Exercice Numéro 3 : (04,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(H) = \left\{ M(z) ; z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 ; a = \alpha + i\beta \neq 0 ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

0,50 ☐☐**1 a** Déterminer la nature de l'ensemble (H) .

0,50 ☐☐**b** Tracer l'ensemble (H) dans le cas où $a = 1 + i$.

☐☐**2** Soit : $(C) = \{ M(z) \in (P) ; (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \}$.

0,75 ☐☐**a** Déterminer la nature de l'ensemble (C) .

0,25 ☐☐**b** Tracer l'ensemble (C) dans le cas où $a = 1 + i$.

☐☐**3** On considère le système suivant : $(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$.

0,75 ☐☐**a** Montrer que si on pose $u = z - a$ alors le système (S) est équivalent à :

$$(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

0,75 ☐☐**b** Soit : $a = r e^{i\theta} ; r > 0 ; -\pi \leq \theta \leq \pi$

☐☐☐ Déterminer en fct de r et θ les points d'intersection de (C) et (H) .

0,50 ☐☐**c** En déduire que l'intersection de (C) et (H) contient trois points qui forment un triangle équilatéral.

■ **Exercice Numéro 4 : (10,50 points)**

I ☐☐☐ Soient f et g les fonctions numériques définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 4x e^{-x \ln 2} - 2 ; \quad g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$$

☐☐☐ Soient (C) et (T) les courbes représentatives des fonctions f et g resp dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$.

0,75 ☐☐**1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,50 ☐☐**b** Déterminer les branches infinies de la courbe (C) .

0,75 ☐☐**2 a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$.

0,75 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

En déduire que 1 et 2 sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$.

0,75 ☐ **3** ☐ Étudier les branches infinies et la monotonie de la fonction g .

0,50 ☐ **4** ☐ Tracer les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$ dans le même repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

II ☐ ☐ On considère l'équation $(E) : g(x) = k$ avec $0 < k < \frac{2}{e}$.

0,75 ☐ **1 a** Vérifier graphiquement que l'équation (E) admet deux solutions α et β tels que : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

0,75 ☐ ☐ **b** Déterminer la valeur de k pour laquelle on ait : $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

☐ **2** ☐ Soit f_k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = 4x e^{-kx} - 2$

0,50 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_k(x) = 4(1 - kx) e^{-kx}$.

0,50 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f_k .

0,50 ☐ **3 a** En déduire que l'équation $f_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b tels que : $a < \frac{1}{k} < b$.

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $a = \alpha$ et $b = \beta$.

0,75 ☐ **4 a** En utilisant une intégration par parties, Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} ; \int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(1 - kt e^{-kt} - e^{-kt} \right)$$

0,75 ☐ ☐ **b** Calculer l'intégrale $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$ en fonction de α et β .

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$.

0,75 ☐ **5** ☐ Montrer que : $\forall u, v \in \mathbb{R}_+^* ; \frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v} \Rightarrow \ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2005

■ **Exercice Numéro 1 : (04,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit : $(a, b) * (x, y) = \left(\frac{ax + by}{2} ; \frac{ay + bx}{2} \right)$; $\begin{cases} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

☐☐☐ Soit : $E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 ; m \in \mathbb{R}^* \right\}$

$\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (E, *)$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi : $m \mapsto \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right)$

☐☐☐ Soit : $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y^2 = x^2 - 4 \text{ et } x \geq 2 \}$

0,75 ☐☐☐ **1** Montrer que $*$ est une loi de composition sur l'ensemble E.

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, *)$.

0,75 ☐☐☐ **b** En déduire que $(E, *)$ est un groupe puis déterminer son élément neutre.

☐☐☐ Déterminer le symétrique de l'élément $\left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right)$; $m \in \mathbb{R}^*$.

1,00 ☐☐☐ **3 a** Montrer que : $F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 ; m > 0 \right\}$

1,00 ☐☐☐ **b** Montrer que $(F, *)$ est un sous-groupe du groupe $(E, *)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

0,50 ☐☐☐ **I** Soit p un entier naturel premier supérieur ou égal à 5.

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que : $p^2 \equiv 1 [3]$.

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que : $\exists q \in \mathbb{N}^* ; p^2 - 1 = 4q(q + 1)$.

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que : $p^2 \equiv 1 [8]$.

0,50 ☐☐☐ **3** Montrer que : $p^2 \equiv 1 [24]$.

0,50 ☐☐☐ **II 1** Soit $a \in \mathbb{N}^* ; a \wedge 24 = 1$; Montrer que : $a^2 \equiv 1 [24]$.

0,50 ☐ **2** ☐ Étudier la véracité du prédicat suivant :

$$\exists (a_1, \dots, a_{23}) \in \mathbb{N}^{23*} ; a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997 ; \text{ avec } \begin{cases} \forall k \in \{1, 2, \dots, 23\} \\ a_k \wedge 24 = 1 \end{cases}$$

■ Exercice Numéro 3 : (08,00 points)

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2) e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} ; & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,25 ☐ **1 a** Montrer que f est continue à droite en zéro.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable à droite en zéro.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que f est une fonction croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,25 ☐ **2 a** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall t \geq 0) ; 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(\forall t > 0) ; \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$.

0,25 ☐ ☐ **d** En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (Δ) qu'on déterminera.

0,50 ☐ **3** ☐ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

II ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{\frac{-2}{x}} ; & \forall x > 0 ; n \in \mathbb{N}^* \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en zéro.

0,50 ☐ **2** ☐ Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\exists ! a_n \in]0, +\infty[) : f_n(a_n) = \frac{2}{n}$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall x > 0) , (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_{n+1}(x) - \frac{2}{n}$

0,75 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente on pose a sa limite

0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n a_n = 2 e^{\left(\frac{2}{a_n}\right)} - 2$.

0,50 ☐ ☐ **e** Montrer que : $a = 0$.

m ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que : $(\forall x > 0) ; x f(x) \leq F(x) \leq x f(2x)$.

0,25 ☐ ☐ **b** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,50 ☐ **2 a** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

☐ ☐ **b** Puis montrer que :
$$\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((x+2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x+2) e^{\frac{1}{x}} \right) ; \forall x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ **3** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction F .

■ Exercice Numéro 4 : (04,50 points)

0,25 ☐ ☐ ☐ On pose : $f(z) = \frac{iz - 1}{(z + 1)^2} ; z \neq -1$

1,00 ☐ **1 a** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(iy) = iy$.

0,50 ☐ ☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = z$.

☐ **2** ☐ Soient $z_0 ; z_1 ; z_2$ les solutions de l'équation (E).

☐ ☐ ☐ On suppose que : $\operatorname{Re}(z_0) = 0$ et $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$.

0,75 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $z_1 + 1 = e^{\left(\frac{i11\pi}{6}\right)}$ et $z_2 + 1 = e^{\left(\frac{i7\pi}{6}\right)}$.

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire une écriture exponentielle des nombres z_1 et z_2 .

☐ **3** ☐ Dans tout ce qui suit, on prendra : $z = e^{i\alpha} ; 0 \leq \alpha < \pi$.

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\overline{f(z)} = i z f(z)$.

0,75 ☐ ☐ **b** Déterminer α sachant que : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.

0,25 ☐ ☐ **c** Déterminer $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $f(z) = r e^{i\varphi}$.

0,50 ☐ **4** ☐ Déterminer z tel que $|z| = 1$ et $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2005

■ **Exercice Numéro 1 : (02,50 points)**

- ☐☐☐ Soit $x \wedge y$ le plus grand commun diviseur des nombres x et y .
- ☐☐☐ Soit $\overline{abc}^{(x)}$ la représentation du nombre abc dans le système de numération à base x .
- ☐☐☐ Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$.
- 0,50 ☐**1**☐**a** Montrer que : (x,y) est solution de $(E) \Rightarrow x \equiv 2 [5]$ ou $x \equiv 1 [5]$.
- 0,50 ☐☐**b** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .
- 0,75 ☐**2**☐ Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k - 3) \wedge 8$.
- 0,75 ☐**3**☐ Résoudre dans $\mathbb{N}^{2*}$ le système suivant :
$$\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 [5] \end{cases}$$

■ **Exercice Numéro 2 : (04,50 points)**

- I** ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐☐☐ Soit : $(C_m) = \left\{ M(x,y) \in \mathcal{P} ; \left(\frac{x^2}{10-m} \right) + \left(\frac{y^2}{2-m} \right) = 1 ; m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 10\} \right\}$
- 1,00 ☐**1**☐ Discuter, selon les valeurs du paramètre m , la nature de la courbe (C_m) .
- 1,00 ☐**2**☐ Donner les caractéristiques de (C_m) dans le cas où (C_m) est une conique.
- 0,25 ☐**3**☐ Tracer la courbe (C_1) .
- ☐☐☐ Soit l'équation : $(E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + 1 + 8 \cos^2 \alpha = 0 ; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- 0,50 **II** ☐**1**☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- ☐☐☐ Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tels que $\Im m(z_1) > 0$.
- 0,25 ☐**2**☐**a** Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan, montrer que $M_1 \in (C_1)$.
- 0,75 ☐☐**b** Montrer l'existence de deux points $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ tels que la tangente à la courbe (C_1) en chacun soit parallèle à (OM_1) .
- 0,75 ☐☐**c** Montrer que : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$.

■ **Exercice Numéro 3 : (02,50 points)**

- ☐☐☐ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 20 .
- ☐☐☐ Une urne contient dix boules blanches et $(n - 10)$ boules noires, on suppose que toutes les boules sont indiscernable au toucher. On tire de cette urne une boule et on note sa couleur puis on la remet dans l'urne. On répète cette expérience aléatoire n fois. On note p_k la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches $0 \leq k \leq n$.

0,50 ☐☐☐ **1** Calculer p_k en fonction de n et k .

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0 ; (n - 1) \rrbracket$: $u_k := \frac{p_{k+1}}{p_k} = \left(\frac{n - k}{k + 1} \right) \times \left(\frac{10}{n - 10} \right)$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer les équivalences :
$$\left| \begin{array}{ll} 0 \leq k \leq 9 & \Leftrightarrow u_k \geq 1 \\ 10 \leq k \leq n - 1 & \Leftrightarrow u_k \leq 1 \end{array} \right.$$

1,00 ☐☐☐ **c** En déduire la plus grande valeur M de p_k quand $k \in \{0 ; 1 ; \dots ; n\}$.

☐☐☐ Montrer que : $M = \left(\frac{n!}{n^n} \right) \times \left(\frac{10^{10}}{10!} \right) \times \left(\frac{(n - 10)^{n-10}}{(n - 10)!} \right)$

■ **Exercice Numéro 4 : (10,50 points)**

- ☐☐☐ **I** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + x) e^{-2x}$
- ☐☐☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

0,50 ☐☐☐ **1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,50 ☐☐☐ **b** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,50 ☐☐☐ **2** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0,50 ☐☐☐ **3 a** Étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,50 ☐☐☐ **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ☐☐☐ **4 a** Montrer que f est solution de l'équation (E) : $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$

0,50 ☐☐☐ **b** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) .

- ☐☐☐ **II** Soit $\mathcal{A}_n$; $n \in \mathbb{N}^*$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = n$.

1,00 ☐☐☐ **1** Calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n .

- 1,00 ☐ **2** ☐ Calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n .
- 0,50 ☐ **3** ☐ Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n$
- III** ☐ ☐ On pose : $u_n = n \int_0^1 (f(x))^n dx$; $n \in \mathbb{N}^*$
- 0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que : $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dx$; $n \in \mathbb{N}^*$; poser $t = xn$
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall r \in [1; 2]$; $2 - r \leq \left(\frac{1}{r}\right) \leq 1$
- 0,75 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x \in [0; n]$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\left(x - \frac{x^2}{2n}\right) \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$
- 0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n \leq \int_0^n e^{-x} dt$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $e^{\left(\frac{-1}{2\sqrt{n}}\right)} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} dx \leq u_n$
- 0,75 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente, donner sa limite.
- 0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $\forall a \in]0, 1[$; $\int_a^1 n(f(x))^n dx \leq n(1 - a)(f(a))^n$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall a \in]0, 1[$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 n(f(x))^n dx = 0$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a n(f(x))^n dx$; $\forall a \in]0, 1[$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2006

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

I ☐ ☐ Rappel : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐ ☐ ☐ Soit $G = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$.

☐ ☐ ☐ Soit $H = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in G ; b > 0 \right\}$.

☐ ☐ ☐ On pose : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que G est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.

0,50 ☐ **4** ☐ Calculer A^n en fonction de a et n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

II ☐ ☐ Soit τ l'application définie ainsi :

$$\forall (a, b); (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : (a, b) \tau (x, y) = (a + bx, by)$$

☐ ☐ ☐ Soit φ l'application définie ainsi : $\varphi : (G, \times) \mapsto (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \tau)$
 $M(a, b) \mapsto (a, b)$

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que φ est un isomorphisme de $(G, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \tau)$.

0,25 ☐ **2** ☐ En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \tau)$.

0,50 ☐ **3** ☐ Déterminer le symétrique de $\underbrace{(a, 1) \tau \dots \tau (a, 1)}_{n \text{ fois } (a, 1)}$ dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \tau)$

■ **Exercice Numéro 2 : (02,50 points)**

☐ ☐ ☐ Soit l'équation : $(E) : x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$; $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

☐ ☐ ☐ Soit (x, y) une solution de l'équation (E) .

☐ ☐ ☐ On pose : $d = x \wedge y$; $x = ad$; $y = bd$.

- 0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** En déduire que : $b = 1$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que $a \neq 1$ et que le nombre $(a-1)$ divise $(a+1)$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : *ou bien* $a = 2$, *ou bien* $a = 3$.
- 0,50 ☐ **2** Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) .

■ **Exercice Numéro 3 : (05,00 points)**

- I** ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- ☐ ☐ Soit : $P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$; $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ ☐ Soit : $(H) = \{ M(z) \in \mathcal{P} ; P(z) \in i\mathbb{R} \}$.
- 0,50 ☐ **1** Montrer que : $(H) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \}$.
- 1,00 ☐ **2** Montrer que (H) est une hyperbole puis déterminer ses caractéristiques
- 0,50 ☐ **3** Vérifier que $O \in (H)$.
- ☐ ☐ Donner une équation de la tangente à (H) en O .
- 0,75 ☐ **4** Construire (H) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- 0,50 **II** **1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi proposée : $P(z) = 4 - 6i$.
- ☐ **2** Soient : $u = 1 + 5i$; $v = 1 + i$; $\omega = 239 - i$; $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$; $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $u^4 \times v = 4\omega$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Déterminer $\arg u$, en fonction de α . Puis $\arg(\omega)$ en fonction de β .
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

■ **Exercice Numéro 4 : (09,00 points)**

Première partie

- ☐ ☐ Soit g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$g_n(x) = nx + 2 \ln x ; n \in \mathbb{N} ; n \geq 3$$
- 0,50 ☐ **1** Dresser le tableau de variations de la fonction g_n .
- 0,50 ☐ **2** Montrer que : $(\forall x > 0) ; \sqrt{x} > \ln x$.
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha_n > 0$.
- ☐ ☐ Montrer que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
Deuxième partie
- $$f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Étudier la dérivabilité de la fonction f puis interpréter graphiquement.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement
- 0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 0,50 ☐ **4** ☐ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 **II 1 a** Montrer que : $f(I) \subseteq I ; I = \left[\frac{1}{3}; 1 \right]$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(f(x) = x ; x > 0) \Leftrightarrow x = \alpha_3$
- ☐ **2** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.
- III 1** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_x^{8x} f(t) dt$$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer sa dérivée.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Étudier la monotonie de la fonction F . (calcul de $F'(x) ; \forall x \geq 0$)
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall x \geq 0) ; 0 \leq F(x) \leq 2 f(x) (1 - e^{-7x})$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Dresser le tableau de variations de la fonction F .

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2006

■ **Exercice Numéro 1 : (02,00 points)**

☐☐☐ On distribue au hasard quatre boules, indiscernables au toucher et numérotées par les chiffres 1, 2, 3 et 4, sur six personnes A, B, C, D, E et F (chaque personne pourrait recevoir zéro ou une ou deux ou trois ou quatre boules).

0,50 ☐☐☐ **1** Dénombrer les éventualités possibles de cette distribution.

0,50 ☐☐☐ **2** Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule par A.

1,00 ☐☐☐ **3** Soit E l'événement : « La somme des nombres portés par les boules obtenues de la part des personnes B et C est égal au nombre porté par la boule acquis par la personne A ».

☐☐☐ Calculer la probabilité de cet événement E.

■ **Exercice Numéro 2 : (05,00 points)**

I ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit l'application f définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par la formule :

$$f(z) = \frac{1}{6} \left((1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} \right)$$

0,50 ☐☐☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

0,50 **II** ☐☐☐ soient : $\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ z_0 = 1 \end{cases}$; $u_n = |z_n|$

0,50 ☐☐☐ **1 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente puis calculer sa limite.

0,50 ☐☐☐ **2** On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_1 + OM_2 + \dots + OM_n ; z_k = aff(M_k) ; n \in \mathbb{N}$

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 3$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

III ☐ ☐ On pose : $z = r e^{i\theta}$; $\theta \in]-\pi, \pi[$; $r > 0$.

1,00 ☐ **1** ☐ Montrer que : $f(z) = \frac{2}{3} r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que les points $\{M_i ; 1 \leq i \leq n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ sont colinéaires.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

I ☐ ☐ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☐ ☐ ☐ Soit : $(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; 2y^2 - 4y - 7x = 0 \right\}$

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que (Γ) est une parabole puis déterminer ses caractéristiques.

0,25 ☐ **2** ☐ Construire la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II ☐ ☐ Soit l'équation $(E) : 2(y-1)^2 = 7x + 2$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

☐ **1** ☐ Soit le couple (x, y) une solution de cette équation dans $\mathbb{Z}^2$.

1,00 ☐ ☐ **a** Montrer que : *ou bien* $y \equiv 0 [7]$ *ou bien* $y \equiv 2 [7]$.

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que les solutions de l'équation (E) s'écrivent sous :

$$(14k^2 - 4k ; 7k) \quad \text{ou} \quad (14k^2 + 4k ; 7k + 2) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

1,00 ☐ **2** ☐ Soit : $\mathfrak{B} = \left\{ M(x, y) \in (\Gamma) ; x \wedge y = 9 ; (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

Déterminer explicitement l'ensemble $\mathfrak{B}$.

■ Exercice Numéro 4 : (03,00 points)

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{3+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \left(\frac{1}{3+t^2} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$

☐ **3** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, \pi]$.

0,50 ☐ ☐ **b** Via une intégration par changement de variable montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi[; F(x) = 2 \int_0^{\tan(\frac{\pi}{2})} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

☐☐☐ **Rappel** : $\sin(u) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos(u) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ avec $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$; $u \in [0, \pi[$

0,75 ☐☐☐ **c** En utilisant les résultats des questions précédentes, Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi[\quad ; \quad F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 ☐☐☐ **d** En utilisant la continuité de la fonction F Montrer que :

$$\int_0^\pi \left(\frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} \right) du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

■ Exercice Numéro 5 : (06,50 points)

☐☐☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq 2$$

☐☐☐ Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

0,50 ☐☐☐ **1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0,75 ☐☐☐ **b** Déterminer les deux branches infinies de la courbe (C_n) .

0,75 ☐☐☐ **2** Calculer $f'_n(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f_n .

0,50 ☐☐☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}) : f_n(\alpha_n) = 0$.

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq 2 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

0,75 ☐☐☐ **c** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x + 1$.

0,50 ☐☐☐ **d** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f_n(1) > 0$ et $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

0,50 ☐☐☐ **4** Tracer la courbe (C_2) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ☐☐☐ **5 a** Montrer que : $(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$.

0,75 ☐☐☐ **c** Montre que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente puis donner sa limite.

0,50 ☐☐☐ **6 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) : \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$

0,25 ☐☐☐ **c** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2007

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I ☐☐☐ **1^{ère} partie** : Soit $\forall (a, b) \in E^2$; $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$; $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $\forall (a, b) \in E^2$; $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$

0,25 ☐☐ **b** En déduire que l'application $\perp$ est une loi de composition interne E

0,50 ☐ **2** Montrer que $(E, \perp)$ est un groupe commutatif.

II ☐☐☐ **2^{ème} partie** : Soit $F = \left\{ M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} ; a \in E \right\}$

0,50 ☐ **1 a** Vérifier les égalités suivantes :

$$M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \quad \text{et} \quad A^2 = -2A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

0,50 ☐☐ **b** Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

☐ **2** On considère l'application φ définie ainsi :

$$\varphi : (E, \perp) \mapsto (F, \times)$$

$$a \mapsto \varphi(a) = M(a)$$

0,50 ☐☐ **a** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,50 ☐☐ **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

I ☐☐☐ Soit : $(E) : z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$; $z \in \mathbb{C}$; $a \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que $u = a + i$ est une solution de l'équation (E).

0,25 ☐☐ **b** Déterminer v la deuxième solution de l'équation (E).

0,25 ☐ **2 a** On suppose que $|a| = 1$, montrer que : $\left(\frac{u}{v}\right) \in \mathbb{R}$

0,25 ☐ **b** Vérifier que : $u^2 = a((a - \bar{a}) + 2i)$.

0,50 ☐ **c** En déduire que : $\arg(u) \equiv \left(\frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}\right) [\pi]$

0,50 ☐ **3** Montrer que : $|u| + |v| \geq 2$.

II ☐ Soit : $(E_m) = \{ M(a) \in \mathcal{P} ; |u| + |v| = m \}$

0,50 ☐ **1** Montrer que (E_m) est une ellipse de centre $\mathcal{O}$.

☐ **2** On pose : $a = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

0,25 ☐ **a** Montrer qu'une équation de (E_m) est donnée par :

$$x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$$

0,25 ☐ **b** Construire l'ellipse (E_4) .

0,50 ☐ **3** Soient $A(\sqrt{3})$ et $B(2i)$ les sommets de l'ellipse (E_4) .

Montrer que la droite (AB) est une tangente de l'ellipse $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

☐ Soit : $(E) : 195x - 232y = 1$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

0,50 ☐ **1 a** Déterminer le plus grand commun diviseur de 232 et 195.

0,50 ☐ **b** Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est donné par :

$$S = \left\{ (163 + 232k ; 137 + 195k) \in \mathbb{Z}^2 ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

0,25 ☐ **c** Déterminer l'entier naturel d qui vérifie les conditions suivantes :

$$195d \equiv 1 [232] ; 0 \leq d \leq 232$$

0,25 ☐ **2** Prouver que l'entier naturel 233 est un nombre premier.

☐ **3** Soit : $A = \left\{ n \in \mathbb{N} ; 0 \leq n \leq 232 \right\} = \llbracket 0 ; 232 \rrbracket$

☐ Soit l'application définie ainsi : $f : A \mapsto A$
 $a \mapsto f(a)$

☐ Avec $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{195} par 233.

0,50 ☐ **a** Montrer que l'application f est injective.

0,50 ☐ **b** Montrer que l'application f est surjective.

0,50 ☐ **c** En déduire que l'application f est une bijection puis donner f^{-1} .

■ **Exercice Numéro 4 : (10,50 points)**

I ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + (x - 1) e^x$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$.

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\exists ! x = 0) ; g(x) = 0$.

II ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 ☐ **3 a** ☐ Calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire le sens de variations de la fonction f .

☐ **4** ☐ Soit l'intégrale suivante : $J(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$; $x \in \mathbb{R}$

0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Par une intégration par partie, Montrer l'identité suivante :

$$J(x) = e^{-x} (e^x - 1 - x)$$

1,00 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \right) \leq J(x) \leq \left(\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \right)$

0,50 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$

0,75 ☐ ☐ **d** ☐ En déduire que la fonction f est dérivable en zéro et $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

0,50 ☐ **5 a** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right) (e^x(x - 2) + 2 + x)$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Étudier le signe de la quantité $(e^x(x - 2) + 2 + x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$.

0,50 ☐ ☐ **d** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que $\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

IV ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) dt ; \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que la fonction F est dérivable en zéro et $F'(0) = 1$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

☐ ☐ ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x)$

0,25 ☐ ☐ **b** Étudier la monotonie de la fonction F .

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2007

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a [p] \\ x \equiv b [q] \end{cases} ; \quad a, b, p, q \in \mathbb{Z} ; \quad p \wedge q = 1$$

0,50 ☐**1**☐**a** Montrer que : $\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 ; pu_0 + qv_0 = 1$.

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système (S).

0,50 ☐**2**☐ Montrer que : $x \text{ est solution de } (S) \Rightarrow pq \text{ divise } (x - x_0)$

0,50 ☐**3**☐ Montrer que : $pq \text{ divise } (x - x_0) \Rightarrow x \text{ est solution de } (S)$

0,50 ☐**4**☐ Résoudre ainsi le système (S) dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

0,50 ☐**5**☐ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 1 [8] \\ x \equiv 3 [13] \end{cases}$

■ **Exercice Numéro 2 : (02,00 points)**

☐☐☐ Soit n un entier naturel impair non nul et supérieur ou égal à 3, On dispose de n urnes numérotés de 1 jusqu'à n . l'urne numéro k contient k boules blanches et $(n - k)$ boules noires ($1 \leq k \leq n$). On choisit au hasard une urne puis on tire au hasard une boule.

0,50 ☐**1**☐ Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

0,75 ☐**2**☐ Calculer la probabilité d'effectuer le tirage d'une urne impaire.

0,75 ☐**3**☐ Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que le tirage est effectué d'une urne impaire.

■ **Exercice Numéro 3 : (02,75 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$$\text{Soit : } (H) = \{ M(z) \in \mathcal{P} ; z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \}$$

0,50 ☐**1**☐**a** Montrer que (H) est une hyperbole puis donner ses caractéristiques.

0,25 ☐☐**b** Construire l'hyperbole (H) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☐**2**☐ Soit : $\varphi(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$; avec $M(a) ; M(b) \in (H)$

0,50 ☐☐**a** Montrer que : $M(\varphi(a, b)) \in (H)$.

0,50 ☐☐**b** Vérifier que : $\varphi(a, 1) = 1$ et $\varphi(a, \bar{a}) = 1$.

☐**3**☐ On munit (H) de la loi de composition interne définie ainsi :

$$\forall M(a), M(b) \in (H) ; \quad M(a) * M(b) = M(\varphi(a, b))$$

1,00 ☐☐☐ Montrer que $(H, *)$ est un groupe commutatif.

■ **Exercice Numéro 4 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

☐☐☐ Soit : $F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = M(0, 1)$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(F, +, \cdot)$.

0,50 ☐ **2** Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Montrer que $(1, \alpha)$ est une base de l'espace $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

☐ **3** Soient $m, n \in \mathbb{R}$ et ψ l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{C}, \times) &\mapsto (F, \times) \\ m + \alpha n &\mapsto M(m, n) \end{aligned}$$

0,50 ☐☐ **a** Vérifier que : $J^2 = -2(I + J)$ et $\psi(\alpha) = J$.

0,50 ☐☐ **b** Déterminer les valeurs de α pour lesquelles ψ soit un isomorphisme.

0,50 ☐ **4** Soit $\alpha = -1 + i$, Écrire J^{2007} dans la base (I, J) .

■ **Exercice Numéro 5 : (09,25 points)**

☐ **I** Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$.

0,50 ☐ **1 a** Étudier la monotonie de la fonction g .

0,50 ☐☐ **b** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

☐☐☐ Puis Dresser le tableau de variation de la fonction g .

0,50 ☐☐ **c** En déduire que $x_0 = 0$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$.

☐ **2** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + x - e^{-x}}$

☐☐☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

0,50 ☐☐ **a** Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,25 ☐☐ **b** Calculer : $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

0,50 ☐☐ **c** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 ☐☐ **d** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \exists ! x_n > 0 : f(x_n) = 0$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante puis montrer qu'elle converge.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$

0,25 **II** ☐ **1** **a** Montrer l'équivalence suivante : $f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = x$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\exists ! \alpha \in \left] \frac{1}{e} ; 1 \right[; e^{-\alpha} = \alpha$

☐ **2** ☐ Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} y_{n+1} = e^{-y_n} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \\ y_1 = 1 \end{cases}$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |y_{n+1} - \alpha| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} |y_n - \alpha|$.

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que $(y_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer sa limite.

III ☐ ☐ Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt ; \forall x > 0 \\ F(0) = \frac{\ln 2}{2} \end{cases}$$

0,25 ☐ **1** **a** Montrer que : $\forall t > 0 ; \frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t}$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,50 ☐ **2** **a** Montrer que : $\forall t \geq 0 ; 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall t \in]0, 4[; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que la fonction F est continue à droite en zéro.

0,25 ☐ **3** **a** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $F'(x) ; \forall x > 0$.

0,25 ☐ ☐ **b** Étudier la monotonie de la fonction F sur $[0, +\infty[$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2008

■ **Exercice Numéro 1 : (03,25 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit : $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi (Avec $E^* = E \setminus \{ M(0,0) \}$) :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (E^*, \times) \\ a + ib &\mapsto M(a, b) \end{aligned}$$

0,75 ☐ **1 a** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que la famille (I, J) est une base de l'espace $(E, +, \cdot)$.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0,50 ☐ **3** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0,75 ☐ **4** Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J \times X^3 = I$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,75 points)**

I ☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(G) : iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$; $(a, z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

0,50 ☐ **1 a** Vérifier que $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ avec Δ est le discriminant de (G) .

0,50 ☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) .

0,50 ☐ **2** Montrer l'équivalence suivante : $a \in \text{solutions}(G) \Leftrightarrow \text{Re}(a) = \text{Im}(a)$

II ☐☐ Soient : $A(a)$; $B(i\bar{a})$; $C(1 + ia)$; avec $\text{Re}(a) \neq \text{Im}(a)$.

0,50 ☐ **1 a** Montrer l'implication : $z = \frac{(1 + ia) - a}{i\bar{a} - a} \Rightarrow \bar{z} = \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$

0,50 ☐☐ **b** Montrer l'équivalence : $A ; B ; C$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \text{Im}(a) = \frac{1}{2}$

☐ **2** Soient les rotations : $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\left(A ; \frac{-\pi}{2}\right)$; $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}\left(A ; \frac{\pi}{2}\right)$; $\text{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$.

☐☐☐ Soient : $\mathcal{R}_1(B) = B'$; $\mathcal{R}_2(C) = C'$; $E = \text{milieu}[BC]$.

0,50 ☐☐ **a** Calculer : $c' = \text{aff}(C')$ et $b' = \text{aff}(B')$.

0,75 ☐☐ **b** Montrer que : $(AE) \perp (B'C')$ et $B'C' = 2AE$.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

- 0,25 ☐ **I** ☐ ☐ Soit l'équation : (E) : $35u - 96v = 1$; $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Vérifier que (11,4) est une solution particulière de l'équation (E).
- 0,50 ☐ **2** ☐ En déduire la solution générale de l'équation (E).
- II** ☐ ☐ Soit l'équation : (F) : $x^{35} \equiv 2 [97]$; $x \in \mathbb{Z}$.
- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que 97 est un nombre premier.
- ☐ ☐ Puis Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \wedge 97 = 1$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x^{96} \equiv 1 [97]$.
- 0,50 ☐ **c** Montrer l'implication : $x \in solutions(F) \Rightarrow x \equiv 2^{11} [97]$.
- 0,25 ☐ **2** ☐ Montrer l'implication : $x \equiv 2^{11} [97] \Rightarrow x \in solutions(F)$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que l'ensemble des solutions de (F) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{S} = \{ (11 + 97k) \in \mathbb{N} ; k \in \mathbb{N} \}$$

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$f(x) = 2x - e^{-x^2}$$
- ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
- 0,50 ☐ **1 a** Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
- 0,50 ☐ **b** Calculer $f'(x)$; $\forall x \geq 0$ puis dresser le tableau de variations de f .
- 0,50 ☐ **c** Montrer que : $\exists! \alpha \geq 0$; $f(\alpha) = 0$ et $0 < \alpha < 1$.
- 0,50 ☐ **d** Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 **II** ☐ ☐ Soient φ et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt ; \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt ; & x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $(\forall x > 0), (\exists c \in]0, x[) ; \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$
- 0,50 ☐ **b** En déduire que : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que : $g'(x) = f(x)$; $\forall x \geq 0$

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\exists ! \beta \in]\alpha, 1[$; $g(\beta) = 0$.

0,50 ☐ **3** **a** Montrer que la fonction φ est continue à droite en zéro.

0,75 ☐ ☐ **b** Via une intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad \varphi'(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que : $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]$.

0,25 ☐ **4** **a** Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad ; \quad \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x \in]0,1[\quad ; \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$

0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

☐ **5** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite (u_n) est convergente puis donner sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit r l'application définie ainsi : $r : M(z) \mapsto M_1(z_1)$.

$$\text{avec} : z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z + \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)$$

☐☐☐ Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.

$$\text{avec} : z_2 = -2z + 3i$$

☐☐☐ Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

1,00 ☐**1**☐ Déterminer la nature de chacune des applications r et h .

☐**2**☐ Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

☐☐☐ Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

0,50 ☐☐**a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - i)$.

0,25 ☐☐**b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

0,75 ☐**3 a** Donner, en fonction de a , les nbs : $b = \text{aff}(B)$; $c = \text{aff}(C)$; $d = \text{aff}(D)$

0,25 ☐☐**b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

0,50 ☐☐**c** Montrer que : $\Omega = \text{barycentre} \{ (B, 4) ; (C, 2) ; (D, 1) \}$

0,25 ☐☐**d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe réelle)$

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

☐☐☐ On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x * y = x + y - 3xy$.

0,25 ☐**1 a** Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $(1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$.

0,75 ☐☐**b** Montrer que : $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} ; *)$ est un groupe commutatif.

☐**2**☐ Soit l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} ; *) \mapsto (\mathbb{R}^*, \times)$

0,50 ☐☐**a** Montrer que φ est un isomorphisme. $x \mapsto 1 - 3x$

0,25 ☐☐**b** Montrer que : $\varphi^{-1} \left(]0, +\infty[\right) =]-\infty ; \frac{1}{3}[$

0,50 ☐☐**c** Montrer que $(]-\infty ; \frac{1}{3}[; *)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} ; *)$

☐**3**☐ On pose : $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \\ x^{(0)} = 0 \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n .

☐ **4** ☐ Soit : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \top y = x + y - \frac{1}{3}$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 3 : (02,50 points)**

☐ ☐ ☐ Une urne contient 4 boules : une blanche et 3 boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne, On note sa couleur puis la remet à nouveau dans l'urne. On répète le même procédé jusqu'à l'obtention de deux boules successives de la même couleur puis on s'arrête. Soit X la variable aléatoire qui prend le rang où l'expérience s'est arrêtée.

1,00 ☐ **1** ☐ Calculer les probabilités suivantes : $p[X = 2]$ et $p[X = 3]$.

0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $p[X = 2k] = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1} ; k \in \mathbb{N}$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $p[X = 2k + 1] = \left(\frac{3}{16} \right)^k ; k \in \mathbb{N}$

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{1}{2} ; +\infty \right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(2x + 1)}{x} & ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

$$h_a(x) = \left(\ln(1 + 2a) - 2a \right) x^2 - \left(\ln(1 + 2x) - 2x \right) a^2$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 ☐ **2 a** Calculer $h_a(0)$ et $h_a(a)$.

En déduire que : $\exists ! b \in [0, a] ; \frac{\ln(1 + 2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1 + 2b}$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable en zéro et que : $f'(0) = -2$.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que f est dérivable Sur $I^* = I \setminus \{0\}$. puis Montrer que :

$$\forall x \in I^* ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1 + 2x)} ; g(x) = 2x - (1 + 2x) \ln(1 + 2x)$$

0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $\forall x \in I^* ; g(x) < 0$.
0,25	☐ ☐ c	En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I .
0,50	☐ 4 a	Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $\exists ! \alpha \in [1, 2] ; f(\alpha) = 1$.
0,50	☐ ☐ c	Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
	II ☐ ☐	On pose : $(\forall x \in I) ; \varphi(x) = \ln(1 + 2x)$ et $J = [1, \alpha]$.
0,50	☐ 1 a	Montrer que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et que : $(\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$
0,75	☐ ☐ b	Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi(J) \subseteq J$.
	☐ 2 ☐	Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$
0,50	☐ ☐ a	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in J$
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
0,50	☐ ☐ c	En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.
	III ☐ ☐	Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle I ainsi : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$
0,50	☐ 1 a	Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.
0,25	☐ ☐ b	En déduire la monotonie de la fonction F sur l'intervalle I .
0,50	☐ 2 a	Montrer que : $\forall x \geq 1 ; F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(1 + 2t)}{1 + 2t} \right) dt$
0,50	☐ ☐ b	En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$
	☐ 3 ☐	On pose : $\forall x \in \left[\frac{-1}{2} ; +\infty \right[; \begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) & ; \quad \forall x \in I \\ \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right) = \ell = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} F(x) \end{cases}$
0,50	☐ ☐ a	Montrer, (par TAF), que : $(\forall x \in I) ; F(x) - \ell > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x)$
0,50	☐ ☐ b	En déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $\frac{-1}{2}$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2009

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

□□□ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

□□□ Soit : $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} ; (x, y) \in E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

□□□ Soit : $G = \left\{ M(x, 0) \in F ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$

□□□ Soit : $\forall (x, y) ; (a, b) \in E ; (x, y) \perp (a, b) = \left(ax ; bx + \frac{y}{a} \right)$

□□□ Soit l'application définie ainsi : $\varphi : (F, \times) \mapsto (E, \perp)$

$$M(x, y) \mapsto \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

0,25 □ **1 a** Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \times)$.

0,50 □□ **b** Montrer que $(F, \times)$ est un groupe non commutatif.

1,00 □ **2** Montrer que G est un sous-groupe de $(F, \times)$.

0,25 □ **3 a** Calculer : $(1, 1) \perp (2, 3) ; (2, 3) \perp (1, 1)$.

0,50 □□ **b** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,50 □□ **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, \perp)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

I □□ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

□□□ Soit : $(E) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0 ; m \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

0,25 □ **1 a** Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta = ((1 + i)(m - 1))^2$.

0,25 □□ **b** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

0,50 □□ **c** Écrire sous la forme algébrique les valeurs de m pour lesquelles on ait le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

II □□ Soient : $z_1 = 1 - im ; z_2 = m - i ; m = e^{i\theta} ; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

□□□ Soient : $M(m) ; M_1(1 - im) ; M_2(m - i)$.

1,00 □ **1 a** Écrire $z_1 ; z_2$ sous la forme trigonométrique.

0,50 □□ **b** Déterminer l'ensemble : $\{ M \in \mathcal{P} / M ; M_1 ; M_2 \text{ colinéaires} \}$

□ **2** Soit l'application définie ainsi : $\mathcal{R}(\Omega, \psi) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$
 $M(z) \mapsto M'(z') = 1 - iz$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que $\mathcal{R}$ est une rotation, puis donner ses caractéristiques.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer l'équivalence suivante :

$$\operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \in i\mathbb{R}$$

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire l'ensemble : $\{M \in \mathcal{P} \mid \Omega ; M ; M_1 ; M_2 \text{ cocycliques}\}$

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

☐ ☐ ☐ On pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que a_n est un nombre pair pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 ☐ ☐ **b** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on ait $a_n \equiv 0 [3]$.

☐ **2** Soit p un nombre premier positif et supérieur strictement à 3.

0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$; $3^{p-1} \equiv 1 [p]$; $6^{p-1} \equiv 1 [p]$.

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que le nombre p divise le nombre a_{p-2} .

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(\forall q \in \mathbb{P}) ; (\exists n \in \mathbb{N}) ; a_n \wedge q = q$.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \forall x > 0 \\ f_n(0) = 0 & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐ **1 a** Montrer que la fonction f_n est continue en zéro.

0,25 ☐ ☐ **b** Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite en zéro.

1,00 ☐ ☐ **c** Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

1,00 ☐ **2** Étudier la monotonie des fonctions f_1 et f_2 .

0,25 ☐ **3 a** Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2) .

0,50 ☐ ☐ **b** Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_1) et (C_2) .

II ☐ ☐ Soit : $F(x) := \int_{e^x}^1 \left(\frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt$; $\forall x \leq 0$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et que :

$$\forall x < 0 ; \quad F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire le sens des variations de la fonction F sur $] -\infty, 0]$.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x < 0 ; \quad \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$

- 0,25 ☐ ☐ **b** Soit la fonction suivante : $h(x) = x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$
- ☐ ☐ ☐ Montrer que la fonction h est une primitive de f_1 sur $]0, +\infty[$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$
- 0,25 ☐ **3** ☐ On suppose que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$
- III** ☐ Soit : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$; $\forall n \in \mathbb{N}$
- 0,50 ☐ **1** **a** Montrer que : $\forall n \geq 1$; $u_n \geq 0$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer le signe de la quantité $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1, e]$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall n \geq 1$; $u_{n+1} \geq u_n$.
- 0,25 ☐ ☐ **d** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
- 0,50 ☐ **2** **a** Montrer que : $\forall n \geq 1$; $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) u_n$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
- ☐ ☐ ☐ Calculer $\mathcal{A}$ en cm^2 .
- 0,75 ☐ **3** **a** Montrer que : $\forall n \geq 2$; $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n u_n)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- ☐ **4** ☐ Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie ainsi :
- $$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2} \right) v_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ v_1 = a & ; \quad a \neq u_1 \end{cases}$$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Soit : $d_n = |v_n - u_n|$; $n \in \mathbb{N}^*$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \geq 1$; $d_n = \left(\frac{n!}{2^{(n-1)}} \right) d_1$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall n \geq 2$; $\frac{n!}{2} \geq 3^{(n-2)}$
- 0,25 ☐ ☐ **d** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = +\infty$
- 0,25 ☐ ☐ **e** En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est divergente.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2009

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit : $V = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ puis donner une base de cet espace vectoriel V .

0,25 ☐ **2 a** Montrer que V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que $(V, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

0,25 ☐ **3 a** Calculer : $M\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

0,25 ☐☐ **b** L'anneau $(V, +, \times)$ est-il un corps ?

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \in V \Rightarrow X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = \theta$

0,50 ☐☐ **b** On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$ Montrer que X est inversible dans V .

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐ **1** ☐ Soit : $(E) : z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$; $u \in \mathbb{C} \setminus \{(1 - i)\}$

0,25 ☐☐ **a** Développer puis réduire le nombre complexe $(iu - 1 - i)^2$.

0,75 ☐☐ **b** Résoudre ainsi l'équation (E) dans l'ensemble des complexes.

☐ **2** ☐ Soient : $A((1 + i)u - 2i)$; $B((1 - i)u + 2)$; $U(u)$; $\Omega(2 - 2i)$.

☐☐☐ Soit I le milieu du segment $[AB]$ et t la translation définie ainsi :

$$t = t_{\vec{w}} : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ U \mapsto I$$

0,25 ☐☐ **a** Déterminer : $aff(I)$; $aff(\vec{w})$.

☐☐☐ Soit $\mathcal{R}$ la rotation définie ainsi :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(z')$$

- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\mathcal{R}(A) = B$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que les droites (AB) et (ΩI) sont perpendiculaires.
- 0,75 ☐ ☐ **d** Établir un programme de construction des points A et B depuis U .
- ☐ **3** ☐ Soit : $u = a(1 + i) - 2i$; $a \in \mathbb{R}$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Calculer $\text{aff}(\overrightarrow{AU})$; $\text{aff}(\overrightarrow{AB})$ en fonction du nombre réel a .
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que les points A ; B ; U sont colinéaires.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- ☐ ☐ ☐ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
- ☐ ☐ ☐ On dispose de trois urnes : U_1 ; U_2 ; U_3 .
- ☐ ☐ ☐ L'urne U_1 contient une boule rouge et $(n - 1)$ boules noires.
- ☐ ☐ ☐ L'urne U_2 contient une boule rouge et $(n - 2)$ boules noires.
- ☐ ☐ ☐ L'urne U_3 contient une boule rouge et $(n - 3)$ boules noires.
- ☐ ☐ ☐ On désigne au hasard une urne puis on tire au hasard et spontanément deux boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui prend le nombre de boules rouges tirées.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Déterminer les valeurs possibles que cette variable peut prendre.
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $p[X = 2] = \frac{8}{3n(n - 1)}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $p[X = 1] = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$
- 0,75 ☐ ☐ **c** En déduire la loi de probabilité de cette variables aléatoires.
- 0,75 ☐ **3** ☐ Quelle est la probabilité d'un tirage de l'urne U_3 sachant que les deux boules tirées sont blanches.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

- I** ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :
- $$g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$$
- 1,00 ☐ **1** ☐ Étudier la monotonie de g puis dresser son tableau de variations.
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\exists ! \alpha \in]\ln 4 ; \ln 6[$; $g(\alpha) = 0$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
- ☐ **3** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq \alpha$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.
- 0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.
- II** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- 1,00 ☐ **1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- 0,50 ☐ **2 a** Vérifier que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$
- Puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 0,50 ☐ **3** ☐ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 **III** ☐ On considère la fonction définie ainsi :
- $$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1 - e^t}{t^2} \right) dt ; & \forall x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x > 0 ; F(x) = \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) - \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 ; e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt \leq e^{2x} \ln 2$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t} \right) dt$ Puis montrer que F est continue en 0^+
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x > 0 ; F(x) \leq \frac{1 - e^x}{2x}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0,75 ☐ **3** ☐ Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :
- $$\forall x > 0 ; F'(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2$$
- 0,25 ☐ **4 a** Montrer que : $(\forall x > 0), (\exists c \in]0, x[) ; F(x) - F(0) = \frac{-1}{2} x e^{2c}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 ; \frac{-1}{2} e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-1}{2}$
- 0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que F est dérivable à droite en zéro et $F'_d(0) = \frac{-1}{2}$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

I ☐ ☐ Soit : $a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$; $\forall a, b \in I =]0, +\infty[$.

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur I .

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε sur I .

0,50 ☐ **3 a** ☐ Montrer que $(I \setminus \{1\} ; *)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que $]1, +\infty[$ est un sous-groupe du groupe $(I \setminus \{1\} ; *)$.

0,50 ☐ **4 a** ☐ Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à $\times$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

0,50 **II 1** ☐ Calculer : A^2 ; A^3 ; avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

0,25 ☐ **2** ☐ En déduire que la matrice A n'est pas inversible.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,50 ☐ **1 a** ☐ Déterminer les racines carrées du nombres complexe $(3 + 4i)$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$.

☐ **2** ☐ Soient : $A(a)$; $B(b)$; avec $\text{solution}(E) = \{a ; b\}$ et $\text{Re}(a) < 0$.

0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que AOB est un triangle rectangle et isocèle en A .

☐ **3** ☐ Soient : $C(c)$; $D(d)$; $L(\ell)$; $c \neq a$.

☐ ☐ ☐ Soit la rotation $\mathcal{R}\left(C ; \frac{\pi}{2}\right)$ et la translation $t_{\vec{AO}}$.

0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Déterminer c en fonction de d sachant que $D = \mathcal{R}(B)$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Déterminer ℓ en fonction de c sachant que $L = t(D)$.

0,50 ☐ ☐ **c** ☐ Donner sous la forme algébrique, le nombre complexe $\left(\frac{\ell - c}{a - c}\right)$

0,50 ☐ ☐ **d** ☐ En déduire la nature du triangle ACL .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

- 0,75 ☐ **1** ☐ Déterminer les entiers naturels m pour lesquels on ait : $m^2 + 1 \equiv 0 [5]$
- ☐ **2** ☐ Soient : $p \in \mathbb{P}$; $p = 3 + 4k$; $k \in \mathbb{N}$ et $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$; $n \in \mathbb{N}$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $(n^2)^{2k+1} \equiv -1 [p]$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que les nombres n et p sont premiers entre eux.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1 [p]$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** Montrer qu'il n'existerait jamais un $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n^2 + 1 \equiv 0 [p]$.

■ **Exercice Numéro 4 : (05,50 points)**

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$f(x) = 4x e^{-x^2}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- 0,75 ☐ **1** ☐ Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis dresser son tableau de variations. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,50 ☐ **2** ☐ Déterminer une équation pour la demi-droite tangente à (C) en O .
- 0,50 ☐ **3 a** Calculer l'intégrale suivante : $a = \int_0^1 f(x) dx$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$ en cm^2 .
- 0,50 **II** ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$f_n(x) = 4x^n e^{-x^2} ; n \in \mathbb{N} ; n \geq 2$$
- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x > 1 ; e^{-x^2} < e^{-x}$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- 0,50 ☐ **2** ☐ Étudier la monotonie de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\exists ! u_n \in]0, 1[; f_n(u_n) = 1$.
- 0,50 ☐ **4 a** Vérifier que : $\forall n \geq 2 ; f_{n+1}(u_n) = u_n$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et qu'elle converge.
- 0,50 ☐ **5 a** Montrer que : $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 1$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \geq 0 ; \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$

■ **Exercice Numéro 5 : (04,00 points)**

☐☐☐ Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

0,50 ☐☐**1** ☐ Montrer que la fonction F est impaire.

☐☐**2** ☐ On pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$; $\forall x > 0$

0,50 ☐☐**a** Vérifier que : $\forall x > 0$; $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

0,50 ☐☐**b** Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$; $x > 0$

0,50 ☐☐**c** En déduire le sens des variations de la fonction F sur $]0, +\infty[$.

0,50 ☐☐**3 a** Montrer que : $(\forall x > 0) , (\exists c \in]x ; 2x[)$; $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$

0,50 ☐☐**b** En déduire que : $\forall x > 0$; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,50 ☐☐**c** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,25 ☐☐**d** Vérifier que : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$; $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$

0,25 ☐☐**e** En déduire que $F(x) = x$ admet une seule solution dans $]0, +\infty[$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

☐☐☐ Soit $F = \{ M(\ln x) \in E ; x > 0 \}$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{R}, +) \mapsto (E, \times)$
 $x \mapsto M(x)$

0,50 ☐**1**☐ Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 ☐**2a**☐ Montrer que l'application est un isomorphisme.

0,50 ☐☐**b**☐ En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐☐**c**☐ Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$ pour tout réel x .

0,75 ☐☐**d**☐ Résoudre dans E l'équation $A^5 X = B$ avec $A = M(2)$; $B = M(12)$

0,50 ☐**3**☐ Montrer que F est un sous-groupe de $(E, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐**1**☐ Soit : $(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0 ; z \in \mathbb{C}$.

0,50 ☐☐**a**☐ Vérifier que $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E) .

0,50 ☐☐**b**☐ En déduire b la deuxième solution de l'équation (E) .

0,50 ☐**2a**☐ Montrer que : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$.

0,50 ☐☐**b**☐ Écrire a sous la forme exponentielle ou trigonométrique.

☐**3**☐ Soient : $A(a) ; B(b) ; C(c) ; c = 2i + 2e^{\frac{i\pi}{7}}$.

☐☐☐ Soit (Γ) le cercle de centre Ω et $[AB]$ est l'un de ces diamètres.

0,50 ☐☐ **a** Déterminer $\omega = aff(\Omega)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : $O \in (\Gamma)$ et $C \in (\Gamma)$.

0,50 ☐☐ **c** Montrer que : $\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \in i\mathbb{R}$

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

☐☐☐ Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges. On tire au hasard et successivement une après l'autre toutes les boules sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche puis on s'arrête. Soit X la variable aléatoire qui prend le nombre total de boules tirées.

0,50 ☐☐ **1 a** Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X .

0,50 ☐☐ **b** Déterminer les valeurs possibles de X .

0,50 ☐☐ **c** Calculer la probabilité suivante : $p[X = 1]$.

0,25 ☐☐ **d** Montrer que : $p[X = 2] = \frac{5}{33}$

0,50 ☐☐ **e** Calculer la probabilité suivante : $p[X = 3]$.

0,25 ☐☐ **2 a** Montrer que : $E(X) = \frac{13}{11}$

0,50 ☐☐ **b** Calculer $E(X^2)$ puis en déduire $V(X)$.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I ☐☐☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

☐☐☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐☐ **1** Montrer que la fonction f est continue à gauche en 1.

0,50 ☐☐ **2** Étudier la dérivabilité de la fonction f sur I puis dresser le tableau.

0,25 ☐☐ **3 a** Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse : $\frac{e-1}{e}$

0,50 ☐ ☐ **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la demi-droite tangente en 0.

0,75 ☐ **4** ☐ Montrer que : $\exists ! \alpha \in I$; $f(\alpha) = \alpha$.

0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que la fonction f est une bijection de I vers I lui même.

0,25 ☐ **6** ☐ Donner l'expression de la fonction inverse $f^{-1}(y)$; $y \in I$.

II ☐ ☐ On considère la suite définie ainsi :

$$\begin{cases} I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ I_0 = \int_0^1 f(t) dt \end{cases}$$

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge.

0,75 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III ☐ ☐ Pour $x \in J = [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \quad ; \quad F_n(0) = \int_0^x f(t) dt$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k(x) \quad ; \quad F(x) = \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t} \right) dt$$

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (\forall x \in J)$: $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \left(\frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} \right) dt$

0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur l'intervalle J .

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ est croissante pour tout t de l'intervalle $[0,x]$ et $\forall x \in J$.

0,75 ☐ **3 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) , (\forall x \in J)$; $0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{1}{1-x} \right)$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall x \in J)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$

0,25 ☐ **4 a** ☐ Déterminer $F(x)$ en fonction de x de l'intervalle J .

0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer ainsi la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2011

■ Exercice Numéro 1 : (04,50 points)

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I ☐☐☐ 1^{ère} partie : Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^0 = I$; $A^1 = A$

☐☐☐ On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $A^{n+1} = A^n \times A$; $A^2 = A \times A$.

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $A^{2k} = I$.

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que la matrice A est inversible puis déterminer A^{-1} .

0,50 ☐☐☐ On pose : $\forall x, y \in]\alpha, +\infty[= I$: $x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

0,50 **II** ☐ **1 a** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I .

0,50 ☐☐ **b** Montrer que la loi $*$ est associative et commutative sur I .

0,50 ☐☐ **c** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que l'ensemble $(I, *)$ est un groupe commutatif.

☐ **3** ☐ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (I, *) \mapsto (\mathbb{R}_+^*, \times)$

$$x \mapsto \frac{1}{x - \alpha}$$

0,50 ☐☐ **a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

0,50 ☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha$ avec $x^{(3)} = x * x * x$.

■ Exercice Numéro 2 : (02,50 points)

☐☐☐ Soit : $N = \underbrace{111 \dots 1}_{2010 \text{ fois le } 1} \in \mathbb{N}$.

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que N est divisible par le nombre 11.

0,75 ☐ **2 a** Vérifier que 2011 est un nombre premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que 2011 divise le nombre $9N$.

0,50 ☐☐ **c** En déduire que 2011 divise le nombre N .

0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

I ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit : $(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$; $m, z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐ **1** ☐ Vérifier que $z_1 = 2 - m$ est une solution de l'équation (E_m) .

0,50 ☐ **2 a** Montrer l'équivalence : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$.

1,00 ☐ ☐ **b** Déterminer les valeurs de m pour lesquelles on ait : $z_1 z_2 = 1$.

II ☐ ☐ On considère l'application S et la rotation $\mathcal{R}$ définies ainsi :

$$\begin{array}{ll} S : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) & \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(z') & M(z) \mapsto M''(z'') \end{array}$$

☐ ☐ ☐ Avec : $z' = -(z-1) + 1$; $\text{aff}(\Omega) = 1+i$; $\text{aff}(E) = 1$.

0,25 ☐ **1 a** Montrer que S est la symétrie centrale de centre E .

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer l'égalité suivante : $z'' = iz + 2$.

0,50 ☐ **2 a** Quelle est la nature du triangle $AM'M''$.

0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels les points M'' ; M' ; Ω ; A soient des points cocycliques.

■ **Exercice Numéro 4 : (06,00 points)**

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

☐ ☐ ☐ Soit : $(E) : e^x = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$; $n = f(x) \Leftrightarrow x \in \text{solutions}(E)$

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro.

1,50 ☐ **3** ☐ Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

0,75 ☐ **4** ☐ Étudier la monotonie de la fonction f sur $[0,1[$ et $]1, +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0,25 ☐ **5** ☐ Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion qu'on déterminera.

0,50 ☐ **6** ☐ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0,50 ☐ **7** ☐ Montrer que l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n ; b_n dans le cas où $n \geq 3$ et tels que : $1 < a_n < e < b_n$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que $(\forall n \geq 3)$; $b_n \geq n$. En déduire que $(b_n)_{n \geq 3}$ converge
- 0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et qu'elle est convergente.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $\forall n \geq 3$; $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$
- ☐ ☐ ☐ Puis En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
- 0,50 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e$

■ **Exercice Numéro 5 : (03,50 points)**

☐ ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

- 0,50 ☐ **1 a** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 0$; $0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 1$; $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis que :
- $$\forall x \geq 0 ; F'(x) = e^{-2x^2} - 2x F(x)$$

☐ **3** ☐ Soit G la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) & ; \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- 0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $\exists ! c \in]0, +\infty[$; $F'(c) = 0$; $F(c) = \left(\frac{1}{2c}\right) e^{-2c^2}$
- ☐ **4** ☐ Soit : $\forall x > 0$; $H(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right) F'(x)$
- 0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que le nombre c est unique dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** ☐ Puis dresser le tableau de variations de la fonction F .

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2011

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi :

$$\forall x, y \in]0,1[= I \quad ; \quad x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I .

0,50 ☐☐ **b** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur I .

0,50 ☐☐ **c** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0,50 ☐ **2** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

☐ **3** Soient : $K = \left\{ \frac{1}{2^n + 1} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad ; \quad H = \{ 2^n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \}$

0,50 ☐☐ **a** Montrer que H est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}_+, \times)$.

0,50 ☐☐ **b** Soit l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (H, \times) &\mapsto (I, *) \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

☐☐☐ Montrer que l'application φ est un homomorphisme.

0,50 ☐☐ **c** En déduire que $(K, *)$ est un sous-groupe du groupe $(I, *)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (02,50 points)**

☐ **1** Soit x un entier naturel qui vérifie la congruence $10^x \equiv 2 \pmod{19}$.

0,25 ☐☐ **a** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $10^d \equiv 1 \pmod{19} \quad ; \quad d = 18 \wedge (x+1)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : $d = 18$.

0,50 ☐☐ **c** En déduire que : $x \equiv 17 \pmod{18}$.

■ **Exercice Numéro 3 : (04,00 points)**

I ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐ ☐ Soit : $(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C}.$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E) .

0,50 ☐ **2** ☐ Déterminer les nombres complexes α et β qui vérifient :

$$z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0,50 ☐ **3 a** ☐ Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

II ☐ ☐ Soient : $a = -1 + 3i \quad ; \quad b = -2i \quad ; \quad c = 2 + i$

☐ ☐ Soient : $A(a) \quad ; \quad B(b) \quad ; \quad C(c) \quad ; \quad M(z)$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en C

☐ **2** ☐ Soient les rotations suivantes : $\mathcal{R}_1 = r\left(B; \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad \mathcal{R}_2 = r\left(A; \frac{-2\pi}{3}\right)$

☐ ☐ Soient : $M_1 = \mathcal{R}_1(M) \quad ; \quad M_2 = \mathcal{R}_2(M) \quad ; \quad M_1(z_1) \quad ; \quad M_2(z_2) .$

0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Vérifier que l'écriture algébrique de la rotation $\mathcal{R}_1$ est donnée par :

$$z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i$$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Déterminer z_2 en fonction de z .

0,50 ☐ ☐ **c** ☐ En déduire que $I = milieu[M_1M_2]$ est un point fixe (invariant).

■ **Exercice Numéro 4 : (06,00 points)**

☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

1,00 ☐ **1** ☐ Calculer chacune des limites ainsi proposées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

0,50 ☐ **2 a** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ vers J à déterminer.

- 0,25 ☐ ☐ **c** Puis dresser le tableau de variations de la fonction inverse f^{-1} .
- 0,50 ☐ **3** ☐ Tracer les courbes (C) et (C^{-1}) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 ☐ **4 a** Calculer l'intégrale suivante : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Calculer $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C^{-1}) et par les droites d'équations : $x = 1$; $x = e + 1$; $y = x$.
- 0,25 ☐ **5 a** Montrer que $(E) : x + \ln x = n$ admet une seule solution x_n ; $\forall n > 0$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer la valeur numérique de la solution x_1 .
- ☐ ☐ ☐ Puis montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
- 0,50 ☐ **6 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$.
- ☐ ☐ ☐ Puis En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n \leq n$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n} \right)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n - n}{n} \right)$

■ Exercice Numéro 5 : (04,00 points)

☐ ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall n \geq 2, \exists ! \alpha_n \in]0,1[: f_n(\alpha_n) = 0$.
- 0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante puis qu'elle converge.
- 0,50 ☐ **3 a** Vérifier que : $(\forall t \neq 1) : 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la démonstration de l'égalité suivante :
- $$\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \dots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$$
- 0,75 ☐ **4 a** Montrer que : $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \geq 2 : 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1 - e^{-1}$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2012

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

I ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐ ☐ ☐ Soit : $\forall x, y \in]1, +\infty[:= I$; $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

☐ ☐ ☐ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (I, *)$
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

☐ ☐ ☐ On pose : $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

0,75 ☐ **1** ☐ Calculer chacune des expressions suivantes : $(I - A)$; A^2 .

0,50 ☐ **2** ☐ En déduire que la matrice A est inversible puis donner son inverse.

0,25 **II** ☐ **1** ☐ Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur l'ensemble I .

0,50 ☐ **3 a** ☐ Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(I, *)$.

0,75 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que $\mathcal{T} = \{ \sqrt{1+2^m} ; m \in \mathbb{Z} \}$ est un sous-groupe de $(I, *)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I ☐ ☐ Soit : $(E) : i z^2 + (2 - i) a z - (1 + i) a^2 = 0$; $a \in \mathbb{C}^*$; $z \in \mathbb{C}$.

0,75 ☐ **1** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

0,25 ☐ **2 a** ☐ Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2 (i - 1)$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer l'équivalence suivante : $\arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{R}$

II ☐ ☐ Soient : $A(1)$; $B(i+1)$; $C(c)$; $D(ic)$; $M(z)$; $c \in \mathbb{R}^*$; $z \in \mathbb{C}^*$.

0,50 ☐ **1 a** ☐ Montrer que : $(ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic \Leftrightarrow M; A; D \text{ sont colinéaires}$

0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $(ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (AD) \perp (OM)$
	☐ 2 ☐	Soit $H(h)$ le projeté orthogonal du point O sur la droite (AD) .
0,75	☐ ☐ a	Montrer que : $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$
0,25	☐ ☐ b	En déduire que les droites (CH) et (BH) sont perpendiculaires.
■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)		
	☐ 1 ☐	Soit : $(E) : 143x - 195y = 52 ; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$
0,50	☐ ☐ a	Déterminer $195 \wedge 143$, Puis en déduire que (E) est soluble.
0,75	☐ ☐ b	Résoudre (E) sachant que $(-1; -1)$ est une solution particulière.
0,50	☐ 2 ☐	Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; n^{4k} \equiv 1 [5] ; n \in \mathbb{N}^* ; n \wedge 5 = 1$.
	☐ 3 ☐	Soit : $(x, y) \in \mathbb{N}^{2*} ; x \equiv y [4]$.
0,50	☐ ☐ a	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n^x \equiv n^y [5]$.
0,50	☐ ☐ b	En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n^x \equiv n^y [10]$.
0,25	☐ 4 ☐	Soit (x, y) une solution de (E) dans $\mathbb{N}^{2*}$, Montrer que les nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unités dans le système décimal.
■ Exercice Numéro 4 : (05,50 points)		
	☐ ☐ ☐	Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
		$f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n} ; n \in \mathbb{N}^*$
	☐ ☐ ☐	Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$.
0,50	☐ 1 ☐	Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
0,50	☐ 2 a	Étudier les branches infinies de la courbe (C_n) .
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $(D) : y = x$ est une asymptote oblique de (C_n) en $+\infty$
	☐ ☐ ☐	Puis Déterminer la position relative des courbes (C_n) et (D) .
0,75	☐ 3 ☐	Étudier la monotonie de la fonction f_n puis dresser le tableau.
0,50	☐ 4 ☐	Tracer la courbe (C_3) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
0,25	☐ 5 a	Montrer l'implication suivante : $n \geq 3 \Rightarrow \frac{e}{n} < \ln n$
1,00	☐ ☐ b	Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0 ; x_n \leq -\ln n$.

0,50 ☐ ☐ **c** Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$

☐ **6** ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & ; \quad \forall x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que la fonction g est continue à droite en zéro.

0,50 ☐ ☐ **b** Vérifier que : $\forall n \geq 3$; $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$

■ Exercice Numéro 5 : (04,50 points)

☐ ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} & ; \quad \forall x \in]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall x \in [0,1]$; $\forall t \in [0,x]$: $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \in]0,1]$: $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

☐ ☐ ☐ Puis En déduire que F est continue à droite en zéro .

0,75 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\forall x \in [0,1]$; $\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $\forall x \in]0,1]$; $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x \in]0,1]$; $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall x \in]0,1]$; $\frac{-4}{3} \leq \left(\frac{F(x) - F(0)}{x}\right) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

0,25 ☐ ☐ **d** En déduire que F est dérivable à droite en zéro puis donner $F'_d(0)$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2012

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$

☐☐☐ Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$.

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (E, \times)$
 $x \mapsto M(x)$

I ☐☐☐ Soit : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$; $\forall a, b \in I := [1, +\infty[$

0,50 ☐**1**☐ Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I .

0,50 ☐**2**☐ Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative sur I .

0,25 ☐**3**☐ Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre qu'on déterminera

0,50 **II** ☐**1**☐ Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐**2 a**☐ Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,50 ☐☐**b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, \times)$.

0,75 ☐☐**c** Montrer que H est un sous groupe de $(E, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,50 points)**

I ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐**1 a**☐ Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de (E) .

0,75 ☐☐**b** Prouver que la deuxième solution est donnée par : $z_2 = 3z_1$.

II ☐☐☐ On considère les points : $A(a)$; $B(b)$; $\Omega(\omega)$; $P(p)$; $Q(q)$.

☐☐☐ Soient : $r := \text{Rotation}\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$; $P = r(A)$; $B = r(Q)$.

0,75 ☐**1 a**☐ Montrer que : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$; $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b - \omega)$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que : $\left(\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} \right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,50 ☐☐☐ **c** Montrer que : $\left(\frac{p - a}{q - b} \right) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,75 ☐☐☐ **2 a** Montrer que : $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Rightarrow APQB \text{ est un parallélogramme}$

0,75 ☐☐☐ **b** Montrer que : $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Rightarrow \arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

☐☐☐ Puis En déduire que $APQB$ est un parallélogramme.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

☐☐☐ Soit : $(E) : 49x - 6y = 1 ; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

☐☐☐ Soit : $N = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2007}$.

0,50 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que le nombre 503 est un nombre premier.

0,75 ☐☐☐ **b** Montrer que : $7^{502} \equiv 1 [503] \text{ et } 7^{2008} \equiv 1 [503]$.

0,50 ☐☐☐ **2** Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière

0,75 ☐☐☐ **3 a** Montrer que $(7^{2006}, N)$ est une solution de l'équation (E) .

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que : $N \equiv 0 [4] \text{ et } N \equiv 0 [503]$.

0,50 ☐☐☐ **c** Montrer que N est divisible par 2012.

■ Exercice Numéro 4 : (06,00 points)

☐☐☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x}$$

☐☐☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

☐☐☐ Soit (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et $-f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐☐☐ **I 1** Étudier la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,50 ☐☐☐ **2** En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,50 ☐☐☐ **II 1** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

0,50 ☐☐☐ **2** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = e^x g(e^{-x})$

0,50 ☐☐☐ **3** Dresser le tableau des variations de la fonction f .

0,50 ☐ **4** ☐ Tracer les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que : $\forall x \in]-1, 0[; 0 < f'(x) < g(e)$.

0,50 ☐ **6** ☐ Montrer que : $\exists! \alpha \in \mathbb{R} ; f(\alpha) + \alpha = 0$ et $-1 < \alpha < 0$.

☐ **7** ☐ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$.

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$.

0,50 ☐ ☐ **d** Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ sachant que : $g(e) < 0,6$

■ Exercice Numéro 5 : (02,50 points)

☐ ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

0,25 ☐ **1** ☐ Calculer l'intégrale $F(1)$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$; $\forall x > 0$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x > 0 ; F(x) = 0$.

0,50 ☐ **3** ☐ Montrer l'égalité suivante pour tout x dans $]0, +\infty[$:

$$F(x) = \left(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt$$

0,25 ☐ **4** ☐ Montrer que : $\forall x > 0 ; \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$

0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que : $\forall x > 0 ; \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} dt$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2013

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ On rappelle que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.

☐☐☐ On munit $\mathbb{Z}$ par la loi $*$ définie ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad ; \quad x * y = x + y - 2$$

0,50 ☐**1** **a** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,25 ☐☐**b** Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0,50 ☐☐**c** Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.

☐**2** ☐ On munit encore $\mathbb{Z}$ par la loi τ définie ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad ; \quad x \tau y = xy - 2x - 2y + 6$$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi : $f : (\mathbb{Z}, \times) \mapsto (\mathbb{Z}, \tau)$

$$x \mapsto x + 2$$

0,50 ☐☐**a** Montrer que l'application f est un isomorphisme.

0,25 ☐☐**b** Montrer que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \quad ; \quad (x * y) \tau z = (x \tau z) * (y \tau z)$

0,75 ☐**3** ☐ En déduire que $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 ☐**4** **a** Montrer que : $x \tau y = 2 \iff$ ou bien $x = 2$; ou bien $y = 2$

0,25 ☐☐**b** En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ est un anneau intègre.

0,25 ☐☐**c** L'anneau $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ a-t-il une structure de corps ?

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

I ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}^*$

0,25 ☐**1** ☐ Montrer que le discriminant de cette équation est $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$

0,50 ☐**2** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

II ☐☐☐ Soient : $A(a) \quad ; \quad B(b) \quad ; \quad M(z) \quad ; \quad b = a e^{\frac{i\pi}{3}} \quad ; \quad A_1(a_1) \quad ; \quad B_1(b_1) .$

☐☐☐ Soient : $r = \text{Rotation}\left(M, \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad A_1 = r^{-1}(A) \quad ; \quad B_1 = r(B) .$

0,50 ☐**1** ☐ Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0,50 ☐**2** **a** Démontrer les égalités suivantes :

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \quad ; \quad b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\left(\frac{z - b}{z - a}\right) \times \frac{a}{b}$; $M \neq B$; $M \neq A$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\{M; A_1; B_1\}$ colinéaires $\Leftrightarrow \{M; O; A; B\}$ cocycliques

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

☐ ☐ ☐ Soit : $\mathcal{F} = \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} ; 3^n - 2^n \equiv 0 [n] \right\}$

☐ ☐ ☐ Soient $n \in \mathcal{F}$ et p le plus petit nombre premier positif qui divise n

0,75 ☐ **1 a** Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ puis en déduire que $p \geq 5$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ et que $3^{p-1} \equiv 1 [p]$.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; an - b(p-1) = 1$.

0,50 ☐ ☐ **d** Soit la division euclidienne : $a = q(p-1) + r$; $q \in \mathbb{Z}$; $0 \leq r < p-1$

☐ ☐ ☐ Montrer que : $\exists k \in \mathbb{N}^* ; rn = 1 + k(p-1)$.

0,75 ☐ **2** ☐ En déduire finalement que $\mathcal{F} = \emptyset$.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

1^{ère} partie

☐ ☐ ☐ Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} & ; \quad \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,25 ☐ **1 a** Montrer que la fonction h est continue à droite en 1.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 1 ; \ln x < x - 1$.

☐ ☐ ☐ Puis en déduire que h est décroissante sur $]1, +\infty[$.

0,50 ☐ **2 a** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ puis dresser le tableau de variations de h .

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x \geq 1 ; 0 < h(x) \leq 1$.

2^{ème} partie

☐ ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt & ; \quad \forall x > 1 \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

- 0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $\forall x > 1$; $\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t \ln t} \right) dt = \ln 2$
- 0,25 ☐ **b** Vérifier que : $\forall x > 1$; $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt$
- 0,50 ☐ **c** Montrer que : $\forall x > 1$; $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t - 1}{t \ln t} \right) dt$
- 0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x > 1$; $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$
- 0,50 ☐ **b** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 1.
- 0,75 ☐ **c** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et que :
- $$\forall x > 1 \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$
- 0,50 ☐ **b** En déduire que : $\forall x \geq 1$; $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ puis dresser le tableau
- 0,50 ☐ **c** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3^{ème} partie*
- 0,50 ☐ **I 1** Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$.
- 0,25 ☐ **2** En déduire que : $\exists! \alpha > 1$; $1 + g(\alpha) = \alpha$.
- 0,50 ☐ **II** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n < \alpha$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.
- 0,75 ☐ **c** En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |u_0 - \alpha|$.
- 0,25 ☐ **c** Redémontrer le résultat suivant : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2013

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

■ ☐ ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐ ☐ ☐ Soit $E = \left\{ M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ ☐ ☐ On considère l'application définie ainsi :

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \quad G :=]1, 2[$$

☐ ☐ ☐ Pour chaque couple $(x, y) \in G =]1, 2[$ On considère la loi :

$$x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G .

0,75 ☐ **2 a** ☐ Montrer que f est un isomorphisme.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif qu'on en déterminera l'élément neutre.

0,50 ☐ **II 1 a** ☐ Vérifier que $A^3 = \theta$, En déduire que A est un diviseur de zéro $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$.

☐ ☐ ☐ Puis En déduire que $(A + I)$ est inversible puis donner son inverse.

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, donner une base.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐ ☐ ☐ Une urne contient trois boules rouges et 4 boules noires indiscernable au toucher. On tire au hasard et successivement avec remise 4 boules. On considère la variable aléatoire X qui prend le nombre de boules noires tirées de l'urne.

1,00 ☐ **I 1** ☐ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

0,50 ☐ **2** ☐ Calculer $E(X)$ l'espérance mathématiques de la variable X .

II ☐ ☐ On réalise l'expérience aléatoire suivante :

1^{ère} phase : On tire une boule de l'urne puis on note sa couleur et on la remets à nouveau dans l'urne.

2^{ème} phase : On rajoute dans l'urne 5 boules de la même couleur que celles qu'on a tirées dans la première phase.

3^{ème} phase : On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne qui contient maintenant 12 boules.

☐ ☐ ☐ On considère les événements suivants :

$$N = \left\{ \text{La boule tirée dans la 1^{ère} phase est noire} \right\}$$

$$R = \left\{ \text{La boule tirée dans la 1^{ère} phase est rouge} \right\}$$

$$E = \left\{ \text{Toutes les boules tirées dans la 3^{ème} phase sont noires} \right\}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0,50 ☐ **2** ☐ Calculer la probabilité suivante : $p(E)$.

0,50 ☐ **3** ☐ Calculer la probabilité de R sachant que E est vérifié.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I ☐ ☐ Soit : $(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$; $z \in \mathbb{C}$; $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que les solutions de l'équation (E) sont données par :

$$z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} ; \quad z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$

0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $a-1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$; $a = e^{i\theta}$; $0 < \theta < \pi$

1,00 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire sous la forme trigonométrique les solutions z_1 ; z_2 .

II ☐ ☐ Soient : $A(a)$; $B(-i)$; $C(i)$; $B'(1)$; $\operatorname{Re}(a) < 0$.

- 0,50 ☐ ☐ ☐ Soient : $J = \text{milieu}[AC]$; $K = \text{milieu}[AB]$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Calculer : $\text{aff}(J)$; $\text{aff}(K)$ en fonction de a .
- 0,50 ☐ **2** ☐ On considère les rotations : $r_1 = r\left(J, \frac{\pi}{2}\right)$; $r_2 = r\left(K, \frac{\pi}{2}\right)$.
- ☐ ☐ ☐ On pose : $C' = r_1(C)$; $A' = r_2(A)$; $c' = \text{aff}(C')$; $a' = \text{aff}(A')$.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que : $a' = z_1$; $c' = z_2$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ Calculer $\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right)$ En déduire que (AB') est une hauteur de $A'B'C'$.

■ **Exercice Numéro 4 : (08,25 points)**

- ☐ **1** ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que f est continue à droite en zéro. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro .
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis Montrer que :
- $$\forall x > 0 \quad ; \quad f'(x) = \frac{-(x \ln x) (1 + \ln x)}{\sqrt[2]{(1 + (x \ln x)^2)^3}}$$
- 0,50 ☐ ☐ **d** Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- ☐ **2** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C}_F)$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.
- 0,25 ☐ ☐ **a** Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $[e, +\infty[$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall t \geq e \quad ; \quad t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$
- 0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall t \geq e \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right) = 0$

0,50 ☐ ☐ **e** Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexion qu'on déterminera.

1,00 ☐ ☐ **f** Tracer la courbe (C_F) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

☐ **3** ☐ On pose : $\varphi(x) = x - F(x)$; $\forall x \geq 0$.

0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ puis étudier la monotonie de φ .

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! \alpha_n \in [0, +\infty[: \varphi(\alpha_n) = n$.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$, puis calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0,50 ☐ **4** ☐ **a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$ Pensez à TAF

0,50 ☐ ☐ **b** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n} \right)$

■ Exercice Numéro 5 : (01,75 points)

☐ ☐ ☐ On pose : $u_n = \left(\frac{\text{Arctan}(n)}{\text{Arctan}(n+1)} \right)^{n^2}$; $v_n = \ln(u_n)$; $n \in \mathbb{N}^*$

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; v_n = n^2 \left(\ln(\text{Arctan}(n)) - \ln(\text{Arctan}(n+1)) \right)$

0,50 ☐ **2** ☐ En utilisant le théorème de TAF, Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \exists c \in]n; n+1[\quad ; \quad v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\text{Arctan}(c)}$$

0,50 ☐ **3** ☐ Démontrer l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq 1 \quad ; \quad \frac{-n^2}{(1+n^2)\text{Arctan}(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\text{Arctan}(n+1)}$$

0,50 ☐ **4** ☐ Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2014

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ Soit : $a_n = \underbrace{333 \dots 3}_n 1$; $n \in \mathbb{N}^*$

0,50 ☐**1**☐ Vérifier que a_1 ; a_2 sont deux nombres premiers.

0,50 ☐**2**☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

0,75 ☐**3**☐ Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $10^{30k+2} \equiv 7 [31]$.

0,75 ☐**4**☐ Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $3a_{30k+1} \equiv 0 [31]$.

☐☐☐ Puis en déduire que 31 divise a_{30k+1} .

0,50 ☐**5**☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n \equiv 1 [30] \Rightarrow a_n x + 31y = 1$ est insolvable.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

0,50 ☐**1**☐ Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,75 ☐**2**☐ Calculer $J^2 = J \times J$ puis en déduire la stabilité de E dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

☐☐☐ Soit : $A * B = A \times N \times B$; $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐**3 a** Soit la morphisme définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$
 $x + iy \mapsto M(x, y)$

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$; $E^* = E \setminus \{\theta\}$.

0,50 ☐☐**c** Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐**4**☐ Montrer que : $\forall (A, B, C) \in E^3$; $A * (B + C) = A * B + A * C$.

0,75 ☐**5**☐ En déduire que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(E) : z^2 - \sqrt{2} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$; $z \in \mathbb{C}$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

0,25 ☐**1 a** Vérifier que le discriminant de (E) est donné par : $\Delta = (\sqrt{2} i e^{i\theta})^2$

0,75 ☐☐**b** Donner z_1 ; z_2 les solutions de (E) sous la forme trigonométrique

- 0,50 ☐ ☐ **2** Soient : $I(1)$; $J(-1)$; $T_1\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$; $T_2\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$; $A(\sqrt{2} e^{i\theta})$.
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(OA) \perp (T_1 T_2)$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que A ; K ; O sont alignés. Avec $K = \text{milieu}[T_1 T_2]$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(OA) = \text{médiatrice}[T_1 T_2]$.
- 0,25 ☐ **3 a** Donner l'écriture complexe de la rotation $r = \text{rotation}\left(T_1, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $b = \sqrt{2} e^{i\theta} + i$; $b = \text{aff}(B)$; $B = r(I)$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(IJ) \perp (AB)$.
- 0,25 ☐ **4** Déterminer $\text{aff}(C)$; $C = t(A)$; $t = \text{translation}(-\vec{v})$.
- 0,25 ☐ **5** Montrer que : $A = \text{milieu}[BC]$.

■ Exercice Numéro 4 : (08,00 points)

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 0,50 ☐ ☐ **1 a** Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$ et à droite en zéro.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 0,25 ☐ ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\exists \alpha \in]0, 1[$; $f'(\alpha) = 0$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$
- II** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.
- 0,50 ☐ ☐ **1 a** Vérifier que : $\forall t \in [1, +\infty[$; $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$
- 1,00 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x \geq 1$; $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$
- ☐ ☐ ☐ On pourra remarquer que : $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$
- 1,00 ☐ ☐ **c** Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

- 0,50 ☐ **2** **a** Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis donner $F'(x)$; $\forall x \geq 0$
- 0,25 ☐ **b** Étudier la monotonie de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 0,50 **III** **1** **a** Montrer que : $\forall t > 0$; $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$
- 0,25 ☐ **b** Montrer que : $\forall t \geq 0$; $f(t) \leq \frac{1}{e}$
- 0,25 ☐ **c** En déduire que : $\forall x > 0$; $F(x) < x$.
- ☐ **2** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = F(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in]0, 1[\end{cases}$
- 0,50 ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in]0, 1[$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
- 0,50 ☐ **c** Calculer ainsi la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

■ Exercice Numéro 5 : (02,00 points)

☐ **1** ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\left(\frac{1}{x}\right)} & ; \quad \forall x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ☐ **a** Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,25 ☐ **b** Montrer que la fonction g est continue à droite en zéro.

0,25 ☐ **c** Montrer que la fonction g n'est pas continue en zéro.

☐ **2** ☐ On pose : $L(x) = \int_0^x g(t) dt$; $x \in]0, +\infty[$

0,25 ☐ **a** Calculer $L(x)$; $\forall x \in]0, +\infty[$.

0,25 ☐ **b** Montrer que la fonction L est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,25 ☐ **c** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$

☐ **3** ☐ On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = n \left(\left(\frac{1}{1} \right)^2 e^{-n} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^{-\left(\frac{n}{2}\right)} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 e^{-\left(\frac{n}{3}\right)} + \dots + \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 e^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)} \right)$$

0,25 ☐ **a** Montrer que : $\forall n \geq 1$; $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$

0,25 ☐ **b** En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge puis donner sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2014

■ **Exercice Numéro 1 : (02,00 points)**

☐☐☐ On considère trois urnes U ; V ; W . L'urne W contient une boule noire et deux boules blanches. Les urnes U et V contiennent chacune deux boules noires et deux boules blanches. On réalise l'expérience aléatoire suivante : « On tire une boule de l'urne W , si elle est blanche on la remets dans l'urne U , puis on tire de U deux boules d'un seul coup. Si elle est noire on la remets dans V puis on tire de V d'un seul coup deux boules ».

0,25 ☐☐☐ **1** Calculer la probabilité que le tirage soit de l'urne U .

0,75 ☐☐☐ **2** Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

1,00 ☐☐☐ **3** Soit X la variable aléatoire qui prend le nombre de boules blanches obtenues vers la fin de l'expérience.

☐☐☐ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

■ **Exercice Numéro 2 : (01,00 points)**

☐☐☐ On pose : $b_n = 2 \times 10^n + 1$; $c_n = 2 \times 10^n - 1$; $n \in \mathbb{N}^*$.

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ En déduire que : $b_n \wedge c_n = 1$.

0,50 ☐☐☐ **2** Déterminer un couple $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,75 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

I ☐☐☐ On pose : $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$; $\forall a, b \in J :=]-1, 1[$

0,75 ☐☐☐ **1** Vérifier que : $\forall (a, b) \in J^2$; $1 + ab > 0$.

☐☐☐ En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur J .

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que la loi $*$ est une loi commutative et associative.

0,25 ☐☐☐ **b** Déterminer l'élément neutre de l'ensemble $(J, *)$.

0,50 ☐☐☐ **c** Montrer que l'ensemble $(J, *)$ est un groupe commutatif.

II ☐☐☐ Soit : $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$; $\forall x, y \in J$; $g = f^{-1}$.

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (J^*, \perp)$$

$$x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

- 0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que l'application f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J .
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(J^*, \perp)$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ On admetts que $\perp$ est distributive par rapport à $*$ sur l'ensemble J .
- ☐ ☐ ☐ Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

■ Exercice Numéro 4 : (03,25 points)

- I** ☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + i = 0$ soit a une solution.
- 0,50 ☐ **2 a** ☐ Déterminer $|1 + a|$ et $\arg(1 + a)$ sachant que $\operatorname{Re}(a) > 0$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** ☐ Vérifier que : $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$.
- ☐ ☐ ☐ En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $(1 - a)$
- II** ☐ ☐ Soient : $A(a)$; $B(-a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $N(\bar{z})$; $zz' + i = 0$
- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que $(OM') \perp (ON)$.
- 0,25 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $z' - a = i \left(\frac{z - a}{az} \right)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $z \neq -a \Rightarrow z' \neq -a$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $\left(\frac{z' - a}{z' + a} \right) = - \left(\frac{z - a}{z + a} \right)$
- 0,50 ☐ **3** ☐ On suppose dans cette question que les points A ; B ; M ne sont pas alignés, Montrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM .

■ Exercice Numéro 5 : (07,50 points)

- I** ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.
- 1,00 ☐ **1** ☐ Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,75 ☐ **2** ☐ Calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$. Puis Étudier la monotonie de f sur $]0, +\infty[$
- ☐ **3** ☐ Soit g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par :
- $$g_n(x) = f(x) - x^n \quad ; \quad x \in]0, 1[\quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* , \exists ! \alpha_n \in]0, 1[: f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : g_n(\alpha_n) < 0$.

- 0,75 ☐ ☐ **d** Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et convergente
- 0,25 ☐ **4 a** Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) \leq 1$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; h(\alpha_n) = n$; avec $h(x) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1$
- 0,25 ☐ ☐ **d** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = 0$
- 0,25 ☐ ☐ **II 1 a** Étudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t) dt$; $\forall x > 0$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Via une intégration par parties, Montrer la chose suivante :
- $$\forall x > 0 ; \int_x^1 f(t) dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$; $x = e^2$.
- ☐ ☐ ☐ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 .
- ☐ **2** ☐ On pose : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer pour chaque couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$; $n \geq 2$; $1 \leq k \leq n-1$ que :
- $$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$
- 0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 4$
- Exercice Numéro 6 : (02,50 points)**
- ☐ ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 (e^{-t^2}) dt$$
- ☐ **1** ☐ On pose : $k(x) = \int_1^x (e^{-t^2}) dt$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $\forall x \in [0, +\infty[; g(x) = -k(\sqrt{x})$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Calculer $g'(x)$; $\forall x > 0$ puis Étudie la monotonie de g sur $[0, +\infty[$
- 0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x > 0 ; \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que g est dérivable à droite en zéro puis interpréter.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2015

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

- ☐ **1** Soit : $(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$; $z \in \mathbb{C}$
- 0,25 ☐ **a** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E) .
- 0,50 ☐ **b** Déterminer a et b les solutions de l'équation (E) avec $b \in \mathbb{R}$.
- 0,25 ☐ **c** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$.
- ☐ **2** Soit : $A(a)$; $B(b)$; $r = \text{rotation}\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$; $h = \text{homothétie}(A; \sqrt{3})$
- 0,50 ☐ **a** Déterminer $b_1 = \text{aff}(B_1)$ avec $B_1 = r(O)$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que : $B = h(B_1)$.
- 0,50 ☐ **c** Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
- 0,50 ☐ **d** Soit $C(c)$ un point du cercle circonscrit au triangle OAB ; $C \notin \{O, A\}$
- ☐ Déterminer un argument du nombre complexe $\left(\frac{c}{c-a}\right)$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

- ☐ Soit : $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$; $x \in \mathbb{Z}$.
- 0,25 ☐ **1** Sachant que $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, Montrer que $1436 \wedge 2015 = 1$
- ☐ **2** Soit d un diviseur commun de x et 2015.
- 0,50 ☐ **a** Montrer que d divise 1436.
- 0,50 ☐ **b** En déduire que : $x \wedge 2015 = 1$.
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1 [5]$; $x^{1440} \equiv 1 [13]$; $x^{1440} \equiv 1 [31]$.
- ☐ On pourra remarque que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1 [65]$ puis $x^{1440} \equiv 1 [2015]$.
- 0,50 ☐ **4** Montrer que : $x \equiv 1051 [2015]$.

■ **Exercice Numéro 3 : (04,00 points)**

- ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ☐ Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$
- ☐ Soit : $M(x) \circ M(y) = M(x+y+1)$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

☐ **1** ☐ On considère l'application suivante : $\varphi : (\mathbb{R}, +) \mapsto (E, \tau)$

$$x \mapsto M(x - 1)$$

0,50 ☐ **a** Montrer que l'application φ est un homomorphisme.

0,50 ☐ **b** Montrer que (E, τ) est un groupe commutatif.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $M(x) \times M(y) = M(x + y + xy)$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

0,50 ☐ **b** En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

☐ ☐ Et que la loi $\times$ est commutative sur E .

0,50 ☐ **c** Prouver que la loi $\times$ est distributive par rapport à τ dans E .

0,50 ☐ **d** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre de l'ensemble (E, τ) .

☐ ☐ Et que $I = M(0)$ est l'élément neutre pour (E, τ) .

0,25 ☐ **3 a** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$

0,75 ☐ **b** Montrer que $(E, \tau, \times)$ est un corps commutatif.

■ Exercice Numéro 4 : (06,50 points)

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 + (\ln x)^2) & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer puis interpréter les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.

0,50 ☐ **b** Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$

0,50 ☐ **c** Calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$ puis en déduire la monotonie de f .

0,25 ☐ **3 a** Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1} .

0,25 ☐ **b** Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\Delta) : y = x$.

0,50 ☐ **c** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

II ☐ ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = e^{-1} \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $e^{-1} \leq u_n \leq 1$.

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et convergente.

0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $e^{-1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq 1$

0,50 ☐ **b** Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

III ☐ Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

☐ **1** ☐ Soient : $h(x) = x \ln x$; $H(x) = \frac{-1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \ln x$

0,25 ☐ **a** Montrer que H est une primitive de h sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,50 ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0$; $\int_1^x t (\ln t)^2 dt = \frac{(x \ln x)^2}{2} - \int_1^x (t \ln t) dt$

0,50 ☐ **c** En déduire que : $\forall x > 0$; $F(x) = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{(x \ln x)^2}{2}$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,50 ☐ **b** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$

■ Exercice Numéro 5 : (03,50 points)

☐ ☐ ☐ Soit la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ ainsi :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x > 0, \forall t \in [x, 2x] : e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$.

0,50 ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 : e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$.

0,25 ☐ **c** En déduire que g est continue à droite en zéro.

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$; $\forall x > 0$

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall t > 0 : -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$

0,50 ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 : -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$

0,50 ☐ **c** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en zéro.



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2015

■ **Exercice Numéro 1 : (04,00 points)**

I ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐ ☐ ☐ Soit $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐ ☐ ☐ Soit : $x * y = x + y - e^{xy} + 1$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

0,25 ☐ **I a** Montrer que $*$ est une loi commutative sur $\mathbb{R}$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0,50 ☐ **2** ☐ On admet que $3 + x - e^{2x} = 0$, a deux solutions α ; β dans $\mathbb{R}$.

☐ ☐ ☐ Montrer que la loi $*$ n'est pas associative sur $\mathbb{R}$.

0,50 ☐ **II 1** ☐ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que F est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

☐ **3** ☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (F, \times)$$

$$x + iy \mapsto M(x, y)$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F, \times)$.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$; avec $F^* = F \setminus \{M(0, 0)\}$.

0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0,75 ☐ **4** ☐ Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

0,50 ☐ **I 1** ☐ Montrer que : $13 \wedge a = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1 [13]$; $a \in \mathbb{Z}$

☐ **2** ☐ Soit : $(E) : x^{2015} \equiv 2 [13]$; $x \in \mathbb{Z}$.

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $x \in \text{solutions}(E) \Rightarrow x \wedge 13 = 1$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $x \in \text{solutions}(E) \Rightarrow x \equiv 7 [13]$.

- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que $\mathcal{S} = \{7 + 13k ; k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des solutions de (E)
- II** ☐ ☐ Une urne U contient 50 boules numérotées de 1 jusqu'à 50. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Quelle est la probabilité d'obtenir une boule avec un chiffre qui soit solution de l'équation (E) ?
- 0,50 ☐ **2** ☐ On tire au hasard une boule de U , on note son numéro, puis on la range à nouveau dans l'urne. On répète ce procédé 3 fois.
- ☐ ☐ ☐ Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la même boule portant un chiffre qui soit solution de l'équation (E) ?

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

- ☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐ **1** ☐ Soit : (E) : $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$; $z \in \mathbb{C}$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Vérifier que $(1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer $z_1 ; z_2$ les solutions de l'équation (E).
- ☐ ☐ ☐ On prendra la solution z_1 comme étant un nombre imaginaire pur
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} e^{\frac{i3\pi}{4}}$
- ☐ **2** ☐ Soient : $A(z_1)$; $B(z_2)$; $r = \text{rotation}\left(A; \frac{-\pi}{2}\right)$.
- 0,25 ☐ ☐ **a** Déterminer $e = \text{aff}(E)$; $E = \text{milieu}[AB]$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $c = \frac{-3}{2} + i\frac{3}{2}$; avec $c := \text{aff}(C)$ et $C = r(E)$
- 1,00 ☐ ☐ **c** Soit $D(d)$; $d = 1 + \frac{3}{2}i$ un point du plan complexe.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que : $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) \in \mathbb{R}$ puis interpréter le résultat.

■ **Exercice Numéro 4 : (06,00 points)**

☐ ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}} ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

☐ ☐ ☐ Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- 0,75 ☐ **1 a** Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$
- 0,75 ☐ **b** Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 0,25 ☐ **c** Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que le point $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C_n) .
- 0,50 ☐ **b** Tracer la courbe (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,75 ☐ **c** Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = 1$.
- ☐ ☐ ☐ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 .
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \exists ! u_n \in]0, n[: f_n(u_n) = u_n$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
- 0,75 ☐ **c** Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et convergente
- 0,50 ☐ **d** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

■ Exercice Numéro 5 : (04,00 points)

☐ ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt$$

- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que la fonction g est une fonction paire.
- 0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $g'(x)$; $\forall x > 0$.
- 0,50 ☐ **3 a** Via une intégration par parties, Montrer l'égalité suivante :
- $$\forall x > 0 ; \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt = \left(\frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} \right) + \int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2} \right) dt$$
- 0,75 ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 ; |g(x)| \leq \frac{10}{3x}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $\forall x > 0 ; 0 \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \leq 2x$
- ☐ ☐ ☐ On pourra remarquer : $1 - \cos t \leq t ; \forall t > 0$
- 0,50 ☐ **b** Vérifier que : $\forall x > 0 ; g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt$
- 0,50 ☐ **c** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2016

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E, \times)$
 $x + iy \mapsto M(x, y)$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

0,50 ☐ **2** ☐ Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, On ait :

$$M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy' ; xy' + yx')$$

0,25 ☐ **3 a** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,75 ☐☐ **b** Dédire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1, 0)$

0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0,50 ☐ **5 a** Calculer $A \times M(x, y)$ avec $M(x, y) \in E$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

0,50 ☐☐ **b** En déduire que tous les éléments de E ne sont pas inversibles dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

I ☐☐ Soit (a, b) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que 173 divise $(a^3 + b^3)$.

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$ sachant que $171 = 3 \times 57$.

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que : $173/a \Leftrightarrow 173/b$.

0,25 ☐ **3** ☐ Montrer que : $173/a \Rightarrow 173/(a+b)$.

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $173 \text{ ne divise pas } a \Rightarrow a^{172} \equiv b^{172} [173]$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : $173 \text{ ne divise pas } a \Rightarrow b^{171}(a+b) \equiv 0 [173]$.

0,50 ☐☐ **c** En déduire que : $173 \text{ ne divise pas } a \Rightarrow 173/(a+b)$.

II ☐☐ Soit : $(E) : x^3 + y^3 = 173(xy + 1) ; (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- 0,25 ☐ ☐ ☐ Soient : $(x, y) \in \text{solutions}(E)$; $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; $x + y = 173k$; $k \in \mathbb{N}^*$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que $k = 1$ puis en déduire la résolution de (E) .

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

- ☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐ ☐ ☐ Soient : $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; tels que M_1, M_2, O soient non alignés.
- 0,50 ☐ **1 a** ☐ Soit : $M(z)$; $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$ Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que M appartient au cercle circonscrit à OM_1M_2 .
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $z_2 = \bar{z}_1 \Rightarrow M \in (\text{axe réelle})$.
- ☐ **3** ☐ Soient : $r = \text{rotation}(O, \alpha)$; $\alpha \in]0, \pi[$; $M_2 = r(M_1)$; $z_2 = \text{aff}(M_2)$
- 0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Calculer z_2 en fonction de z_1 et α .
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $M \in \text{Médiatrice}[M_1M_2]$.
- ☐ **4** ☐ Soit l'équation : $(G) : 6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$; $\theta \in]0, \pi[$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Vérifier que $z = 2 \left(\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \right)$ sachant que $\{z_1; z_2\} = \text{solutions}(G)$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Écrire z sous sa forme trigonométrique en fonction de θ .

■ Exercice Numéro 4 : (07,00 points)

- 0,50 **I 1** ☐ En appliquant le TAF sur la fonction $\psi(t) = e^{-t}$, Montrer que :
- $$\forall x > 0 ; \exists \theta \in]0, x[: e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$
- 0,25 ☐ **2 a** ☐ En déduire que : $\forall x > 0 ; 1 - x < e^{-x}$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $\forall x > 0 ; x + 1 < e^x$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** ☐ En déduire que : $\forall x > 0 ; 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$
- II** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1 a** ☐ Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ puis interpréter cette limite.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \geq 0 ; x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \leq x$

0,50 ☐ **b** En déduire que : $\forall x \geq 0 ; \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

0,50 ☐ **3 a** Vérifier que : $\forall x > 0 ; \frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) f(x)$

0,75 ☐ **b** En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = \frac{1}{2}$ puis interpréter le résultat.

0,75 ☐ **4 a** Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

0,50 ☐ **b** En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

III ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \ln(f(u_n)) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et convergente.

0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que 0 est la seule solution pour l'équation $\ln(f(x)) = x$.

☐ ☐ ☐ Puis déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

■ Exercice Numéro 5 : (03,00 points)

☐ ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt$$

0,50 ☐ **1 a** Étudier le signe de $F(x)$ sur l'intervalle I .

0,50 ☐ **b** Montrer que F est dérivable sur I puis calculer $F'(x) ; \forall x \in I$.

0,25 ☐ **c** Montrer que F est strictement croissante sur l'intervalle I .

0,50 ☐ **2 a** Par un changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que :

$$\forall x \in I : \int_{\ln 2}^x \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0,50 ☐ **b** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0,25 ☐ **3 a** Montrer que F est une bijection de I vers J qu'on déterminera.

0,50 ☐ **b** Déterminer l'application inverse $F^{-1} : J \mapsto I$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2016

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

□□□ On dispose de deux urnes U et V : l'urne U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. Quant à l'urne V, contient deux boules rouges et 4 boules bleues. On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une boule de l'urne U, si elle est rouge on la range dans l'urne V puis on tire au hasard une boule de V. Si elle est de couleur bleue on la met de côté puis on tire au hasard une boule de l'urne V ». On considère les événements :

- R_U : « la boule tirée de U est rouge »
- B_U : « la boule tirée de U est bleue »
- R_V : « la boule tirée de V est rouge »
- B_V : « la boule tirée de V est bleue »

0,50 □ **1** □ Calculer les probabilités suivantes : $p(R_U)$; $p(B_U)$.

0,50 □ **2 a** □ Calculer la probabilité de B_V sachant que R_U est vérifié.

0,50 □□ **b** □ Calculer la probabilité de B_V sachant que B_U est vérifié.

1,00 □ **3** □ Montrer que : $p(B_V) = \frac{13}{21}$

0,50 □ **4** □ En déduire la probabilité suivante : $p(R_V)$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

□□□ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

□□□ Soit $E = \left\{ M(x + iy) = \begin{pmatrix} x + 2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x - 2y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

□□□ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E, \times)$
 $z \mapsto M(z)$

	☐ ☐ ☐	Soit : $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 ; M(z) * M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$.
1,00	☐ 1 ☐	Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
1,00	☐ 2 a ☐	Montrer que l'application φ est un homomorphisme.
0,50	☐ ☐ b	En déduire que $(E \setminus \{M(0)\}, \times)$ est un groupe commutatif.
1,00	☐ 3 ☐	Montrer que $(E, *, \times)$ est un corps commutatif.
■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)		
	☐ ☐ ☐	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
	☐ 1 ☐	Soit l'équation : $(E) : z^2 - (1 + \sqrt{3})(1 + i)z + 4i = 0 ; z \in \mathbb{C}$
0,50	☐ ☐ a	Vérifier que le discriminant de cette équation est $((\sqrt{3} - 1)(1 - i))^2$
1,00	☐ ☐ b	Écrire sous la forme trigonométrique les solutions de (E) .
	☐ 2 ☐	Soient : $A(a) ; B(b) ; a = 1 + i\sqrt{3} ; b = \sqrt{3} + i$.
	☐ ☐ ☐	Soit : $\mathcal{D} = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} ; z = \frac{a\bar{z}}{2} \right\}$
0,75	☐ ☐ a	Montrer que $\mathcal{D}$ est une droite passant par B .
0,50	☐ ☐ b	Soient : $M(z) ; M'(z') ; z' = a\bar{z} - b ; z \neq b$.
	☐ ☐ ☐	Montrer que : $\frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \frac{2}{ z - b ^2}$
0,75	☐ ☐ c	En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ est la bissectrice de l'angle $(\widehat{BM}, \widehat{BM'})$
■ Exercice Numéro 4 : (06,50 points)		
	☐ ☐ ☐	Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
		$f_n(x) = \ln x - \frac{n}{x} ; n \in \mathbb{N}^*$
	☐ ☐ ☐	Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 1cm$.
0,75	☐ 1 a ☐	Étudier les branches infinies de la courbe (C_n) .
0,75	☐ ☐ b	Étudier la monotonie de f_n sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau
0,50	☐ ☐ c	Construire la courbe (C_2) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
0,50	☐ 2 ☐	Montrer que f_n est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
0,50	☐ 3 a ☐	Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \exists ! \alpha_n \in]0, +\infty[: f_n(\alpha_n) = 0$.
0,50	☐ ☐ b	Comparer les quantités $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x) ; \forall x > 0$.
0,50	☐ ☐ c	Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $\forall x > 0 ; \ln x < x$.

0,50 ☐ **b** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = +\infty$

☐ **5** ☐ On pose : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx ; n \in \mathbb{N}^*$

0,50 ☐ **a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \exists c_n \in [\alpha_n ; \alpha_{n+1}] : I_n = f_n(c_n)$.

0,50 ☐ **b** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

0,50 ☐ **c** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)$

■ Exercice Numéro 5 : (03,50 points)

☐ ☐ ☐ On considère la fonction numérique g_n définie sur $[n, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que g_n est dérivable sur $[n, +\infty[$ puis calculer g'_n ; $\forall x \geq n$

0,25 ☐ **b** Montrer que g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \geq n ; g_n(x) \geq \ln \left(\frac{x-1}{n-1} \right)$

On pourra remarquer que : $\forall t \geq 0 ; \ln(1+t) \leq t$.

0,25 ☐ **b** En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 ☐ **3 a** Montrer que g_n est une bijection de $[n, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

0,50 ☐ **b** En déduire que : $\forall n \geq 2 ; \exists ! u_n \geq n : \int_n^{u_n} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt = 1$

☐ **4** ☐ Soit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie dans les 2 questions précédentes.

0,50 ☐ **a** Montrer que : $\forall n \geq 2 ; \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt$

0,50 ☐ **b** En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 ☐ **c** Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2017

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E^*, \top)$
 $x + iy \mapsto M(x, y)$

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

0,50 ☐☐☐ **2** Soit : $M(a, b) \top M(c, d) = M(a, b) \times A \times M(c, d)$; $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

☐☐☐ Vérifier que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \top)$.

0,75 ☐☐☐ **3 a** Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \top)$.

☐☐☐ Puis En déduire que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$; $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$.

0,75 ☐☐☐ **b** En déduire que $(E^*, \top)$ est un groupe on donnera l'élément neutre.

0,50 ☐☐☐ **4 a** Montrer que la loi $\top$ est distributive par rapport à $+$ dans E .

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que $(E, +, \top)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ **I** Soit : $(E) : 2z^2 - 2(m + 1 + i)z + m^2 + (1 + i)m + i = 0$; $m \in \mathbb{C}^*$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐☐☐ **1** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2im)^2$.

0,50 ☐☐☐ **2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

☐☐☐ **II** On pose : $z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1)$; $z_2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i)$; $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$

☐☐☐ Soient : $A(1)$; $B(i)$; $M(m)$; $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$.

0,25 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$.

0,50 ☐☐☐ **b** Soit : $r = \text{rotation}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$; $\Omega(\omega)$; $\omega = \frac{1+i}{2}$.

☐☐☐ Montrer que : $r(M_2) = M_1$.

- 0,50 ☐ **2 a** Vérifier que : $\left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m}\right) = i \left(\frac{m - 1}{m - i}\right)$
- 0,50 ☐ **b** Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est un diamètre.
- ☐ ☐ **c** Montrer que : $M ; M_1 ; M_2$ alignés $\Rightarrow M \in (\Gamma)$.
- 0,75 ☐ **c** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels On ait :
- $\Omega ; M ; M_1 ; M_2$ soient cocycliques

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

- ☐ ☐ ☐ On admet que 2017 est un nombre premier et $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$
- ☐ ☐ ☐ On pose : $px + y^{p-1} = 2017$; $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; $p \in \mathbb{P}$; $p \geq 5$.
- 0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $p < 2017$.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que p ne divise pas le nombre y .
- 0,75 ☐ **c** Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $p/2016$.
- 0,50 ☐ **d** Montrer que : $p = 7$.
- 1,00 ☐ **2** Résoudre dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation $px + y^{p-1} = 2017$.

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

- I** ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- 0,25 ☐ **1 a** Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.
- 0,50 ☐ **b** Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro.
- 0,50 ☐ **c** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$
- 0,50 ☐ **2 a** Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,25 ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion qu'on déterminera.
- 0,50 ☐ **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
- II** ☐ ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$
- 0,25 ☐ **1** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,50	☐ 2 a	Via une intégration par parties, prouver l'égalité suivante : $\forall x > 0 \quad ; \quad \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}} \right) dt = e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}} \right) dt$
0,25	☐ ☐ b	Calculer $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{\frac{-1}{t}} dt$; $\forall x > 0$
0,50	☐ ☐ c	Montrer que : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{e}$
0,50	☐ 3 ☐	Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = 2$.
	☐ ☐ ☐	Calculer $\mathcal{A}$ en cm^2.
	☐ 4 ☐	Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $u_n = F(n) - F(n+2)$
0,50	☐ ☐ a	Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \exists v_n \in]n, n+2[\quad : \quad u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{\frac{-1}{v_n}}$
0,25	☐ ☐ b	Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\left(\frac{-1}{n} \right)} < u_n < 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{\left(\frac{-1}{n+2} \right)}$
0,25	☐ ☐ c	En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
0,50	☒ 1 a	Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \exists ! \alpha_n > 0 \quad : \quad f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$
0,25	☐ ☐ b	Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante.
0,25	☐ ☐ c	Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \frac{-1}{\alpha_n} + \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha_n} \right) = \frac{-1}{n}$
0,25	☐ 2 a	Montrer que : $\forall t \geq 0 \quad ; \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $\forall x \geq 0 \quad ; \quad \frac{-x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
0,50	☐ 3 a	Vérifier que : $\alpha_4 \geq 1$ et $\alpha_n \geq 1$ On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$.
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$
0,50	☐ ☐ c	Montrer que $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n$ puis calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$
0,50	☐ ☐ d	Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2}{n}} \right)$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2017

■ **Exercice Numéro 1 : (04,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E^*, \times)$

$$x + iy \mapsto M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

0,75 ☐☐☐ **1** Montrer que E est un sous-esp vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ de $\dim = 2$

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,75 ☐☐☐ **3 a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0,75 ☐☐☐ **c** Montrer que $J^{2017} = \varphi(3^{1008}\sqrt{3}i)$ puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*, \times)$.

0,50 ☐☐☐ **4** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ Une urne contient $2n$ boules dont n boules blanches et n boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer au hasard une boule de l'urne et de noter sa couleur puis de la remettre dans l'urne puis de retirer au hasard une nouvelle boule de l'urne et de même noter sa couleur :

- Si les 2 boules tirées sont blanches on gagne alors 20pts.
- Si les 2 boules tirées sont noires on perd alors 20pts.
- Si les 2 boules tirées sont différentes rien n'arrive alors.

0,25 ☐☐☐ **1 a** Calculer la probabilité de gagner 20 points.

0,25 ☐☐☐ **b** Calculer la probabilité de perdre 20 points.

0,25 ☐☐☐ **c** Calculer la probabilité d'un gain nul.

- 0,50 ☐ **2** ☐ On reproduit le même jeu cinq fois,
- 1,00 ☐ **a** ☐ Calculer la probabilité de gagner 100 points.
- ☐ **b** ☐ Calculer la probabilité de gagner 40 points.
- ☐ **3** ☐ Au cours d'une seule partie de ce jeu, On considère la variable aléatoires qui prend les valeurs -20 (perte) et +20 (gain) et 0 (nul)
- 0,50 ☐ **a** ☐ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- 0,25 ☐ **b** ☐ Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

■ Exercice Numéro 3 : (02,50 points)

- ☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐ ☐ ☐ Soient : $M(z)$; $M'(z')$; $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Déterminer z pour lequel on ait $M \equiv M'$ (points identiques) .
- 0,50 ☐ **2** ☐ Soient : $M(z)$; $A(1)$; $B(-1)$; $M \notin \{A, B\}$
- ☐ ☐ ☐ Montrer que : $\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$
- 0,75 ☐ **3** ☐ Montrer que : $M \in (\Delta) := \text{médiatrice}[AB] \Rightarrow M' \in (\Delta)$
- 0,75 ☐ **4** ☐ Soit (Γ) le cercle dont $[AB]$ est un diamètre.
- ☐ ☐ ☐ Montrer l'implication suivante : $M \in (\Gamma) \Rightarrow M' \in (AB)$

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que f est une fonction continue sur l'intervalle I .
- 0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $\forall t \in [0, x]$, $\forall x \in I$; $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$
- 0,50 ☐ **b** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 0$; $\frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq x$
- 0,75 ☐ **c** ☐ Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro.
- 0,50 ☐ **3 a** ☐ Admettant que f est dérivable sur $]0, +\infty[= J$, Calculer $f'(x)$; $\forall x \in J$
- 0,25 ☐ **b** ☐ Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I .

II ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x \geq 0 ; f(x) \leq g(x) \leq 1$.

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que g est dérivable à droite en zéro.

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 ; g'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - g(x))$$

0,25 ☐ **3** ☐ Montrer que g est une fonction décroissante sur l'intervalle I .

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$

☐ ☐ ☐ On pourra remarquer que : $\forall x \geq 0 ; 0 < \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2}$

0,75 ☐ ☐ **b** Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

0,75 **III 1** ☐ Montrer que : $\exists ! \alpha \in [0,1] ; g(\alpha) = \alpha$.

0,50 ☐ **2 a** Vérifier que : $\forall x \geq 0 ; 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x}$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 : |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

☐ **3** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2018

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = M(0, 1)$

☐☐☐ On considère l'application définie par ce qui suit :

$$\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E, \times)$$

$$x + iy \mapsto M(x + y, -y)$$

0,25 ☐☐☐ **1** Montrer que E est un sous groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Montrer que E est un sous - espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$

0,50 ☐☐☐ **3 a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

0,50 ☐☐☐ **4 a** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$; $E^* = E \setminus \{\theta\}$.

0,25 ☐☐☐ **c** En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0,25 ☐☐☐ **5** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ Soit : $p \in \mathbb{P}$; $p = 4k + 3$; $k \in \mathbb{N}^*$.

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer l'implication suivante : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; x^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow x^{p-5} \equiv 1 [p]$

☐☐☐ **2** Soit : $x^{p-5} \equiv 1 [p]$; $x \in \mathbb{Z}$.

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1 [p]$.

0,50 ☐☐☐ **c** Vérifier que : $2 + (k - 1)(p - 1) = k(p - 5)$.

0,50 ☐☐☐ **d** En déduire que : $x^2 \equiv 1 [p]$.

0,50 ☐☐☐ **3** Résoudre ainsi l'équation suivante : $x^{62} \equiv 1 [67]$.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

I ☐☐☐ Soit : $(E_m) : z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$; $z \in \mathbb{C}$

0,25 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

- 0,50 ☐ ☐ **b** Résoudre selon les valeurs du paramètre m l'équation (E_m) .
- 0,50 ☐ **2** ☐ Pour $m = i\sqrt{2}$, Écrire sous la forme exponentiel les solutions de (E_m)
- II** ☐ ☐ Soient : $a = -1 - i$; $\omega = i$; $m' = -im - 1 + i$; $m \in \mathbb{C}$.
- ☐ ☐ On considère les points : $A(a)$; $\Omega(\omega)$; $M(m)$; $M'(m')$
- ☐ **1** ☐ Soit $\mathcal{R}$ la rotation définie ainsi : $\mathcal{R} = rotation\left(H, \frac{-\pi}{2}\right)$.
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que $H \equiv \Omega$ sachant que $\mathcal{R}(M) = M'$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer $b = aff(B)$ avec $\mathcal{R}(B) = A$.
- 0,50 ☐ **2** **a** Vérifier que : $(m' - a) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right)(m - b)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\{A, M, M'\}$ colinéaires $\Leftrightarrow \{A, B, \Omega, M\}$ cocycliques
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que l'ensemble des points M , pour lesquels les points A ; M ; M' soient alignés, est un cercle qu'on déterminera.

■ Exercice Numéro 4 : (07,50 points)

- 0,50 **I 1** **a** Montrer que : $\forall x > 0$; $\int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = x - \ln(1+x)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Par un changement de variable ($u = t^2$), Montrer que :
- $$\forall x > 0 \quad ; \quad \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right) du$$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\forall x > 0$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\right) \leq \frac{1}{2}$
- 0,25 ☐ **2** ☐ Déterminer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\right)$
- II** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
- ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
- 0,25 ☐ **1** **a** Montrer que f est continue à droite en zéro.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable à droite en zéro.
- 0,75 ☐ ☐ **c** Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,50 ☐ **2 a** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Puis montrer que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0,25 ☐ **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

0,25 ☐ **c** Vérifier que : $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

0,50 ☐ **3** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la demi-tangente à droite en zéro.

III ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

0,50 ☐ **b** En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que :

$$g(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$$

0,25 ☐ **c** Montrer que : $\exists! \alpha \in]0, +\infty[: f(\alpha) = \alpha$.

☐ **2** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = a & ; \quad a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

0,25 ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n > 0$.

0,50 ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

0,50 ☐ **c** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$.

0,25 ☐ **d** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers α .

■ Exercice Numéro 5 : (02,50 points)

☐ ☐ ☐ On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

0,50 ☐ **1** Montrer que F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad F(x) \geq x$ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,50 ☐ **b** Montrer que F est une fonction impaire puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

0,50 ☐ **c** Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

0,50 ☐ **d** Montrer que $G := F^{-1}$ est dérivable en zéro puis donner $G'(0)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2018

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (E, \tau) \\ x + iy &\mapsto M(x, y) \end{aligned}$$

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que E est sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que la dimension de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est 2.

0,25 ☐☐☐ **3 a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

☐☐☐ **4** Pour tout couple de matrices $M(x, y)$; $M(x', y')$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose :

$$M(x, y) \tau M(x', y') = M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0)$$

0,25 ☐☐☐ **a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \tau)$.

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, τ) .

0,25 ☐☐☐ **c** Montrer que (E^*, τ) est un groupe commutatif avec $E^* = E \setminus \{\theta\}$.

0,50 ☐☐☐ **5 a** Montrer que τ est distributive par rapport à $+$ sur E .

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \tau)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ On pose : $h(z) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right)$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

0,50 ☐☐☐ **1 a** Montrer l'équivalence suivante : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$.

0,50 ☐☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$.

- 0,75 ☐ **2** ☐ Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\operatorname{Re}(a) = 1$.
- ☐ ☐ Soient : $B(b)$; $A(a)$; $M'(h(z))$; $M(z)$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, a, b\}$.
- 0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\left(\frac{h(z) - a}{h(z) - b} \right) = - \left(\frac{z - a}{z - b} \right)$
- 0,75 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ **a** Montrer que : $\{A, B, M\}$ colinéaires $\Rightarrow \{A, B, M, M'\}$ colinéaires
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\{A, B, M\}$ non-alignés $\Rightarrow \{A, B, M, M'\}$ cocycliques

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- ☐ ☐ ☐ On jette une pièce de monnaie non truquée dix fois successives. On considère la variable aléatoire X qui prend la fréquence d'apparition de Pile, c-à-d le nombre de fois d'apparition de pile divisé par 10.
- 1,00 ☐ **1** ☐ **a** Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X .
- 1,00 ☐ ☐ **b** Calculer la probabilité suivante : $p\left[X = \frac{1}{2}\right]$
- 1,00 ☐ **2** ☐ Calculer la probabilité suivante : $p\left[X \geq \frac{9}{10}\right]$

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

- ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ **a** Montrer que f est continue à droite en zéro.
- ☐ ☐ ☐ On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$
- 0,75 ☐ **2** ☐ **a** Étudier puis interpréter la dérivabilité de f à droite en zéro.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$
- 1,00 ☐ ☐ **c** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- 0,50 ☐ ☐ ☐ En déduire que : $\forall x \in [0,1] ; 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$
- 0,50 ☐ ☐ **d** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
- ☐ **3** ☐ On pose : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt ; \forall x \geq 0$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 1,00 ☐ ☐ **b** Calculer $F'(x)$; $\forall x \geq 0$, puis en déduire la monotonie de F ; $x \geq 0$.
- 0,75 ☐ **4** ☐ **a** Via une intégration par parties, Calculer : $\int_x^1 \sqrt{t}(\ln t) dt ; x > 0$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 ; F(x) = \frac{-2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x} \ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$
- 1,00 ☐ ☐ **c** Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$ en cm^2 .
- ☐ **5** ☐ On pose : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx ; n \in \mathbb{N}^*$
- 1,00 ☐ ☐ **a** Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée et strictement monotone.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer sa limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2019

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \{ x + iy \ ; \ x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ y \in \mathbb{R} \}$

☐☐☐ Soit $G = \{ 1 + iy \ ; \ y \in \mathbb{R} \}$

☐☐☐ Soit $F = \{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \ ; \ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \}$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi : $\varphi : (E, *) \mapsto (F, \times)$
 $x + iy \mapsto M(x^2, y)$

☐☐☐ On considère la loi de composition interne sur $\mathbb{C}$ définie ainsi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x + iy) * (a + ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 ☐☐ **c** Montrer que $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0,25 ☐☐ **d** Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \ : \ \text{Symétrique} \left(x + iy \right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4} i \right) \text{ par } *$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathbb{C}, *)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐ **3** Montrer que $(G, *)$ est un sous-groupe de $(E, *)$

0,25 ☐ **4 a** Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

0,25 ☐☐ **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I ☐☐ Soit l'équation $(E) : z^2 - (1 + i)(1 + m)z + 2im = 0 \ ; \ z \in \mathbb{C} \ ; \ m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,50 ☐☐ **b** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) .

☐ **2** On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta} \ ; \ 0 < \theta < \pi$.

- 0,25 ☐ ☐ **a** Déterminer le module et un argument du nombre $(z_1 + z_2)$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer l'implication suivante : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (z_1 + z_2) = 2i$
- II** ☐ ☐ Soient : $a = 1 + i$; $b = (1 + i)m$; $c = 1 - i$; $r = \text{rotation}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- ☐ ☐ Soient : $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $D = r(B)$; $\Omega = \text{milieu}[CD]$.
- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\omega := \text{aff}(\Omega) = \frac{(1 - i)(1 - m)}{2}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Calculer le nombre complexe $\left(\frac{b - a}{\omega}\right)$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(O\Omega) \perp (AB)$ et $AB = 2 O\Omega$.
- ☐ **2** Soit $H(h)$ le point d'intersection des droites $(O\Omega)$ et (AB) .
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\left(\frac{h - a}{b - a}\right) \in \mathbb{R}$ et $\left(\frac{h}{b - a}\right) \in i\mathbb{R}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire h en fonction de m .

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- ☐ ☐ ☐ On admet que 2969 (Année amazighe) est un nombre premier.
- ☐ ☐ ☐ Soit l'équation $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$; $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
- ☐ **1** On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}) : u \times n \equiv 1 [2969]$. (utiliser Théo de Bezout)
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que $(u \times m)^8 \equiv -1 [2969]$ et $(u \times m)^{2968} \equiv -1 [2969]$.
- ☐ ☐ ☐ On pourra remarquer que : $2969 = 8 \times 371$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que 2969 ne divise pas $(u \times m)$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : $(u \times m)^{2968} \equiv 1 [2969]$.
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que 2969 divise n . (Utiliser tous les résultats précédents)
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer ainsi l'équivalence suivante :

$$(n^8 + m^8) \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } n \equiv 0 [2969] \\ \text{Et bien } m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$$

- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

- 0,50 ☐ **1** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,50 ☐ **2 a** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$

0,75	☐ ☐	b	Étudier la monotonie de f puis dresser son tableau de variations.
0,50	☐ ☐	c	Montrer que : $\exists ! \alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$; $f(\alpha) = 0$ on prendra $e^{3/2} = 4,5$.
0,25	☐ ☐	d	Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$
0,50	☐	3 a	Montrer que : $\exists x_0 \in]0,1[$; $f''(x_0) = 0$ Appliquer Rolle à f' .
0,50	☐ ☐	b	Montrer que : $\forall x \neq x_0$; $x_0 \in [0,1]$: $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ Appliquer TAF à f'' .
0,25	☐ ☐	c	En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
0,50	☐	4 a	Étudier les branches infinies de la courbe (C) .
0,50	☐ ☐	b	Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
0,25	☐	5 a	Vérifier que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[$; $f(x) \leq 0$.
0,75	☐ ☐	b	Montrer que $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 3)}{3}$, En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha < \sqrt{3}$
0,50	☐ ☐	c	Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) et par les axes des abscisses et des ordonnées et par la droite d'équation $x = \alpha$. Calculer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 .
	II ☐ ☐		Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :
			$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) + u_n & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 < \alpha \end{cases}$
0,50	☐	1 a	Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < \alpha$.
0,25	☐ ☐	b	En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
	☐	2	On suppose que $u_0 \geq 0$ et on pose : $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
0,50	☐ ☐	a	Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$, On prendra $\ln 2 = 0,69$.
0,50	☐ ☐	b	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 0$, On pourrait user $f(x) + x = 4x \cdot g(x)$
0,25	☐ ☐	c	Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
0,50	☐ ☐	d	Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
	☐	3	On suppose maintenant que $u_0 < 0$.
0,50	☐ ☐	a	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$.
0,50	☐ ☐	b	Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq u_0 + n f(u_0)$.
0,25	☐ ☐	c	En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2019

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

- ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- I** ☐☐ Soit l'équation : $(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0 ; z \in \mathbb{C} ; \alpha \in \mathbb{C}^*$
- 0,25 ☐**1 a** Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta = \alpha^2$.
- 0,50 ☐☐**b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) . Soient $z_1 ; z_2$ les solutions.
- 0,50 ☐**2** Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle. Avec $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R}$
- II** ☐☐ Soient : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} ; z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} ; \mathcal{R} = \text{rotation}\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$
- ☐**1** On considère les points : $M_1(z_1) ; M_2(z_2) ; \Omega(\alpha)$.
- 0,50 ☐☐**a** Montrer que : $\mathcal{R}(\Omega) = M_1$ et $\mathcal{R}(M_1) = M_2$.
- 0,25 ☐☐**b** En déduire que les triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.
- 0,25 ☐**2 a** Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$.
- 0,50 ☐☐**b** Montrer que : $(\Omega M_2) \perp (OM_1)$.
- 0,25 ☐☐**c** En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.
- 0,50 ☐**3** Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R} ; z = \left(\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha}\right) \div \left(\frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}\right) \in \mathbb{R}$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

- ☐☐☐ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$). On tire au hasard, sans remise, les boules de cette urne l'une après l'autre. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
- 1,00 ☐**1** Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2, 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
- 1,00 ☐**2** Calculer la probabilité que les boules 1, 2, 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas).
- 1,00 ☐**3** Soit X_n la variable aléatoire qui prend le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2, 3.
- ☐☐☐ Déterminer P_{X_n} la loi de probabilité de cette variable aléatoire X_n .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

- ☐☐☐ Soit $(v_2, +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension 2.
- ☐☐☐ Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de v_2 . On pose : $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} ; \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$
- ☐☐☐ On définit sur v_2 la loi de composition interne suivante :
- $$(x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j} ; \forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$$

- 0,25 ☐ **1 a** Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de v_2 .
- 0,25 ☐ **b** Montrer que : $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2$; $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$.
- 0,25 ☐ **c** Montrer l'égalité suivante quelque soient X, X', Y, Y' dans $\mathbb{R}$:
- $$(X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2) * (X' \vec{e}_1 + Y' \vec{e}_2) = XX' \vec{e}_1 + YY' \vec{e}_2$$
- 0,25 ☐ **2 a** Montrer que la loi $*$ est commutative.
- 0,25 ☐ **b** Montrer que la loi $*$ est associative.
- 0,25 ☐ **c** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.
- 0,25 ☐ **d** Montrer que $(v_2, +, *)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- ☐ **3** On pose : $E_{\vec{u}} = \left\{ \lambda \vec{u} ; \lambda \in \mathbb{R} ; \vec{u} \in v_2 \setminus \{\vec{0}\} \right\}$
- 0,25 ☐ **a** Montrer que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(v_2, +)$.
- 0,25 ☐ **b** Montrer que $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(v_2, +, \cdot)$.
- 0,50 ☐ **c** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable par $*$ $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée
- ☐ **4** On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R}^* ; \vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$, Et soit l'application suivante :
- $$\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (E_{\vec{u}}, *)$$
- $$x \mapsto \frac{x}{\alpha} \vec{u}$$
- 0,50 ☐ **a** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.
- 0,25 ☐ **b** En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

I ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)$$

0,25 ☐ **1 a** Prouver les limites suivante : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

0,50 ☐ **b** Montrer que g est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x \in I) ; g'(x) = -2(1+2x) \ln(1+x)$$

☐ **2** On donne le tableau de variations de la fonction g comme suit :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	2			1	
			$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$		$-\infty$

0,50	☐ ☐	a	Montrer que : $\exists! \alpha > 0 ; g(\alpha) = 0$.
0,25	☐ ☐	b	Vérifier que : $\alpha < 1$; on prendra $\ln 2 = 0,7$.
0,50	☐ ☐	c	En déduire que : $\begin{cases} \text{Et bien } \forall x \in]-1, \alpha[; g(x) > 0 \\ \text{Et bien } \forall x \in]\alpha, +\infty[; g(x) < 0 \end{cases}$
	II ☐ ☐		Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$
	☐ ☐ ☐		Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2\text{cm}$.
0,50	☐ 1	a	Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$
0,50	☐ ☐	b	Calculer puis interpréter la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
0,75	☐ 2	a	Montrer que la fonction f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I ; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$
0,50	☐ ☐	b	Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I .
0,75	☐ ☐	c	Vérifier que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ et que $\forall x \in I ; f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$
0,25	☐ 3	a	Donner une équation de (T) , la tangente à $(\mathcal{C})$ en zéro.
0,50	☐ ☐	b	Montrer que : $\forall x \geq 0 ; \ln(1+x) \leq x$.
0,25	☐ ☐	c	En déduire que : $\forall x \geq 0 ; f(x) \leq x$.
1,00	☐ ☐	d	Construire (T) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
	III ☐ ☐		On pose : $J = \int_0^1 f(x) dx$
1,00	☐ 1	a	Via un changement de variable $t = \frac{1-x}{1+x}$ Montrer que $J = \frac{\pi \ln 2}{8}$
0,50	☐ ☐	b	Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et par la droite (T) et l'axe des ordonnées et par la droite d'équation $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$ en cm^2 .
0,50	☐ 2		Via une intégration par parties, Calculer l'intégrale suivante : $K = \int_0^1 \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x} dx$
0,50	☐ 3		Par un changement de variable, Calculer l'intégrale suivante : $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2020

■ **Exercice Numéro 1 : (02,00 points)**

☐☐☐ Soit l'équation : $(D) : 7x^3 - 13y = 5 ; (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

☐**1**☐ Soit (x, y) une solution de (D) .

0,25 ☐☐**a** Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0,25 ☐☐**b** En déduire que $x^{12} \equiv 1 [13]$.

0,50 ☐☐**c** Montrer que : $x^3 \equiv 10 [13]$.

0,50 ☐☐**d** En déduire que : $x^{12} \equiv 3 [13]$.

0,50 ☐**2**☐ Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0 ; 1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐**1**☐ Soit $E = \left\{ N(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^* \right\}$

0,25 ☐☐**a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐**b** Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E .

0,50 ☐☐**c** Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : N(x, y) \times N\left(\frac{-x}{y}, \frac{1}{y}\right) = N\left(\frac{-x}{y}, \frac{1}{y}\right) \times N(x, y) = I$

0,75 ☐**2**☐ Montrer que $(E, \times)$ est un groupe non commutatif.

☐**3**☐ On considère le sous-ensemble F de E défini par :

$$F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

☐☐☐ Soit l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^*, \times) &\mapsto (E, \times) \\ x &\mapsto M(x) \end{aligned}$$

0,50 ☐☐**a** Montrer que l'application φ est un homomorphisme.

0,50 ☐☐**b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F, \times)$

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

☐☐☐ Soit m un nombre complexe non nul.

☐☐☐ **1^{ère} Partie** : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$$

0,50 ☐☐**1** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

(On remarque que m est une solution de l'équation (E))

☐☐**2** ☐ On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de (E) autre que m .

0,25 ☐☐**a** Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0,50 ☐☐**b** Dans le cas où $m = 1 + e^{\frac{i\pi}{3}}$. Écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2

2^{ème} Partie : Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

☐☐☐ Soient les points : $A(a)$; $B(b)$ avec $a = m e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $b = m e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

☐☐☐ Soient les points : $P(p)$; $Q(q)$; $R(r)$.

☐☐☐ Soient : $r_1 = \text{rotation}\left(P; \frac{\pi}{2}\right)$; $r_2 = \text{rotation}\left(Q; \frac{\pi}{2}\right)$; $r_3 = \text{rotation}\left(R; \frac{\pi}{2}\right)$

☐☐☐ Soient : $r_1(O) = A$; $r_2(A) = B$; $r_3(B) = O$

0,50 ☐☐**1** ☐ Montrer que les points $(O; A; B)$ ne sont pas alignés.

0,50 ☐☐**2 a** Montrer que : $p = \frac{m\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i7\pi}{12}}$ et $r = \frac{m\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-i7\pi}{12}}$

0,25 ☐☐**b** Montrer que : $q = m\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

0,50 ☐☐**3** ☐ Montrer que : $OQ = PR$ et $(OQ) \perp (PR)$.

■ **Exercice Numéro 4 : (12,00 points)**

☐☐☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐☐☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

0,75 ☐☐**1** ☐ On appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$, Montrer que :

$$(P) : (\forall x > 0) ; \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0,50 ☐☐**2 a** En utilisant la proposition (P) , Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

- 0,25 ☐ ☐ **b** En utilisant la proposition (P), Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 0,50 ☐ **3** **a** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :
- $$(\forall x > 0) ; f'(x) = 3x^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I .
(On pourra utiliser la proposition (P))
- 0,25 ☐ ☐ **c** Dresser le tableau de variation de f .
- ☐ **4** ☐ On pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x} ; \forall x \in]0, +\infty[$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; g'(x) = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1, 2[$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont : $0 ; \alpha$
- 0,25 ☐ **5** **a** Représenter graphiquement la courbe (C).
(On précisera la demi-tangente à droite en 0 et la branche parabolique de (C))
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que f est une bijection de I vers I .
(On note f^{-1} sa bijection réciproque)

2ème Partie : On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \alpha$.
- 0,50 ☐ **2** **a** Montrer que : $g(]0, \alpha[) =]0, 1[$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
- 0,25 ☐ **3** ☐ Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

3^{ème} Partie : On considère la fonction F définie sur I par :

$$(\forall x \in I) : F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

0,25 ☐ **1 a** Étudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.

0,50 ☐ **b** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I .

0,25 ☐ **c** Et déterminer sa dérivée première F' .

0,50 ☐ **d** En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I .

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; F(x) \leq (1-x) \ln 2$.

0,50 ☐ **b** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,50 ☐ **3 a** En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt$$

0,25 ☐ **b** Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt ; \forall x \in]0, +\infty[$

$$\text{On remarque que : } \frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$$

0,50 ☐ **c** En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[: F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

0,50 ☐ **d** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N} : v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

0,50 ☐ **a** Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,25 ☐ **b** En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{On remarque que : } \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$$

0,50 ☐ **c** Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2020

■ **Exercice Numéro 1 : (02,50 points)**

☐☐☐ Soient p et q deux nombres premiers vérifiant :

$$9^{p+q-1} \equiv 1 [pq] \quad \text{et} \quad p < q$$

0,25 ☐☐☐ **1 a** Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et $9^q \equiv 1[p]$.

0,50 ☐☐☐ **2 a** Montrer que $(p-1)$ et q sont premiers entre eux.

0,50 ☐☐☐ **b** En utilisant le théorème de Bézout, Montrer que : $p = 2$.

0,25 ☐☐☐ **c** En utilisant le théorème de Fermat, Montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$.

0,50 ☐☐☐ **d** En déduire que $q = 5$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

0,50 ☐☐☐ **1 a** 1^{ère} Partie : Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

0,25 ☐☐☐ **b** Déterminer une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Vérifier que : $\forall (x, y, z) ; (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$:

$$M(x, y, z) \times M(x', y', z') = M(xx' - yy' ; xy' + yx' ; zz')$$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

☐☐☐ **2^{ème} Partie** : On considère le sous-ensemble F de E défini ainsi :

$$F = \{ M(x, y, 0) \in E ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

0,25 ☐☐☐ **1 a** Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E, +)$.

☐☐☐ **b** On note φ l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (F, \times) \\ x + iy &\mapsto M(x, y, 0) \end{aligned}$$

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que l'application φ est un homomorphisme.

0,25 ☐☐☐ **c** En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif. ($F^* = F - \{0\}$)

0,50 ☐☐☐ **d** Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif et préciser l'unité.

0,25 ☐ **2 a** Vérifier que : $\forall M(x, y, 0) \in F$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x, y, 0) = \theta$.

0,50 ☐ **b** En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

I ☐ ☐ Soit m un nombre réel non nul.

☐ ☐ On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations ainsi proposées :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$$

$$(F) : z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$$

0,75 ☐ **1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,25 ☐ **2 a** Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure.

0,50 ☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

II ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐ ☐ Soient les points : $A(-1 + im)$; $B(-1 - im)$; $P(p)$; $Q(q)$; $R(r)$.

Soient : $\Omega = \text{milieu}[AB]$; $A' = \text{milieu}[OB]$; $B' = \text{milieu}[OA]$.

Soit : $r_1 = \text{rotation}\left(\Omega; \frac{-\pi}{2}\right)$; $r_2 = \text{rotation}\left(A'; \frac{-\pi}{2}\right)$; $r_3 = \text{rotation}\left(B'; \frac{-\pi}{2}\right)$

Soient : $r_1(A) = P$; $r_2(B) = Q$; $r_3(O) = R$.

0,75 ☐ **1** Montrer que : $p = -1 + m$; $q = \left(\frac{1-i}{2}\right)(-1 - im)$; $r = \bar{q}$

0,25 ☐ **2 a** Vérifier que : $q - r = -ip$.

0,50 ☐ **b** En déduire que : $OP = QR$ et $(OP) \perp (QR)$.

■ Exercice Numéro 4 : (11,00 points)

☐ ☐ **1ère Partie** : On considère la fonction f définie sur $I = [0, 1]$ par :

$$f(x) = x \ln(2 - x)$$

☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐ **1 a** Montrer que la fonction f est dérivable sur I .

0,25 ☐ **b** Et que : $(\forall x \in I)$; $f'(x) = \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$

0,50 ☐ **c** Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I

0,75 ☐ **d** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que :

$$f'(\alpha) = 0 \quad \text{et que} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$$

0,50 ☐ **2 a** Étudier les variations de la fonction f puis donner son tableau.

- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est concave.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall (x, t) \in I^2 : f(x) \leq (x - t) f'(t) + f(t)$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : $(\forall x \in I) ; f(x) \leq x \ln 2$ et $f(x) \leq -x + 1$.
- 0,25 ☐ **3** ☐ Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 ☐ **4** ☐ Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectifs $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.
- ☐ ☐ **2ème Partie** : soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- ☐ ☐ On considère la fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par ce qui suit :
- $$f_n(x) = x^n \cdot \ln(2 - x)$$
- 0,50 ☐ **1 a** Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$.
- 0,75 ☐ **2 a** Montrer que f_n est dérivable sur I et que :
- $$(\forall x \in I) ; f'_n(x) = x^{n-1} \cdot g_n(x) \quad \text{avec} \quad g_n(x) = n \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I .
- 0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que α_n est unique.
- ☐ **3** ☐ On considère la suite numérique $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall n \geq 2 ; f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n} \right)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha_n) = 0$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall n \geq 2 ; g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$.
- 0,25 ☐ ☐ **d** En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
- 0,25 ☐ ☐ **e** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.
- 0,50 ☐ ☐ **f** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 1$
- ☐ ☐ **3ème Partie** : On pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx ; \forall n \in \mathbb{N} ; n \geq 2$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et qu'elle est convergente
- 0,50 ☐ **2** ☐ En utilisant une intégration par parties, Montrer que :
- $$I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx$$
- 0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) = 0$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
BOULMANE 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐**1** Soient $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

0,50 ☐☐**a** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,50 ☐☐**b** Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel E .

0,50 ☐☐**2 a** Montrer que $J^2 \in E$ puis déduire que E est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 ☐☐**b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

0,75 ☐☐**c** Montrer que : $M(a, b)$ est diviseur de zéro dans $E \iff a^2 - 4b^2 = 0$

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(E) : z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$; $a \in \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐☐**1** Soient z_0 ; z_1 les solutions de (E) , Montrer les prédicats suivants :

$$\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad ; \quad |z_0| \cdot |z_1| = 1$$

0,50 ☐☐**2 a** Montrer que : $a = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$; $z_0 = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$

0,50 ☐☐**b** En déduire que : $z_0 = i \implies 1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$

☐☐**3** On suppose dans cette question que : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

0,50 ☐☐**a** Écrire z_1 sous les formes algébrique et trigonométrique.

0,50 ☐☐**b** En déduire les valeurs des rapports suivants : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

0,25 ☐☐**c** Écrire a sous les formes algébrique et trigonométrique.

☐☐**4** On considère la transformation du plan complexe définie ainsi :

$$\mathcal{R} : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

$$M(z) \mapsto M\left(z' = iz + \sqrt{2} e^{\frac{-i\pi}{6}}\right)$$

- 0,50 ☐ ☐ ☐ Soient : $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $a = e^{\frac{i\pi}{12}}$; $b = e^{\frac{i\pi}{4}}$; $C = \mathcal{R}(B)$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que $\mathcal{R}$ est une rotation qu'on déterminera.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Vérifier que : $(c - a) = i(b - a)$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** On pose $D = \mathcal{R}(C)$, Montrer que A est le milieu du segment $[BD]$

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- 1,00 **I** ☐ ☐ ☐ On considère l'équation (G) : $27x - 31y = 1$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
- 0,50 ☐ ☐ ☐ Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (G) est :
- $$\left\{ (31k - 8 ; 27k - 7) ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$
- 0,50 **II** ☐ ☐ ☐ On définit explicitement l'ensemble E ainsi : $E = \{0, 1, 2, 3 \dots, 30\}$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Déterminer le seul élément de E qui vérifie $27a \equiv 1 [31]$.
- ☐ **2** ☐ Soit $r(n)$ le reste de la division euclidienne de $27n + 4$ par 31.
- ☐ ☐ ☐ Soit f l'application définie ainsi :
- $$\begin{aligned} f : E &\mapsto E \\ n &\mapsto r(n) \end{aligned}$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que l'application f est injective de E vers E .
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que l'application f est surjective de E vers E .
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que f est une bijection de E vers E , Puis donner f^{-1} .

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

- I** ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = (x + 1) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} & ; \quad x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ f(-1) = 1 & ; \quad f(0) = e \end{cases}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
- 0,25 ☐ **1** **a** Montrer que : $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$; $f(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Étudier la continuité de la fonction f en zéro et à droite en -1
- 0,50 ☐ **2** **a** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$; $f(x) - x = x \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Calculer puis interpréter la limite : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \right)$

0,50	☐ 4 a	Montrer que : $\forall x \geq \frac{-1}{2}$; $\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$
0,25	☐ b	Montrer que : $\forall t \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[$; $\frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$
0,50	☐ c	Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[$; $\left \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t} \right) dt \right \leq \frac{2}{3} x ^3$
0,25	☐ d	En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) = \frac{-1}{2}$
0,50	☐ e	En déduire que la fonction f est dérivable en zéro et que $f'(0) = \frac{e}{2}$
0,25	☐ 5 a	Étudier la monotonie de g définie ainsi : $g(x) = x - \ln(1+x)$
	☐ b	Puis En déduire que : $\forall x > -1$; $g(x) \geq 0$.
0,50	☐ b	Montrer que : $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$
0,25	☐ c	En déduire le sens de variations de la fonction f .
1,00	☐ 6	Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
	☐ II	Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ ainsi : $F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$
0,25	☐ 1 a	Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $f(x) \geq x$.
0,25	☐ b	En déduire que : $\forall x \geq 0$; $F(x) \geq \frac{x}{2}$
0,25	☐ c	Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
0,50	☐ 2 a	Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$; $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$
0,25	☐ b	Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$
	☐ c	Puis montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$; $F'(x) = \frac{1}{x} \left(f(x) - F(x) \right)$
0,50	☐ c	Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$; $e \leq F(x) \leq f(x)$
0,25	☐ d	En déduire que F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
	☐ III	Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt$
0,25	☐ 1 a	Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
0,25	☐ b	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \geq e$
0,25	☐ 2 a	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$
0,25	☐ b	En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$
0,25	☐ c	Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Beni Mellal 2008

■ **Exercice Numéro 1 : (02,00 points)**

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; \frac{t^3 + t}{t + 1} = t^2 - t + 2 - \frac{2}{t + 1}$

1,00 ☐ **b** Calculer l'intégrale suivante : $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} \right) dx$

0,75 ☐ **2** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie ainsi :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} \right)$$

☐ ☐ ☐ Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente puis calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐ ☐ ☐ Soit $x \in]0, +\infty[$ Et on considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} (E) : y'' + 2y' + 2y = (x+1)^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ (F) : y'' + 2y' + 2y = 0 \end{cases}$$

0,75 ☐ **1** Résoudre l'équation différentielle (F).

☐ **2** Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x (t \ln t) dt$

1,00 ☐ **a** Montrer que f est une solution particulière de l'équation (E).

0,75 ☐ **b** Montrer que : y est solution de (E) $\Leftrightarrow (y - f)$ est solution de (F)

0,50 ☐ **c** En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

■ **Exercice Numéro 3 : (05,50 points)**

☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,2]$ par :

$$f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{x+2})$$

☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

0,50 ☐ **1 a** Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f .

0,50 ☐ **b** Vérifier que : $\forall x \in [1,2] ; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$

0,50 ☐ **c** Montrer que : $\forall x \in [1,2] ; \text{Arctan}(x) \leq x$.

1,00 ☐ **d** En déduire que : $\exists! \alpha \in [1,2] ; f(\alpha) = \alpha$

☐ **2** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

0,50 ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [\alpha, 2]$

0,50 ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

1,00 ☐ **c** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

1,00 ☐ **d** Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

■ Exercice Numéro 4 : (04,50 points)

☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} e^{-t^2} \right) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = \ln 2 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + 1 \leq e^x$

0,50 ☐ **b** En déduire que : $\forall t > 0 ; \left(\frac{1}{t} - t \right) \leq \left(\frac{1}{t} e^{-t^2} \right) \leq \frac{1}{t}$

0,50 ☐ **c** Montrer que : $\forall x > 0 ; \left(\ln 2 - \frac{3}{2} x^2 \right) \leq f(x) \leq \ln 2$

0,50 ☐ **d** Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

1,00 ☐ **2 a** Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

☐ ☐ ☐ Puis Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x} \left(1 - e^{3x^2} \right)$

0,50 ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 ☐ **3 a** Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ vers J à déterminer.

1,00 ☐ **b** Construire les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

■ **Exercice Numéro 5 : (05,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐**1**☐ Soit l'équation : $(E) : z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐☐**a** Montrer que (E) admet une solution z_0 imaginaire pure.

1,00 ☐☐**b** Déterminer les deux autres solutions z_1 ; z_2 avec $\Im m(z_1) > 0$.

0,75 ☐☐**c** Déterminer les entiers naturels n pour lesquels on ait :

$$(z_1 - z_0)^n \in \mathbb{R}^-$$

☐**2**☐ Soient : $A(i)$; $B(2 + 3i)$; $C(2 - 3i)$; $r = \text{rotation}\left(B, \frac{\pi}{4}\right)$

0,50 ☐☐**a** Déterminer $\text{aff}(A')$; $A' = r(A)$

0,75 ☐☐**b** Prouver que les points A' ; B ; C sont colinéaires.

0,75 ☐☐**c** Déterminer l'homothétie h de centre B et qui transforme C en A' .

0,75 ☐☐**d** Vérifier que $(h^{-1} \circ r)(A) = C$, Puis donner la forme complexe de $h^{-1} \circ r$

■ **Exercice Numéro 6 : (00,00 points) ++**

0,00 ☐☐☐ Pour chaque entier naturel n on pose l'intégrale définie ainsi :

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt$$

0,00 ☐**1**☐ Calculer la dérivée de la fonction u définie par :

$$u(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

0,00 ☐**2**☐ Calculer chacune des intégrales I_0 et I_1 .

0,00 ☐**3**☐ Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

0,00 ☐**4**☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t^2} dt$

0,00 ☐**5**☐ Via une intégration par parties, Montrer la formule suivante :

$$(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2}$$

0,00 ☐**6**☐ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(2n+3)I_{n+2} \leq \sqrt{2} \leq (2n+3)I_n$

0,00 ☐**7**☐ En déduire que la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis donner sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Guelmim 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (02,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $M = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer M est un ensemble non vide.

0,50 ☐☐☐ **2** Montrer que M est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **3** Déterminer l'élément neutre de la loi $\times$ dans M .

0,50 ☐☐☐ **4** La loi $\times$ est-elle commutative sur l'ensemble M ?

0,50 ☐☐☐ **5** Calculer $(A_m)^n$; $\forall m, n \in \mathbb{R}$, en déduire $(A_2)^3$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soient : $A(a)$; $B(1)$; $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} \setminus \{B\} &\mapsto \mathcal{P} \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned} ; \quad z' = \frac{z-a}{z-1}$$

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que : $f(M) = M \Rightarrow (G) : z^2 - 2z + a = 0$; avec $z = aff(M)$

☐☐☐ **2** Soit : $a = 1 + e^{i\theta}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

1,50 ☐☐☐ Déterminer sous la forme trigonométrique les solutions de (G) .

☐☐☐ **3** On suppose dans cette question que $a = -1$.

Soient : $M(z)$; $M'(z')$; $z \neq 1$; $f(M) = M'$.

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer l'égalité suivante : $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer l'équivalence suivante : $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.

0,50 ☐☐☐ **c** Donner un programme de construction de M' à partir du point B .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 \equiv 1 [3]$ ou bien $a^2 \equiv 0 [3]$.
- 0,50 ☐ **b** En déduire que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; a^2 + b^2 \equiv 0 [3] \Rightarrow a \equiv b \equiv 0 [3]$
- ☐ **2** Soient : $(x, y, z) \in \mathbb{Z} ; x^2 + y^2 = 3z^2$
- 0,50 ☐ **a** Montrer que $x \equiv y \equiv 0 [3]$ et que $3z^2 \equiv 0 [9]$.
- 0,50 ☐ **b** En déduire que : $x \equiv y \equiv z \equiv 0 [3]$
- ☐ **3** On pose : $a_m = m^2(m^2 - 1) ; m \in \mathbb{N}^*$.
- 0,50 ☐ **a** Prouver la congruence suivante : $a_m \equiv 0 [3]$.
- 0,50 ☐ **b** Prouver la congruence suivante : $a_m \equiv 0 [4]$.
- 0,50 ☐ **c** En déduire la congruence suivante : $a_m \equiv 0 [12]$.

■ **Exercice Numéro 4 : (10,50 points)**

- I** ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$f_m(x) = 2m e^x - e^{2x} - 2m ; m \in \mathbb{R}$$
- ☐ Soit (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- 0,75 ☐ **1** Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f_m(x)}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$
- 0,25 ☐ **2** Étudier la position relative des courbes (C_m) et $(C_{m'})$ avec $m < m'$
- 0,50 ☐ **3** Montrer que toutes les courbes $\{(C_m) ; m \in \mathbb{R}\}$ passent par un même point fixe A que l'on déterminera.
- 0,50 ☐ **4** Montrer que : $m \leq 0 \Rightarrow f_m$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ **5** On suppose dans cette question que $m > 0$.
- 0,25 ☐ **a** Montrer que f_m admet un extremum β_m en α_m et déterminer les.
- 0,50 ☐ **b** Soit : $\Gamma = \left\{ I_m(\alpha_m, \beta_m) ; m \in \mathbb{R}_*^+ \right\}$.
- ☐ Montrer que : $\Gamma = \left\{ M(x, g(x)) ; g(x) = e^{2x} - 2e^x ; x \in \mathbb{R} \right\}$.
- 0,50 ☐ **c** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = -2 - f_1(x)$
- 0,75 ☐ **d** En déduire que (C_1) et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation cartésienne : $(D) : y = -1$
- 0,75 ☐ **6** Déterminer le point d'intersection entre la courbe (C_2) et (D) .
- 0,50 ☐ **7** Construire dans le même repère : $(C_1) ; (C_2) ; (C_{-1}) ; (\Gamma)$.

- 0,50 ☐ **8** ☐ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_2) et (D) est les droites d'équations $x = 0$; $x = \ln 3$.
- 0,50 ☐ **II 1** ☐ Montrer que : $\forall x > 0$; $0 < \left(\frac{g(x) + 1}{x} \right) < g'(x)$
- 0,75 ☐ **2** ☐ En déduire : $\forall x > 0$; $x g'(x) - g(x) > 1$.
- 0,75 ☐ **3** ☐ En déduire que $x \mapsto \frac{g(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- ☐ **4** ☐ Soit G la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t} \right) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ G(0) = -\ln 2 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall x > 0$; $0 < \left(G(x) + \ln 2 \right) \leq \left(g(2x) - g(x) \right)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que la fonction G est dérivable à droite en zéro.
- 0,50 ☐ **5 a** Montrer que : $\forall x > 0$: $G(x) \geq g(x) \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} \right) dt$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{G(x)}{x} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$
- 0,50 ☐ **6 a** Montrer que la fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0$; $G'(x) = \left(\frac{g(2x) - g(x)}{x} \right)$
- 0,25 ☐ **7** ☐ Dresser le tableau des variations de la fonction G .



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Agadir 2009

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a^2 + b^2 = 1 ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 ; M(a, b) \times M(c, d) = M(ac - bd, ad + bc)$

0,50 ☐☐ **b** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

☐ **2** Soit $U = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$, Rappelant que $(U, \times)$ est un groupe commutatif.

☐☐☐ On considère l'application f définie ainsi :

$$f : (U, \times) \mapsto (E, \times)$$

$$x + iy \mapsto M(x, y)$$

0,50 ☐☐ **a** Montrer que f est un isomorphisme de $(U, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,50 ☐☐ **b** En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐ **3** On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; A^{n+1} = A^n \times A ; A^1 = A ; A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

☐☐☐ Écrire A^n en fonction de n .

0,75 ☐ **4** Résoudre dans E l'équation $X^4 = A$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit : $(E) : iz^2 + (1 - i)(1 + ia)z + (a^2 - 1) = 0 ; z \in \mathbb{C} ; a \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

0,50 ☐ **1 a** Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -2i(a + i)^2$.

0,50 ☐☐ **b** En déduire que les solutions de (E) sont $u = i(1 + a) ; v = 1 - a$.

☐ **2** Soient : $A(ia) ; B(u) ; C(v) ; D(v^2) ; E(\omega) ; \omega = \frac{u^2 + a}{1 - i}$

0,75 ☐☐ **a** Déterminer l'ensemble des points $M(a)$ tels que $\{B, C, O\}$ alignés

0,50 ☐☐ **b** Soit : $r = \text{rotation}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, Déterminer Ω sachant que $r(A) = C$.

☐ **3** Dans ce qui suit, on suppose que : $|a| = 1 ; a^2 + (2 + i)a + 1 \neq 0$

- 0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que : $A \neq D$; $A \neq E$; $D \neq E$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que ADE est un triangle rectangle et isocèle en E .
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que les points O ; A ; D ; E sont cocycliques.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

☐ ☐ ☐ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 & ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ a_0 = 17 \end{cases}$$

- 0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \in \mathbb{N}^*$.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n \equiv 7 [10]$.
- 0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$.
- 0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $36^{16} \equiv 36 [100]$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_{4n+2} \equiv 37 [100]$.

■ Exercice Numéro 4 : (09,50 points)

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x \ln x & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 0,50 ☐ **1 a** Montrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ est à droite en 0
- 0,50 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 0,25 ☐ **2 a** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- ☐ **4** ☐ Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{e^{n-1}}{n^n}$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = e^{(f(n)-1)}$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que $(u_n)_{n>0}$ est strictement décroissante et que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$
- 0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (\exists ! v_n \in [1, e]) : f(v_n) = u_n$.
- 0,75 ☐ **6** ☐ Montrer que $(v_n)_{n>0}$ est une suite convergente puis donner sa limite
- ☐ **II** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$, puis calculer $F'(x)$; $\forall x \geq 0$
- 0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$; $F(x) = \frac{3}{4} \left(x^2 - 1 \right) - \left(\frac{x^2}{2} \right) \ln x$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $F(0) = \frac{-3}{4}$
- 0,75 ☐ **3 a** Dresser le tableau de variations de la fonction F .
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\exists ! \alpha > 0$; $4 < \alpha < 5$; $F(\alpha) = 0$.
- 0,50 ☐ **4 a** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Étudier la concavité de $(\mathcal{C})$ et déterminer son point d'inflexion.
- 0,75 ☐ **5** ☐ Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

■ Exercice Numéro 5 : (00,00 points) ++

- ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$$

- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- ☐ ☐ ☐ On pose : $\forall x \in]0, 1]$; $F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t) dt$

- 0,00 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x \in]0, 1]$; $F'(x) = 2 \ln x$

- 0,00 ☐ ☐ **b** Calculer $F(x)$; $\forall x \in]0, 1]$.

- ☐ **2** ☐ Soit $S(\alpha)$; $\alpha \geq 1$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$; $x = \alpha$.

- 0,00 ☐ ☐ **a** Montrer que : $S(\alpha) = F(f(\alpha)) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

- 0,00 ☐ ☐ **b** Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Fès 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

□□□ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

□□□ Soit $G = \left\{ M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

□□□ On considère l'application définie ainsi : $\varphi : (U, \times) \mapsto (G, \times)$
 $e^{i\theta} \mapsto M(\theta)$

0,50 □ **1** □ Montrer que G est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 □ **2** □ Soit : $U = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \right\}$

□□□ Montrer que $(U, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

0,75 □ **3 a** □ Montrer que φ est un isomorphisme de $(U, \times)$ vers $(G, \times)$.

0,50 □□ **b** □ En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

0,50 □ **4** □ Calculer : $(M(\theta))^{-1}$ et $(M(\theta))^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

□□□ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I □□ On pose : $\varphi(z) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right)$; $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

□ **1** □ Soient : $A(2i)$; $B(i)$; $M(z)$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

0,25 □□ **a** □ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; $|\varphi(z)| = \frac{AM}{BM}$

0,25 □□ **b** □ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$; $\arg(\varphi(z)) \equiv \left(\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} \right) [2\pi]$

0,25 □ **2** □ Donner la nature de $E = \{M(z) ; |\varphi(z)| = 1\}$ et $F = \{M(z) ; \varphi(z) \in i\mathbb{R}\}$

0,25 **II 1 a** □ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; $\arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi]$

0,50 □□ **b** □ Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; $|\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|}$

0,25 □ **2** □ Soient : $\mathcal{C} = \text{cercle} \left(B ; \frac{1}{2} \right)$; $\mathcal{C}' = \text{cercle}(B ; 2)$

□□□ Montrer que : $M(z) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow M'(\varphi(z)) \in (\mathcal{C}')$

0,25 □ **3** □ Construire le point M' à partir du point M .

0,50 **III 1** □ Résoudre l'équation $\varphi(z) = z$, soient u et v les solutions $\operatorname{Re}(u) = 1$

□ **2** □ Soient : $M(z)$; $M'(\varphi(z))$; $\mathcal{C}(u)$; $\mathcal{D}(v)$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, u, v\}$

- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\left(\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v}\right) = -\left(\frac{z - u}{z - v}\right)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC}) [2\pi]$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\{D, C, M\} \text{ alignés} \Rightarrow \{D, C, M, M'\} \text{ alignés}$
- 0,25 ☐ ☐ **d** Montrer que : $\{D, C, M\} \text{ non-alignés} \Rightarrow \{D, C, M, M'\} \text{ cocycliques}$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Soit : $z = i + e^{i\theta}$; $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$
- ☐ ☐ ☐ Déterminer le module et un argument de $\varphi(z)$ en fonction de θ .
- Exercice Numéro 3 : (02,00 points)**
- ☐ ☐ ☐ Soit l'équation (E) : $3x - 5y = 13$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Résoudre cette équation dans l'ensembles des entiers relatifs.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Déterminer les solutions (x, y) pour lesquels on ait : $\left(\frac{x}{y}\right) \in \mathbb{Z}$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z} ; (5k + 1) \wedge (3k - 2) = (k - 5) \wedge 13$
- 0,50 ☐ **4** ☐ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système ainsi proposé : $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$
- Exercice Numéro 4 : (04,00 points)**
- ☐ ☐ ☐ Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
- $$\varphi(x) = \sqrt{x} e^{-x}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Étudier la dérivabilité de la fonction φ à droite en zéro.
- 0,50 ☐ **2** ☐ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ puis étudier la monotonie de la fonction φ .
- ☐ **3** ☐ Soit ψ la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$\psi(x) = 2x + \ln x$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall x > 0 ; \varphi(x) = x \Leftrightarrow \psi(x) = 0$
- 0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\exists ! \alpha > 0 ; \alpha \in I = \left] \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right[$ et $\psi(\alpha) = 0$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\varphi(I) \subseteq I$ et $(\forall x \in I) ; |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{8}$
- ☐ **4** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in I \end{cases}$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8} |u_n - \alpha|$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$
- ☐ ☐ ☐ Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- 0,25 ☐ ☐ **c** Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$

■ **Exercice Numéro 5 : (07,00 points)**

I ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall t > 0 ; \ln t \leq t - 1$.

0,50 ☐ **2 a** Montrer que f est continue à droite en zéro.

0,50 ☐ ☐ **b** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro.

0,25 ☐ ☐ **c** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

☐ **3** ☐ Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

0,25 ☐ **4 a** Écrire une équation de la droite (T) la tangente à (C_f) en 1.

0,50 ☐ ☐ **b** Trace dans le même repère la courbe (C_f) et la droite (T) .

0,50 ☐ **5** ☐ Soit $x \in [1, +\infty[$ et on considère la suite numérique définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = 1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

☐ ☐ ☐ Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente puis calculer sa limite

II ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) dt$$

0,50 ☐ **1** ☐ Étudier le sens de variations de la fonction F .

0,50 ☐ **2** ☐ Déterminer le signe de $F(x)$ selon les valeurs de la variable x .

0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall x \in]0, 1] ; 0 \leq \left(\frac{x}{x - \ln x} \right) \leq x$

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x \in]0, 1] ; \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right) \leq F(x) \leq 0$

0,25 ☐ ☐ **c** Puis en déduire aussi que : $\frac{-1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq 0$

0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 1 ; f(x) \geq 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

0,50 ☐ **5 a** Calculer les intégrales : $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) dt ; \int_1^x \left(1 + \ln t \right) dt ; \forall x > 0$

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall t > 0 ; t \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) \leq \left(1 + \ln t \right)$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\forall x \geq 1 ; F(x) \leq x \ln x$

0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que : $\forall x \geq 1 ; \left(x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \right) \leq F(x)$

0,25 ☐ ☐ **e** Interpréter graphiquement l'intégrale : $\int_1^e \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) dt$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Kenitra 2011

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

- ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 0,75 **I** ☐☐☐ Soit l'équation $(E) : z^2 - az + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$; $a \in \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$
- ☐☐☐ Soient : $A(a)$; $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$; $\{z_1, z_2\} = \text{solutions}(E)$
- ☐☐**I** Montrer que : $|z_1| \cdot |z_2| = 1$ et $\left(\arg(z_1) + \arg(z_2)\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
- II** ☐☐☐ On pose : $z_1 = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$.
- 0,75 ☐**I a** En déduire la forme trigonométrique de z_2 en fonction de θ
- 0,50 ☐☐**b** Montrer que : $a = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$
- ☐☐**2** On suppose dans cette question que : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
- ☐☐☐ On considère dans le plan la transformation définie ainsi :

$$F : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$$

$$M(z) \mapsto M'(f(z)) \quad ; \quad f(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$$

- 0,50 ☐☐**a** Déterminer la nature et les caractéristiques de la transformation F
- 0,50 ☐☐**b** Montrer que : $F(M_1) = M_2$.
- 0,50 ☐☐**c** En déduire la nature du quadrilatère OM_1AM_2 .

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

- 0,25 ☐**1** Montrer que le nombre 251 est un nombre premier qui divise 2008
- ☐**2** Soit l'équation $(E) : 2008x + 120y = 8$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
- 0,25 ☐☐**a** Montrer que l'équation (E) est solvable dans $\mathbb{Z}^2$.
- 0,75 ☐☐**b** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .
- ☐**3** On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \underbrace{888 \dots 88}_{n \text{ fois } 8}$
- 0,50 ☐☐**a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{8}{9}(10^n - 1)$
- 0,50 ☐☐**b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \equiv 0 [2008] \Leftrightarrow 10^n \equiv 1 [251]$
- 0,50 ☐☐**c** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 10^k \equiv 1 [251]$
- 0,25 ☐☐**d** En déduire que 2008 admet un multiple sous la forme $888 \dots 8$

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} f : (E, \times) &\mapsto (\mathbb{C}, \times) \\ M(x, y) &\mapsto x + y + iy \end{aligned}$$

0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐☐☐ **2** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **3** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,50 ☐☐☐ **4 a** Montrer que l'application f est un isomorphisme.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que toutes les matrices de $E^* = E \setminus \{\theta\}$ sont inversibles.

0,50 ☐☐☐ **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, +, \times)$.

0,50 ☐☐☐ **d** Montrer pour chaque n de $\mathbb{N}^*$ la chose suivante :

$$(M(0, 1))^n = M\left(-2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) ; 2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

I ☐☐☐ Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$\varphi(x) = (2 - x)e^x - 2$$

0,50 ☐☐☐ **1** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

0,50 ☐☐☐ **2** Étudier la monotonie de φ puis dresser son tableau de variations

0,50 ☐☐☐ **3** Montrer que : $\exists ! \alpha \in [1, +\infty[: \varphi(\alpha) = 0$ et que $1,59 < \alpha < 1,60$

II ☐☐☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐☐☐ Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,25 ☐☐☐ **1** Étudier la continuité de la fonction f en zéro.

0,50 ☐☐☐ **2** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- 0,25 ☐ **3 a** Étudier la dérivabilité de la fonction f en zéro .
- 0,75 ☐ **b** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que on ait :
- $$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \quad f'(x) = \frac{x \varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$$
- 0,50 ☐ **c** Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$, dresser le tableau de variations de f
- 0,25 ☐ **4** Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
- 0,50 ☐ **5** Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- III** ☐ On pose : $G(x) = \int_0^x (t^2 e^{-t}) dt$; $F(x) = \int_0^x f(t) dt$; $\forall x \geq 0$
- 0,50 ☐ **1** Calculer $G(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$
- 0,25 ☐ **2** Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall t \in [\ln 2 ; +\infty[$; $f(t) \leq 2 t^2 e^{-t}$
- 0,50 ☐ **b** En déduire que la fonction F est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$
- IV** ☐ On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$
- 0,75 ☐ **1 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^{p=n} e^{-px}$
- 0,50 ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2 - \alpha)}{n}$
- 0,50 ☐ **c** Calculer l'intégrale suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$
- 0,25 ☐ **d** Déterminer la limite suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$
- 0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\int_0^x f(t) e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=n} I_p(x)$
- 0,50 ☐ **b** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-nt} dt := L_n \in \mathbb{R}$
- 0,25 ☐ **c** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $L - L_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$
- 0,25 ☐ **d** Montrer que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- 0,25 ☐ **e** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie ainsi :
- $$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$$
- ☐ ☐ ☐ Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n) = \frac{L}{2}$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Rabat 2009

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}^* \right\}$

☐☐☐ On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

0,75 ☐ **1** ☐ Calculer $A^2 - 3A + 2I$ En déduire que A est inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

☐ **2** ☐ On considère l'application f définie ainsi :

$$f : (\mathbb{R}^*, *) \mapsto (E, \times)$$

$$a \mapsto M(a)$$

0,75 ☐☐ **a** Calculer : J^2 ; K^2 ; $J \times K$; $K \times J$

0,25 ☐☐ **b** Calculer $M(a)$ en fonction des matrices J et K .

0,50 ☐☐ **c** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que l'application f est un isomorphisme.

0,50 ☐☐ **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, \times)$.

0,25 ☐☐ **c** Puis déterminer l'inverse de la matrice $M(a)$ dans $(E, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^{2*} : a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (b(a + b)) = 1$

☐ **2** ☐ Soit l'équation $(E) : x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^{2*}$

☐☐☐ Soit (x, y) une solution de l'équation (E) avec $d = x \wedge y$.

0,50 ☐☐ **a** Montrer que : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^{2*} ; a(31 - ad) = bd(a + b)$ et $a \wedge b = 1$

0,50 ☐☐ **b** En déduire que le nombre a divise le nombre d .

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $\exists c \in \mathbb{N}^* ; c(a^2 + b^2 + ab) = 31$.

1,00 ☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{Z}^{2*}$ l'équation (E) .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ Soit l'équation : $(E) : z^3 + (5 + i)z^2 + (10 + 2i)z + 8 = 0$; $z \in \mathbb{C}$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

0,25 ☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

☐ **2** On considère les deux applications définies ainsi :

$$r : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$$

$$M(z) \mapsto M_1(z_1)$$

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$$

$$h : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$$

$$M(z) \mapsto M_2(z_2)$$

$$z_2 = \sqrt{2} z$$

0,50 ☐☐ **a** Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de r et h .

0,50 ☐☐ **b** On considère la composition suivante : $F = h \circ r$

☐☐☐ Montrer que : $F(M(z)) = M'(z') \Rightarrow z' = (1 + i)z$

0,50 ☐ **3 a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow OMM'$ est rectangle et isocèle

0,50 ☐☐ **c** Établir un programme de construction du point M' à partir de M .

☐ **4** On considère la suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} A_{n+1} = F(A_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ aff(A_0) = -1 + i \end{cases}$$

0,25 ☐☐ **a** Placer : A_0 ; A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$

0,75 ☐☐ **b** Déterminer la valeur de n pour laquelle on ait O ; A_0 ; A_n alignés.

■ **Exercice Numéro 4 : (03,00 points)**

☐ **1** On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

0,50 ☐☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2 I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

0,50 ☐☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

0,25 ☐ **2** En déduire les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n I_n)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)$

☐ **3** On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $U_n = \left(\frac{2^n}{n!} \right) I_n$

0,25 ☐☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\left(\frac{2^{n-1}}{n!} \right) \leq 1$

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n \leq \left(\frac{2e^2}{n+1} \right)$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n)$

0,50 ☐ **4 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right)$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right)$

■ Exercice Numéro 5 : (07,00 points)

I ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4 \ln x$$

0,50 ☐ **1 a** Étudier la monotonie de la fonction g .

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\exists ! \alpha > 0 ; g(\alpha) = 0$ et $1 < \alpha < 2$

0,25 ☐ ☐ ☐ En déduire le signe de la quantité $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

☐ **2** ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$$

☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonale $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 10cm$.

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que f est dérivable $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$; $\forall x > 0$

0,75 ☐ ☐ **b** Étudier la monotonie de f sur $]0, +\infty[$ puis Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}$$

0,25 ☐ **3 a** Donner une équation de (T) la tangente à (C) en 1.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall x > 0) ; \ln x \leq x - 1$

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $\forall x > 0 ; f(x) - \frac{x-1}{4} \leq (x-1) \left(\frac{4 - (1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2} \right)$

0,50 ☐ ☐ **d** Étudier la position relative de (C) et de (T) .

0,50 ☐ **4** ☐ Construire (C) et (T) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II ☐ ☐ On définit la fonction F sur $]0, +\infty[$ par l'intégrale suivante :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt$$

0,75 ☐ **1** ☐ Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad F'(x) = \frac{(1 - x^2) \ln x}{(1 + x^2)^2}$$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad F(x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) - \operatorname{Arctan}(x) \right) + \frac{x \ln x}{1 + x^2}$

0,50 ☐ **3 a** En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

0,50 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau de variations de la fonction F .

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Inzegane 2007

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que 2003 est un nombre premier.
- 0,75 ☐ **2 a** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $123x + 2003y = 1$
- 0,25 ☐ **b** En déduire un entier naturel k_0 vérifiant $123 k_0 \equiv 1 [2003]$
- 0,50 ☐ **c** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; 123x \equiv 456 [2003] \Leftrightarrow x \equiv 456 k_0 [2003]$
- 0,25 ☐ **d** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence : $123x \equiv 456 [2003]$
- 0,25 ☐ **e** Montrer que : $\exists ! n \in \mathbb{N} ; 123n \equiv 456 [2003] \text{ et } 1 \leq n < 2003$
- ☐ **3** ☐ Soit : $a \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq a < 2003$.
- 0,50 ☐ **a** Montrer que : $\exists m \in \mathbb{N} : am \equiv 1 [2003]$.
- 0,50 ☐ **b** Soit $b \in \mathbb{Z}$, Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax \equiv b [2003]$
- 0,25 ☐ **c** En déduire que : $(2002!)^2 \equiv 1 [2003]$

■ **Exercice Numéro 2 : (02,75 points)**

- ☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ On considère les points : $M(m)$; $N(n)$; $P(p)$.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que : MNP est rectangle en $N \Leftrightarrow i \left(\frac{p-n}{m-n} \right) \in \mathbb{R}^*$
- ☐ **2** ☐ Soient maintenant : $M(z)$; $N(z^2)$; $P(z^4)$; $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{1, -1\}$
- ☐ ☐ ☐ Soit : $\Gamma = \left\{ M(x, y) ; x^2 - y^2 + x = 0 \right\}$
- 0,25 ☐ **a** Vérifier que les points M ; N ; P sont deux à deux différents
- 0,75 ☐ **b** Montrer que : MNP est rectangle en $N \Leftrightarrow M \in (\Gamma) \setminus \{(0,0) ; (-1,0)\}$
- 0,75 ☐ **c** Préciser la nature de (Γ) et ces éléments caractéristiques.
- 0,50 ☐ **d** Construire la courbe (Γ) .

■ **Exercice Numéro 3 : (04,00 points)**

- ☐ ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐☐☐ Soit $E^* = E \setminus \{\theta\}$, Et On considère l'application définie ainsi :

$$\varphi : (E^*, \times) \mapsto (\mathbb{C}^*, \times)$$

$$M(a,b) \mapsto (a-b) + ib\sqrt{2}$$

0,50 ☐☐**1** ☐ Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

0,75 ☐☐**2** **a** ☐ Montrer que pour tout quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, On ait :

$$M(a,b) \times M(c,d) = M\left(ac - 3bd ; ad + bc - 2bd\right)$$

0,75 ☐☐**b** ☐ En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau.

0,50 ☐☐**3** **a** ☐ Montrer que E^* est une partie stable de $(E, \times)$.

0,75 ☐☐**b** ☐ Montrer que φ est un isomorphisme de $(E^*, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

0,75 ☐☐**4** ☐ Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps.

■ Exercice Numéro 4 : (09,75 points)

I ☐☐☐ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

0,75 ☐☐**1** ☐ Étudier la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$.

0,25 ☐☐**2** ☐ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

II ☐☐☐ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right) ; & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐☐☐ Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

0,50 ☐☐**1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,25 ☐☐**2** ☐ Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,75 ☐☐**3** ☐ Étudier la dérivabilité de la fonction f en zéro.

0,75 ☐ **4** ☐ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

0,25 ☐ **5** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,75 ☐ **6** ☐ Montrer que $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

0,50 ☐ **7** ☐ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 ☐ **8 a** ☐ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \exists ! \alpha_n > 0 : f(\alpha_n) = n$

0,75 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n > n$, Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)$

III ☐ On considère la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par l'intégrale suivante :

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$$

0,50 ☐ **1 a** ☐ En utilisant le théorème de la valeur médiane montrer que :

$$\forall x \geq 1 ; \exists c \in [1, x^2] : F(x) = (x^2 - 1) f(c)$$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 1 ; (x^2 - 1) f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1) f(x^2)$

☐ ☐ ☐ En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,50 ☐ ☐ **c** ☐ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)$ En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_F)$ en $+\infty$

0,50 ☐ **2** ☐ Déterminer $F'(x)$ la dérivée, Puis dresser le tableau de variations

0,25 ☐ **3** ☐ Donner l'équation de la demi-droite tangente à $(\mathcal{C}_F)$ en 1

0,50 ☐ **4** ☐ Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

IV ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{f(t)}{t^3} \right) dt$$

0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1 + e^t} \right) dt$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire u_n en fonction de n , Puis calculer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Tanger 2009

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soit $A = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$

☐☐☐ Soit $B = \left\{ N(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}_+^* \right\}$

☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{Z} \right\}$

0,25 ☐☐☐ **1** Montrer que : $I \in A$ et $I \in B$.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Montrer que : $\forall (M(a), M(b)) \in A^2 ; M(a) \times M(b) = M(a + b)$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(A, \times)$ est un groupe commutatif.

0,50 ☐☐☐ **c** Montrer que $(E, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(A, \times)$.

0,50 ☐☐☐ **d** On pose : $\forall M(a) \in A ; (M(a))^{-n} = ((M(a))^{-1})^n ; (M(a))^0 = I$

☐☐☐ Et Encore : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (M(a))^{n+1} = (M(a))^n \times M(a)$

☐☐☐ Écrire $(M(a))^k$ en fonction de a et k ; $\forall k \in \mathbb{Z}$

0,25 ☐☐☐ **3 a** Montrer que B est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(B, \times)$ sont isomorphes.

☐☐☐ Puis en déduire la structure algébriques de l'ensemble $(B, \times)$.

0,25 ☐☐☐ **4** L'ensemble $A \cup B$ est-elle une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$?

■ **Exercice Numéro 2 : (02,50 points)**

☐☐☐ Soient : $p \in \mathbb{P} ; p \neq 2011 ; p \geq 5$.

☐☐☐ Soit l'équation $(E) : px + y^{p-1} = 2011 ; (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

0,25 ☐☐☐ **1** Vérifier que le nombre 2011 est un nombre premier.

☐☐☐ **2** On suppose dans ce qui suit que (x, y) est une solution de (E) .

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que le nombre p ne divise pas le nombre y .

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que P divise 2010 puis déterminer les valeurs possibles de p

0,75 ☐☐☐ **c** Déterminer la solution (x, y) dans le cas où $p = 67$.

0,50 ☐☐☐ **3** Résoudre dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation (E) dans le cas où $p = 5$.

■ **Exercice Numéro 3 : (02,50 points)**

- ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐☐☐ Soit $(E) : z^2 - (3m - 2i)z + 2m^2 - 4mi = 0 ; m \in \mathbb{Z} ; z \in \mathbb{C}$
- 0,50 ☐☐**1** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- ☐☐**2** Soient : $\{z_1 ; z_2\} = \text{solutions}(E) ; |z_1| < |z_2| ; m = (1 + i)$
- 0,50 ☐☐**a** Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
- 0,50 ☐☐**b** Vérifier que $(-z_1)$ est une racine cubique du nombre z_2 .
- ☐☐☐ Puis en déduire sous la forme trigonométriques les deux autres racines cubiques du nombre complexe z_2 .
- ☐☐**3** Soient les points : $A(i) ; B(2m) ; C(m - 2i) ; m \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$
- 0,25 ☐☐**a** Montrer que les points $A ; B ; C$ ne sont pas alignés.
- 0,50 ☐☐**b** Soit D un point situé à l'extérieur de ABC tel que le triangle BCD soit un triangle rectangle et isocèle en D, On prend $d = \text{aff}(D)$
- ☐☐☐ Montrer que : $d = \left(\frac{3m + im - 2 - 2i}{2} \right)$ ou bien $d = \left(\frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \right)$
- 0,25 ☐☐**c** Déterminer m pour laquelle le triangle ABCD soit un carré.

■ **Exercice Numéro 4 : (12,00 points)**

- ☐☐☐**I** Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par :
- $$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$
- ☐☐☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- 0,50 ☐☐**1 a** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ☐☐☐ Puis en déduire les branches infinies de la courbe (C) .
- 0,25 ☐☐**b** Étudier la monotonie de la fonction f puis dresser son tableau.
- 0,50 ☐☐**c** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 0 et $\alpha > 1$
- ☐☐☐ Puis En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- 0,25 ☐☐**d** Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,25 ☐☐**2 a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\} ; \exists ! u_n \in]0, 1[: f(u_n) = \frac{1}{n}$
- 0,25 ☐☐**b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est strictement décroissante.
- 0,25 ☐☐**c** Puis en déduire qu'elle est convergente et donner sa limite.

II ☐ ☐ Soit φ la fonction numérique définie $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{t} & ; \quad \forall t \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ☐ **1 a** Vérifier que la fonction φ est impaire.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^*) ; \varphi'(t) = \frac{1}{t^2} \varphi(t^2)$

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire le tableau de variations de la fonction φ .

0,50 ☐ ☐ **d** Puis Démontrer que : $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

☐ ☐ ☐ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que la fonction g est paire.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $g'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

0,25 ☐ ☐ **c** Dresser le tableau de variations de la fonction g .

0,50 ☐ **3 a** Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^x \left(\frac{2 \ln t}{t} \right) dt$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $g(x) - g(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt ; \quad \forall x \geq 1$

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall x \geq 0 ; \ln(1+x) \leq x$

0,25 ☐ ☐ **d** En déduire que : $\forall x \geq 1 ; 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \leq \frac{1}{2}$

0,50 ☐ ☐ **e** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right)$

☐ ☐ ☐ Puis en déduire la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

0,50 **III** ☐ On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie ainsi : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; \ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$

0,50 ☐ **2** ☐ En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; 2 \ln(k+2) - 3 \ln(1+k) + \ln k < f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,50 ☐ ☐ ☐ Et que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; 2 \ln \left(\frac{k+2}{k+1} \right) - \ln \left(\frac{1+k}{k} \right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,50 ☐ **3** ☐ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln \left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)} \right) < S_n$

0,50 ☐☐☐ En déduire encore la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$

IV ☐☐ Soit x un élément de l'intervalle $]0,1[$.

0,25 ☐**1**☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k x^k \right) + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{1+x}$

0,25 ☐**2**☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$

0,25 ☐**3**☐ En déduire l'identité suivante :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) (2k-1) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt + \left(\frac{2(-1)^{n-1} x^{n-1}}{1+x} \right)$$

0,50 ☐**4 a**☐ Montrer que : $0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^{n-1}}{1+t} \right) dt \leq x^{n-1}$

0,25 ☐☐**b** En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\frac{t^{n-1}}{1+t} \right) dt = 0$

0,50 ☐☐**c** Montrer que : $\forall x \in]0,1[; f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) x^k \right)$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Safi 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x + y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

0,25 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que : $I \in E$ et $J \in E$

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Vérifier que : $J^2 = J - I$

0,25 ☐☐☐ **b** En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **3** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 ☐☐☐ **4 a** Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$

0,50 ☐☐☐ **b** On pose : $\Delta = x^2 + xy + y^2 ; (x, y) \in \mathbb{R}^{2*}$

Calculer le produit matriciel suivant : $M(x, y) \times M\left(\frac{x+y}{\Delta} ; \frac{-y}{\Delta}\right)$

0,50 ☐☐☐ **c** En déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

☐☐☐ **5** On munit $F := \mathbb{R}^{2*}$ par la loi de composition interne ainsi proposée :

$$\forall (x, y), (a, b) \in F ; (x, y) \top (a, b) = (ax - by ; ay + bx + by)$$

☐☐☐ On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : (F, \top) &\mapsto (E, \times) \\ (x, y) &\mapsto M(x, y) \end{aligned}$$

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(F, \top)$ vers $(E, \times)$

0,25 ☐☐☐ **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F, \top)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (06,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ **1** Soit $(E) : z^2 - (2 - \sqrt{3} + i)mz + 2(i - \sqrt{3})m^2 = 0$; $m \in \mathbb{C}^*$; $z \in \mathbb{C}$

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2 + \sqrt{3} - i)^2 m^2$

0,50 ☐☐☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . Soient $z_1 ; z_2$ les solutions de (E)

0,50 ☐ ☐ **c** On suppose que : $\arg(z_1) \equiv \arg(m) [2\pi]$.

☐ ☐ ☐ Écrire le nombre complexe $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ sous la forme exponentielle.

$$F : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

☐ **2** ☐ Soit F l'application définie ainsi : $M(z) \mapsto M'(z')$

$$z' = e^{\left(\frac{5i\pi}{6}\right)} z$$

0,75 ☐ ☐ **a** Déterminer la nature et les caractéristiques de l'application F .

0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1+i)$ et de rayon 2.

☐ **3** ☐ On considère la suite de points $(M_n(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} M_{n+1} = F(M_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ aff(M_0) = i = z_0 \end{cases}$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad ; \quad M_n = M_p \Leftrightarrow n \equiv p [12]$

0,50 ☐ ☐ **c** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (F) suivante : $(F) : 12x - 5y = 3$

0,25 ☐ ☐ **d** En déduire les valeurs de n pour lesquels on ait $M_n \in (l'axe réelle)$

☐ **4** ☐ Soit le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 0 [12] \\ x \equiv 3 [5] \end{cases}$ Et soit (k_0, l_0) une solution de (F)

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que le nombre $x_0 = 12k_0 = 5l_0 + 3$ est une solution de (S)

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $x = solution(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0 [60]$

0,50 ☐ ☐ **c** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ le système (S) .

0,50 ☐ **5** ☐ Déterminer l'ensemble $R_n = \left\{ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad M_n = M_0 \quad ; \quad n \equiv 3 [5] \right\}$

■ Exercice Numéro 3 : (10,00 points)

I ☐ ☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad f_n(x) = (x-1)^n \ln x$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

☐ ☐ ☐ On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x > 0) \quad ; \quad g_n(x) = n \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

0,25 ☐ **1 a** Étudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,25 ☐ ☐ **b** Calculer $g_n(1)$ puis déterminer le signe de $(x-1)g_n(x)$ sur $]0, +\infty[$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad ; \quad f'_n(x) = (x-1)^{n-1} g_n(x)$.

0,25 ☐ ☐ **b** Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- 0,25 ☐ ☐ **c** Étudier les branches infinies de la courbe (C_n) .
- 0,50 ☐ ☐ **d** Étudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .
- 0,50 ☐ **3** ☐ Tracer les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,75 ☐ **4** ☐ Calculer l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
- II** ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $[0,1[\cup]1, +\infty[$ par :
- $$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{f_1(t)}{(t-1)^4} \right) dt & ; \quad x > 0 \quad ; \quad x \neq 1 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall x \in]0,1[\quad ; \quad 2 \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{(t-1)^3} dt \leq F(x) \leq \ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{(t-1)^3} dt$
- 0,25 ☐ **2 a** Calculer l'intégrale suivante : $\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{(t-1)^3} \right) dt$
- 0,75 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x \in]0,1[\quad ; \quad \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{(x^2 - 1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{2(x^2 - 1)^2}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Étudier la continuité de la fonction F à droite en zéro.
- 0,50 ☐ ☐ **d** Calculer puis interpréter la limite : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$
- 0,50 ☐ ☐ **e** Étudier la dérivabilité de la fonction F à droite en zéro.
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que : $\forall x > 1 \quad ; \quad \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{2(x^2 - 1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2 + 2x) \ln x}{(x^2 - 1)^2}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$
- 0,50 ☐ **4 a** Étudier la dérivabilité de la fonction F sur $]0,1[$ et $]1, +\infty[$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Dresser le tableau des variations de la fonction F .
- ☐ ☐ On pourra remarquer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0$.
- 0,50 ☐ **5** ☐ Construire la courbe représentative de la fonction F dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- III** ☐ On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad I_n = \int_1^2 f_n(t) dt \quad ; \quad J_n = \int_1^2 \frac{(t-1)^n}{t} dt$
- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad (n+1) I_n = \ln 2 - J_{n+1}$
- 0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad \int_1^2 \frac{(t-1)^{n+1}}{t^2} dt = (n+1) J_n - \frac{1}{2}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Calculer les limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) I_n \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (J_n)$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Oujda 2010

■ **Exercice Numéro 1 : (05,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ On considère l'application suivante :

$$\varphi : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$$

$$M(z) \mapsto M(z')$$

$$z = x + iy \mapsto z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + iy$$

☐☐☐ Soit : $E = \left\{ M(x, y) \in \mathcal{P} ; \sqrt{3} \cdot MA = 2 \cdot MM' \right\}$

0,50 ☐☐**1**☐ Montrer que : $E = \left\{ M(x, y) \in \mathcal{P} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$

☐☐**2**☐ Soit : $(C_f) = \left\{ (x, f(x)) \in \mathcal{P} ; f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} \right\}$

0,50 ☐☐**a** Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

☐☐☐ Puis vérifier que f est une fonction paire.

0,50 ☐☐**b** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1.

0,50 ☐☐**c** Déterminer l'asymptote de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,75 ☐☐**d** Montrer que $E = (C_f) \cup (C_{-f})$ puis construire l'ensemble E .

☐☐**3**☐ On pose : $M(a + ib) \top M(c + id) = M(ac + 3bd + i(ad + bc))$

1,00 ☐☐**a** Montrer que la loi $\top$ est associative.

0,75 ☐☐**b** Montrer que $(E, \top)$ est une partie stable dans $(\mathcal{P}, \top)$.

1,00 ☐☐**c** Montrer que $(E, \top)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

■ **Exercice Numéro 2 : (04,50 points)**

☐☐**1**☐ Soit l'équation $(E) : 109x - 226y = 1 ; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

0,50 ☐☐**a** Déterminer le $PGCD(109, 226)$. En déduire que (E) est solvable.

0,50 ☐☐**b** Montrer que les solutions de l'équation (E) sont les couples :

$$\left(141 + 226k ; 68 + 109k \right) ; k \in \mathbb{Z}$$

0,75 ☐☐**c** En déduire l'existence d'un couple $(e, d) \in \mathbb{N}^{2*}$ tels que :

$$109d = 1 + 226e ; d \leq 226$$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que le nombre 227 est un nombre premier.

☐ **3** ☐ Soit : $A = \llbracket 0, 226 \rrbracket = \{0; 1; 2; \dots; 226\}$

☐ ☐ On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : A &\mapsto A & g : A &\mapsto A \\ a &\mapsto f(a) & a &\mapsto g(a) \end{aligned}$$

$f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

$g(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $g(f(0)) = 0$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall a \in A \setminus \{0\} ; a^{226} \equiv 1 [227]$.

0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall a \in A ; g(f(a)) = f(g(a)) = a$.

0,50 ☐ ☐ **d** Que peut-on en déduire à propos des fonctions f et g ?

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

☐ **1** ☐ On pose : $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$

0,50 ☐ ☐ **a** Calculer l'intégrale suivante : $I_1 = \int_1^e x^2 (\ln x)^1 dx$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall p \in \mathbb{N}^*) ; I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire les valeurs des intégrales $I_2 ; I_3$.

0,50 ☐ **2** ☐ **a** Montrer que la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{p \rightarrow +\infty} (I_p) = 0$

■ Exercice Numéro 4 : (07,00 points)

I ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1, +\infty]$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)$$

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$

0,50 ☐ **2** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction g .

0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\exists ! \alpha > 0 ; g(\alpha) = 0 ; \frac{1}{2} < \alpha < 1$

0,50 ☐ **4** ☐ Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

II ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

1,00 ☐ **1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $] -1, +\infty[$ est identique à celui de $g(x)$. Puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

1,00 ☐ **3** ☐ Établir une construction géométrique de la courbe $(\mathcal{C})$.

III ☐ ☐ On considère l'intégrale définie ainsi : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

1,00 ☐ **1** ☐ On posant $t = \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, Calculer l'intégrale I .

1,00 ☐ **2** ☐ Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

☐ ☐ ☐ On pourrait prendre $t = \text{Arctan}(x)$ pour faciliter les calculs.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures



Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Khmiset 2011

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

□□□ Soit $G = [0,1[$, Et on considère l'application définie par :

$$\forall (a,b) \in G^2 ; a * b = a + b - E(a + b)$$

$E(x)$ est la partie entière du nombre réel x .

- 0,75 □ **1** □ Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G .
- 0,75 □ **2** □ Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur G .
- 0,50 □ **3** □ Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera
- 0,50 □ **4** □ Déterminer le symétrique d'un élément a de G par la loi $*$
- 1,00 □ **5** □ Résoudre dans G l'équation $(F) : \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois le } x} = \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

I □□□ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

□□□ Soit l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0 ; \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[; z \in \mathbb{C}$

0,50 □ **1** □ Montrer les identités suivantes pour tout x et y de $\mathbb{R}$.

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} ; e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

0,75 □ **2** □ Résoudre (E_θ) puis écrire les solutions sous la forme trigonométrique

□ **3** □ Soient : $A(z_1) ; B(z_2) ; \{z_1, z_2\} = \text{solutions}(E_\theta)$

0,50 □□ **a** Montrer que : $\{O, A, B\}$ non-alignés et que OAB est un triangle rectangle

0,25 □□ **b** Déterminer la valeur de θ pour laquelle on ait OAB soit isocèle en O

II □□□ Soit maintenant : $A(a) ; B(b+i) ; r = \text{rotation}\left(A, \frac{\pi}{3}\right) ; (a,b) \in \mathbb{R}^2$

0,50 □ **1** □ Donner l'écriture complexe de r puis calculer $\text{aff}(B')$; $B' = r(B)$

0,75 □ **2** □ Montrer l'équivalence suivante : $B' \in (Oy) \Leftrightarrow a + b = \sqrt{3}$

□□□ Puis Calculer, dans ce cas, $\text{aff}(B')$ en fonction de a .

□ **3** □ Soit maintenant : $a = \sqrt{3} ; b = 0 ; c = -i ; d = 2 + \sqrt{3}(1 - 2i)$

□□□ Soient encore : $A(a) ; B(b) ; C(c) ; D(d)$.

0,25 □□ **a** Quelle est la nature de chacun des triangles ABC et ACD ?

0,50 □□ **b** Soient : $E = r(D) ; F = t(D) ; t = \text{translation}(\vec{AC})$.

□□□ Calculer $\text{aff}(E) ; \text{aff}(F)$, et Montrer que BEF est triangle équilatéral

■ **Exercice Numéro 3 : (02,50 points)**

- 0,75 ☐ **1** ☐ Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.
- ☐ ☐ Soit l'équation $(E) : ax \equiv 1 [p] ; x \in \mathbb{Z} ; a \in A_p := \{1, 2, \dots, (p-1)\}.$
- 0,25 ☐ **a** ☐ Montrer que le nombre a^{p-2} est une solution de l'équation $(E).$
- 0,25 ☐ **b** ☐ Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par $p.$
- ☐ ☐ Montrer que $r \in A_p$ et que r est la solution de (E) dans $A_p.$
- ☐ **2** ☐ Par la suite, on prend $p = 31.$
- 0,50 ☐ **a** ☐ Déterminer les valeurs de r pour lesquelles on ait : $a = 2$ puis $a = 3$
- 0,75 ☐ **b** ☐ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $(F_1) : 2x \equiv 1 [31] ; (F_2) : 3x \equiv 1 [31]$
- 0,25 ☐ **c** ☐ En déduire la résolution de l'équation $(F) : 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 [31]$

■ **Exercice Numéro 4 : (10,00 points)**

I ☐ ☐ Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^x - (x + 1)$$

- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt$
- 0,50 ☐ **2** ☐ Étudier la monotonie de la fonction h sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[.$
- 0,75 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\forall x > 0 ; \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}$
- ☐ ☐ On pourra Montrer d'abord : $\forall x > 0 ; 0 \leq \int_0^x h(t) dt \leq x h(x)$
- 0,75 ☐ **4** ☐ Montrer que : $\forall x < 0 ; \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$
- ☐ ☐ On pourra Montrer d'abord : $\forall x < 0 ; x h(x) \leq \int_0^x h(t) dt \leq 0$
- 0,25 ☐ **5** ☐ Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x)}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - (x + 1)}{x^2} \right)$

II ☐ ☐ Soit f la fonction numériques définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- ☐ ☐ Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm.$
- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}.$
- 0,25 ☐ **2** ☐ Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $\pm\infty$

- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que la fonction f est dérivable en zéro.
- 0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} ; \varphi(x) = (1 - x)e^x - 1$
- 0,50 ☐ **5** ☐ Étudier le sens de variations de φ sur $\mathbb{R}$, En déduire le signe de $\varphi(x)$
- 0,25 ☐ **6** ☐ Dresser le tableau de variations de f .
- 0,50 ☐ **7** ☐ Tracer la courbe (C_f) en exhibant la tangente en zéro.
- III** ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in \mathbb{R}$
- 0,50 ☐ **2 a** ☐ Montrer que : $\forall x > 0 ; f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
- ☐ ☐ ☐ Puis En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
- 0,50 ☐ **3 a** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
- 0,25 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha)$
- 0,25 ☐ ☐ **c** ☐ Calculer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- IV** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $\forall x \geq 0 ; 0 \leq F(x) \leq x f(x)$.
- ☐ ☐ ☐ En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $\forall x \leq 0 ; F(x) \leq x f(x)$.
- ☐ ☐ ☐ En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
- $$\begin{cases} F'(x) = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **4** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction F .
- ☐ ☐ ☐ Puis construire la courbe (C_F) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



التحضير الجيد للامتحان الوطني الموحد

Bac Publique
Bac Privé
Bac Libre

عرض خاص بشعبة العلوم الرياضية

الدعم عن بعد

تلاميذ جميع مدن المغرب من طنجة إلى الكويرة

- الاستفادة من خدمة تصحيح التمارين و الفروض و الامتحانات.
- الاستفادة من حصص مركزة مضمونها مراجعة شاملة للمقرر الدراسي.
- شهر أبريل خاص بمراجعة الدروس و التركيز على الخصائص المهمة فقط.
- شهر ماي خاص بإنجاز و تصحيح 12 امتحان تجريبي من هذا الكتاب.
- عدد الساعات المقررة لشهر أبريل هو 30 ساعة - فيديو هات للمراجعة.
- عدد الساعات المقررة لشهر ماي هو 36 ساعة - فيديو هات للتصحيح.
- سوف يتم التركيز على ما هو مهم للامتحان الوطني و المباريات فقط.



للتسجيل 06 - 60 - 34 - 41 - 36

أثمنة جد مناسبة للجميع

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2020

Dimanche 20 Décembre 2020

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatihi



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
1^{er} Blanc 2020

■ **Exercice Numéro 1 : (05,50 points)**

I ☐ ☐ On définit sur $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4 ; (a + ib) * (x + iy) = ax + i(ay + bx)$$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre et déterminer le.

0,50 ☐ **2 a** Déterminer G , l'ensemble des éléments symétrisables par la loi $*$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

0,25 ☐ ☐ **c** Résoudre dans G l'équation $z * z = \bar{z}$.

0,50 ☐ **3** ☐ On considère l'ensemble défini ainsi : $E = \{e^t(1 + it) ; t \in \mathbb{R}\}$.
 Montrer que E est un sous-groupe de $(G, *)$.

0,25 ☐ **4 a** Montrer que : $(\forall z \in G) : \bar{z} \in G$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que l'application définie ainsi $f : z \mapsto \bar{z}$ est un isomorphisme de $(G, *)$ vers $(G, *)$.

0,25 ☐ **5 a** Montrer que $*$ est distributive par rapport à l'addition $+$ dans $\mathbb{C}$.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que $(\mathbb{C}, +, *)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

0,50 ☐ **6** ☐ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - 1) * (z + i) = 0$

II ☐ ☐ On considère l'ensemble K défini ainsi :

$$K = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que $(K, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0,25 ☐ ☐ **b** Déterminer une base de cet espace vectoriel.

0,25 ☐ **2 a** Montrer que K est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

☐ **3** ☐ Soit f l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}, *) &\mapsto (K, \times) \\ a + ib &\mapsto M(a, b) \end{aligned}$$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que l'application f est un isomorphisme.

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire l'ensemble des matrices inversibles dans $(K, \times)$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,50 points)**

- ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit l'équation $(E) : (1 - i)z^2 - 2(a + 1)z + (1 + i)(1 + a^2) = 0$
Avec : $z \in \mathbb{C} ; a \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$
- 0,75 ☐☐☐ **1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- ☐☐☐ Soient : $A(a) ; B(\beta) ; C(\alpha) ; \alpha = a + i ; \beta = 1 + ai$
- 0,50 ☐☐☐ **2** On suppose dans cette question que $a = e^{i\theta} ; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
Écrire α et β sous la forme trigonométrique.
- 0,50 ☐☐☐ **3 a** Montrer l'équivalence suivante : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |a| = 1$
- 0,50 ☐☐☐ **b** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels on ait :
les points $O ; B ; C$ soient alignés.
- ☐☐☐ **4** On suppose dans cette question que :
 $|a| = 1$ et $a^2 + a(2i - 1) - 1 \neq 0$
- 0,75 ☐☐☐ **a** Montrer que : $\left(\frac{\alpha^2}{a}\right) \in i\mathbb{R}^*$
- 0,50 ☐☐☐ **b** Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que :
$$\frac{\alpha^2 - \omega}{a - \omega} = i \quad \text{et} \quad \omega \neq 0$$
- 0,25 ☐☐☐ **c** Montrer que les points $O ; \Omega ; D ; A$ sont cocycliques, $\Omega(\omega) ; D(\alpha^2)$
- 0,75 ☐☐☐ **d** Soit (C) le cercle circonscrit au quadrilatère ΩDAO .
Soit $R = \text{rotation}\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, Montrer que $R(A) = D$, en déduire $\text{rayon}(C)$

■ **Exercice Numéro 3 : (05,50 points)**

- 0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^{3n} - 1 \equiv 0 [13]$
- 0,50 ☐☐☐ **2** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^{3n+2} - 9 \equiv 0 [13]$ et $3^{3n+1} - 3 \equiv 0 [13]$
- 0,75 ☐☐☐ **3** Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne du nombre 3^n par 13.
- 0,50 ☐☐☐ **4** En déduire le reste de la division de 2018^{2020} par 13.
- ☐☐☐ **5** On pose : $(\forall p \in \mathbb{N}) : A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.
- 0,75 ☐☐☐ **a** Pour $p = 3n$, Déterminer le reste de la division de A_p par 13.
- 0,75 ☐☐☐ **b** Montrer que : $p = 3n + 1 \Rightarrow A_p$ est divisible par 13.
- 0,50 ☐☐☐ **c** Déterminer le reste de la division de A_p par 13 pour $p = 3n + 2$.
- ☐☐☐ **6** On pose : $a = \overline{1001001000}_{(3)}$ et $b = \overline{1000100010000}_{(3)}$
- 0,50 ☐☐☐ **a** Vérifier que a et b s'écrivent sous la forme A_p (système décimal)
- 0,75 ☐☐☐ **b** En déduire les restes de la division de a puis b par 13.

■ Exercice Numéro 4 : (05,25 points)

I ☐ ☐ On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

☐ ☐ ☐ Soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

0,25 ☐ **1** ☐ Déterminer $\mathcal{D}_g$ l'ensemble de définition de cette fonction g .

0,50 ☐ **2** ☐ Calculer puis interpréter graphiquement la limite : $\lim_{t \rightarrow (-1)^+} g(t)$

0,25 ☐ **3** ☐ Étudier la branche infinie de la courbe (C_g) au voisinage de $+\infty$

0,25 ☐ **4** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction g .

0,25 ☐ **5** ☐ Étudier le signe de $g(t)$; $\forall t \in \mathcal{D}_g$.

II ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par ce qui suit :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer puis interpréter les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = e^{-x} g(e^x)$.

0,25 ☐ **3** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 \leq f(x) \leq 1$.

☐ **5** ☐ Soit : $h(x) = f(x) - x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α de l'intervalle $[0,1]$.

III ☐ ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0,1]$.

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{6}{10} |u_n - \alpha|$. (soit $g(e) = -0,58$)

0,25 ☐ **3** ☐ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

■ **Exercice Numéro 5 : (04,75 points)**

0,25 ☐ ☐ ☐ **I 1 a** Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x} \right)$

0,50 ☐ ☐ ☐ **b** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \right)$

☐ ☐ ☐ **2** On pose : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; I(x) = e^x \int_0^x \left(\frac{t^2 e^{-t}}{2} \right) dt$

0,25 ☐ ☐ ☐ **a** Sans calculer $I(x)$, Montrer que : $\forall x \geq 0 ; 0 \leq I(x) \leq \frac{e^x x^3}{6}$

0,25 ☐ ☐ ☐ **b** Sans calculer $I(x)$, Montrer que : $\forall x \leq 0 ; |I(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$

0,50 ☐ ☐ ☐ **c** En utilisant une intégration par parties (deux fois) Montrer que :

$$I(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

0,50 ☐ ☐ ☐ **d** En déduire de tout ce qui précède que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x \ln(1+x)} \right) = \frac{1}{2}$$

☐ ☐ ☐ **3** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ ainsi : $f(x) = e^x \ln(1+x) - x$

0,50 ☐ ☐ ☐ **a** Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

0,25 ☐ ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall x \geq 0 ; f(x) \geq 0$.

☐ ☐ ☐ **II** On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{1+x}^{e^x} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt & ; \quad \forall x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ ☐ ☐ **1** Montrer que : $\forall x > 0 : \left(\frac{e^x - 1 - x}{x} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \right)$

0,25 ☐ ☐ ☐ **2** Montrer que F est continue et dérivable à droite en zéro.

0,50 ☐ ☐ ☐ **3** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 ; F'(x) = \frac{f(x)}{x \ln(1+x)}$$

0,25 ☐ ☐ ☐ **4** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ puis dresser le tableau de variations de F .

0,25 ☐ ☐ ☐ **5** Étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $+\infty$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatihi

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
2^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

I ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit : $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}$.

Soit : $\forall (x, y) \in E^2$; $x * y = x + y - \alpha xy$

Soit l'application définie ainsi : $f : (E, *) \mapsto (\mathbb{R}^*, *)$
 $x \mapsto 1 - \alpha x$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que f est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(\mathbb{R}^*, *)$.

0,25 ☐ **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E, *)$.

☐ **2** ☐ On note par x^{-1} le symétrique de x dans $(E, *)$.

On pose : l'élément neutre de $(E, *) = e = x^0$.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x^n = x * x * x \cdots * x$; n fois le nombre x

On pose encore : $(\forall n \in \mathbb{Z}^-) : x^n = (x^{-1})^{-n}$

On admet que : $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : x^n * x^m = x^{m+n}$ et $(x * y)^n = x^n * y^n$

On pose : $G = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}, x \in E\}$

0,25 ☐ **a** Montrer que : $G = \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - (1 - \alpha x)^n) ; n \in \mathbb{Z} \right\}$

0,50 ☐ **b** Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$.

II ☐ ☐ Soient : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Soit : $H = \left\{ M(a, b) = a \cdot I + b \cdot J ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que la famille (I, J) est libre dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

0,25 ☐ **b** Montrer que $(H, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

0,25 ☐ **2 a** Vérifier que : $J^2 = -I + \sqrt{3} \cdot J$

0,25 ☐ **b** Montrer que H est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

0,25 ☐ **c** Montrer que $(H, +, \times)$ est un corps commutatif.

0,25 ☐ **3** ☐ Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Montrer que $(1, \alpha)$ est une base de l'espace $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

On considère l'application définie ainsi : $f_{\alpha} : (H, +) \mapsto (\mathbb{C}, +)$
 $M(a, b) \mapsto a + \alpha b$

☐ ☐ ☐ Montrer que f_{α} est un isomorphisme de $(H, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.

0,25 ☐ **4 a** Soit $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, Déterminer f_{α}^{-1} l'application réciproque de f_{α}

0,25 ☐ **b** Calculer J^n en fonction $n \in \mathbb{N}$.

0,25 ☐ **c** En déduire que : $J^n = I \Leftrightarrow n \equiv 0[12]$.

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'équation $(E) : \frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0 ; z \in \mathbb{C}$

0,25 ☐☐**1 a** Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

0,50 ☐☐**b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

☐☐**2** On considère les points : $A(1+i\sqrt{3}) ; B(1-i\sqrt{3}) ; C(2i)$

0,50 ☐☐**a** Montrer que : $OA = OB$

0,50 ☐☐**b** Soit $D = milieu[AC]$, Déterminer : $aff(D)$ et $arg(\vec{u}, \vec{OD})$

0,75 ☐☐**c** En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

☐☐**3** Soient : $\mathcal{R}_1 = rotation\left(A, \frac{-\pi}{2}\right) ; \mathcal{R}_2 = rotation\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

Soient : $\mathcal{R}_1(O) = O' \text{ et } \mathcal{R}_2(B) = B'$

0,50 ☐☐**a** Déterminer les affixes des points O' et B' .

0,50 ☐☐**b** Soit $I = milieu[OB]$, Montrer que (AI) est une hauteur de $AO'B'$.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

☐☐☐ Soit l'équation : $(E) : 16x - 5y = 65 ; (x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

On désigne par S l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

0,25 ☐☐**1** Montrer l'implication suivante : $(x, y) \in S \Rightarrow x \equiv 0[5]$

0,75 ☐☐**2** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

☐☐**3** On pose : $x \wedge y = d ; \forall (x, y) \in S$

0,50 ☐☐**a** Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel d .

0,50 ☐☐**b** Déterminer les éléments (x, y) de S vérifiant $d = 5$.

☐☐**4** Soit $N = \overline{abc}_{(10)}$ un entier naturel écrit dans le système de numération décimale (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$), On pose : $R(N) = \overline{cba}_{(10)}$.

0,50 ☐☐**a** Montrer l'implication : $R(N) = 4N - 9 \Rightarrow 133a + 10b = 32c + 3$

0,75 ☐☐**b** En déduire que : $a = 1$.

0,25 ☐☐**c** Déterminer les entiers naturels N pour lesquels : $R(N) = 4N - 9$.

■ **Exercice Numéro 4 : (05,50 points)**

☐☐☐ Soit : $f_n(x) = x - n \ln x ; x > 0 ; n \in \mathbb{N}^*$

0,50 ☐☐**1 a** Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$

0,50 ☐☐**b** Étudier les variations de la fonction f_n .

0,25 ☐☐**c** En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n tels que $0 < u_n < n < v_n ; \text{ avec } n \geq 3$.

0,50 ☐☐**2 a** Montrer que : $(\forall n \geq 3) : 1 < u_n < e$.

0,25 ☐☐**b** Montrer que : $(\forall n \geq 3) : f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 0,25 ☐ ☐ **d** En encadrant $\ln(u_n)$, Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
- 0,50 ☐ ☐ **e** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} \right) = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(u_n - 1)) = 1$
- 0,25 ☐ **3 a** Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Calculer $f_n(n \ln n)$ puis en déduire que : $\forall n \geq 3$; $n \ln(n) < v_n$
- 0,25 ☐ **4 a** Montrer que : $(\forall x > 0)$: $x > 2 \ln x$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $n > 2 \ln n$
- 0,25 ☐ **5 a** Déterminer le signe de $f_n(2n \ln(n))$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$; $n \ln n < v_n < 2n \ln n$.
- 0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n}{n \ln n} \right) = 1$

■ Exercice Numéro 5 : (07,50 points)

- I** ☐ ☐ Soit la fonction : $h(x) = x - \ln x$; $\forall x \geq 0$
- 0,25 ☐ **1** ☐ Montrer que : $(\forall x > 0)$; $h(x) \geq 1$.
- ☐ **2** ☐ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par ce qui suit :
- $$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{x - \ln x} \right) & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
- II** ☐ ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par une intégrale :
- $$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$
- 0,25 ☐ **1 a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $F'_d(0) = 0$ et encore que :
- $$(\forall x > 0) \quad ; \quad F'(x) = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x) \cdot h(x)}$$
- 0,25 ☐ **2 a** Vérifier que : $\ln 2 = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} \right) dt$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\forall x \geq 1$; $0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \left(\frac{\ln(2x)}{x - \ln x} \right)$
- 0,25 ☐ ☐ **c** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- 0,25 ☐ **3 a** Montrer l'inégalité suivante : $F\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 2$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\exists \alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $F(\alpha) = \ln 2$

0,25 ☐ **4** **a** Dresser le tableau de variations de la fonction F .

0,25 ☐ ☐ **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$

☐ **5** ☐ On considère la fonction G définie sur $[1, +\infty[$ par ce qui suit :

$$G(x) = \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t - \ln t} \right) dt$$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall x \geq 1$; $G(x) \geq \frac{1}{2} \ln^2(x)$

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$

0,50 **III** ☐ On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) dt$$

0,50 ☐ **1** **a** Montrer que : $\forall t > 0$; $\left(\frac{t}{t - \ln t} \right) \leq t$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

0,25 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente

0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que : $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \leq \frac{1}{2}$

☐ **2** ☐ On considère la suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$v_n = \int_1^n \left(\frac{t}{t - \ln t} \right) dt$$

0,50 ☐ ☐ **a** Calculer $\int_1^n \left(1 + \frac{\ln t}{t} \right) dt$ puis montrer que : $\forall n \geq 5$; $v_n \geq n$

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
3^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (05,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (a, b) \in G \right\}$; $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

I ☐☐☐ Soient : $H = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}^*\}$; $K = \{(1, x) ; x \in \mathbb{R}\}$

On considère la loi de composition interne définie ainsi :

$$\forall (a, b) ; (c, d) \in G : (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

0,25 ☐ **1 a** Montrer que la loi $*$ est associative sur G .

0,25 ☐☐ **b** La loi $*$ est-elle commutative ?

0,25 ☐ **2 a** Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

☐☐ **a** Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

0,50 ☐ **3 a** Montrer que H et K sont des parties stables dans $(G, *)$

0,50 ☐☐ **b** Montrer que $(H, *)$ et $(K, *)$ sont des groupes commutatifs.

0,25 ☐☐ **c** L'application $*$ est-elle une loi de composition interne sur $H \cup K$?

0,25 ☐ **4 a** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐ **b** Montrer que $(E, \times)$ est un groupe.

II ☐☐☐ On considère l'ensemble E définie par la donnée suivante :

$$F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

☐☐☐ On pose : $J = M(1, 0)$; $L = M(0, 1)$

0,50 ☐ **1** Montrer que $(F, +)$ est un sous groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

0,50 ☐ **2 a** Calculer les expressions suivantes : L^2 ; J^2 ; $J \times L$; $L \times J$

0,50 ☐☐ **b** Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau commutatif.

0,25 ☐ **3 a** Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(F, +, \times)$

0,25 ☐☐ **b** L'anneau $(F, +, \times)$ est-il intègre ?

0,25 ☐☐ **c** L'anneau $(F, +, \times)$ est-il un corps ?

☐ **4** Soit (a, b) un élément de $\mathbb{R}^2$, Montrer la chose suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (M(a, b))^n = 2^{n-1} \cdot M(a^n, b^n)$$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application définie ainsi :

$$f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad ; \quad z' = -2\bar{z} + 2i$$

☐☐☐ **1** Soient les points $A(a)$; $B(b)$ avec $a = -2i$; $b = 3 - 2i$

☐☐☐ Soient : $A' = f(A)$; $B' = f(B)$; $a' = aff(A')$; $b' = aff(B')$

0,25 ☐☐☐ **a** Déterminer la forme algébrique des nombres a' et b' .

0,25 ☐☐☐ **b** Placer les points A ; B ; A' ; B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

0,25 ☐☐☐ **2 a** Soit la droite $(\Delta) : y = -2$, Montrer l'implication $M \in (\Delta) \Rightarrow M' \in (\Delta)$

0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que : $\forall M(z) \in \mathcal{P} : |z' + 2i| = 2 \cdot |z + 2i|$

0,25 ☐☐☐ **c** Puis interpréter géométriquement cette égalité.

☐☐☐ **3** Pour tout M distinct de A , on appelle θ un argument de $(z + 2i)$

0,50 ☐☐☐ **a** Justifier que θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

0,25 ☐☐☐ **b** Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

0,25 ☐☐☐ **c** En déduire un argument de $(z' + 2i)$ en fonction de θ .

0,25 ☐☐☐ **d** Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

0,25 ☐☐☐ **4** Proposer un programme de construction de M' à partir de M .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

☐☐☐ **1** Soient p et q deux nombres premiers positifs distincts.

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que : $p^{(q-1)} \equiv 1 [q]$ et $q^{(p-1)} \equiv 1 [p]$

0,75 ☐☐☐ **b** Montrer que : $p^{(q-1)} + q^{(p-1)} \equiv 1 [pq]$

0,50 ☐☐☐ **c** En déduire que l'équation : $(p^{(q-1)} + q^{(p-1)})x + pqy \equiv x [pq]$
N'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

☐☐☐ **2** Soit $a \in \mathbb{Z}$; tel que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

0,75 ☐☐☐ **a** Montrer que : $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [pq]$

0,50 ☐☐☐ **b** En déduire que $(27^{4200} - 1)$ est divisible par le nombre 4331.

■ **Exercice Numéro 4 : (09,00 points)**

I ☐☐☐ Soit f la fonction numérique définie sur D_f par :

$$f(x) = \ln|\sqrt{x} - 1|$$

☐☐☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

- 0,50 ☐ **1** ☐ Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
- 0,75 ☐ **2** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Calculer puis interpréter graphiquement la limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$
- 0,50 ☐ **4** ☐ Calculer $f'(x)$; $\forall x \in D_f \setminus \{0\}$ puis dresser le tableau de variations f
- 0,50 ☐ **5** ☐ Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I à déterminer.
- 0,50 ☐ **6** ☐ Déterminer A le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et l'axe $(O, \vec{i})$; $A \neq O$
- 0,75 ☐ **7** ☐ Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
- 0,50 ☐ **8** ☐ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- II** ☐ ☐ Soit g la fonction numérique définie explicitement sur $\mathbb{R}$ par :
- $$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$
- 0,75 ☐ **1 a** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x^2+2}}$
- 0,75 ☐ ☐ **c** ☐ Montrer que : $\forall x \in]0,1[: 0 < g(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 0,50 ☐ ☐ **d** ☐ Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- ☐ **2** ☐ On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ce qui suit :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$
- 0,75 ☐ ☐ **a** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n < 1$.
- 0,75 ☐ ☐ **b** ☐ Établir que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$
- 0,50 ☐ ☐ **c** ☐ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
4^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (05,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ **1** Soient : $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$

☐☐☐ On considère l'application définie ainsi : $z \top z' = xx' + i(xy' + yx')$

0,25 ☐☐☐ **a** Étudier la commutativité de la loi de composition interne $\top$.

0,25 ☐☐☐ **b** Étudier l'associativité de la loi de composition interne $\top$.

0,25 ☐☐☐ **c** Déterminer l'élément neutre de la loi de composition interne $\top$.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Déterminer l'ensemble G des éléments symétrisables dans $(\mathbb{C}, \top)$.

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que G est une partie stable dans $(\mathbb{C}, \top)$.

0,50 ☐☐☐ **c** Montrer que $(G, \top)$ est un groupe commutatif.

☐☐☐ **3** Soient : $n \in \mathbb{N}^*$; $z = x + iy$; $\alpha \in]1, +\infty[$

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que : $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + n\alpha^{n-1} = \frac{n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1}{(\alpha - 1)^2}$

0,25 ☐☐☐ **b** Écrire $u_n = \underbrace{z \top z \top \dots \top z}_{n \text{ fois le } z}$ en fonction de $\{x ; y ; n\}$

0,50 ☐☐☐ **c** Calculer la somme suivante : $u = \sum_{n=1}^{2021} u_n$

☐☐☐ **4** On pose : $S = \{x + i(x \ln x) ; x \in \mathbb{R}_+^*\}$

0,25 ☐☐☐ **a** Montrer que $(S, \top)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(G, \top)$.

0,25 ☐☐☐ **b** Résoudre dans S l'équation : $z \top (2 + i(2 \ln 2)) = 3 + i(3 \ln 3)$

☐☐☐ **5** Soit l'ensemble $E = \left\{ M(z) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} ; z = x + iy \in G \right\}$

0,25 ☐☐☐ **a** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,50 ☐☐☐ **b** Déterminer la structure algébrique de l'ensemble $(E, \times)$ en choisissant un homomorphisme convenable.

0,25 ☐☐☐ **c** Calculer $(M(z))^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

0,50 ☐☐☐ **6** Déterminer : $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; z = x + iy \in G \text{ et } (z + 1 + i) \top 2i = 4i \right\}$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P} &\mapsto \mathcal{P} \\ M(z) &\mapsto M'(z') \quad ; \quad z' = z^2 \end{aligned}$$

0,50 ☐**1**☐ Déterminer l'ensemble : $\Gamma_1 = \{M \in \mathcal{P} ; \varphi(M) = M\}$
Soient $A(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$; $\Omega(1)$; $B(-1)$ trois points du plan $\mathcal{P}$.

0,25 ☐**2 a** Exprimer $\sqrt{2}(1 - i)$ sous forme exponentielle.

0,25 ☐☐**b** En déduire les affixes des deux antécédents de A par φ .

0,50 ☐**3**☐ Déterminer l'ensemble : $\Gamma_2 = \{M(z) \in \mathcal{P} ; \text{aff}(f(M)) \in i\mathbb{R}\}$

☐**4**☐ On admet l'implication : $M \neq \Omega \text{ et } M \neq B \Rightarrow M' \neq \Omega$
Soit : $\Gamma_3 = \{M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega, B\} ; \Omega M M' \text{ est rectangle et isocèle en } \Omega\}$

0,50 ☐☐**a** Montrer que : $\forall M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega, B\} ; \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) [2\pi]$

0,25 ☐☐**b** En déduire l'équivalence : $M \in (\Gamma_3) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = i$

0,25 ☐☐**c** Montrer l'équivalence : $M \in (\Gamma_3) \Leftrightarrow z^2 - iz - 1 + i = 0 \text{ et } z \neq 1$

0,25 ☐☐**d** Montrer que : $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$.

0,25 ☐☐**e** En déduire l'ensemble (Γ_3) .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

☐☐☐ On se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que : $a^2 = b^3$.

☐☐☐ Soit (a, b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$.

☐☐☐ On note u et v les entiers tels que : $a = du$ et $b = dv$.

0,75 ☐**1 a** Montrer que $u^2 = dv^3$.

0,25 ☐☐**b** En déduire que v divise u , puis que $v = 1$.

☐**2**☐ Soit (a, b) un couple d'entier strictement positifs.

0,50 ☐☐**a** Démontrer l'équivalence : $a^2 = b^3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ; a = k^3 \text{ et } b = k^2$

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $n = p^2 \text{ et } n = q^3 \Rightarrow n \equiv 0 [7] \text{ ou bien } n \equiv 1 [7]$
Avec p et q sont deux entiers naturels.

0,50 ☐**3 a** Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2 ; x^2 \times y^2 = 25^3$

0,50 ☐☐**b** Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2 ; x^2 \times y^2 = 2010^3$

■ **Exercice Numéro 4 : (08,00 points)**

☐☐☐ Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = xe^x - nx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

☐☐☐ Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

☐☐☐ Soit : $g_n(x) = (x+1)e^x - n$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,25 ☐**1**☐ Étudier la monotonie de la fonction g_n .

0,50 ☐**2 a** Montrer que : $\exists ! \alpha_n \in \mathbb{R}$; $g_n(\alpha_n) = 0$ et $0 \leq \alpha_n \leq \ln(n)$

0,50 ☐☐**b** Montrer l'égalité suivante : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$

0,50 ☐**3 a** Montrer que : $(\forall x > 0) : \ln x \leq x - 1$

0,25 ☐☐**b** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{\ln n}{2} \leq \alpha_n$

0,50 ☐☐**c** Déterminer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n)$; $\lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$

0,50 **II 1 a** Étudier les variations de la fonction f_n .

0,50 ☐☐**b** Montrer l'égalité suivante : $f_n(\alpha_n) = \frac{-n(\alpha_n)^2}{1+\alpha_n}$

0,50 ☐**2**☐ Montrer que (C_n) admet une asymptote oblique D_n à déterminer.

0,25 ☐**3**☐ Étudier la position relative de (C_n) et de l'axe des abscisses.

0,25 ☐**4**☐ Étudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

0,50 ☐**5 a** Montrer que $\frac{7}{20} \leq \alpha_2 \leq \frac{2}{5}$ puis en déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$

0,50 ☐☐**b** Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III ☐☐ Soient : $\varphi_n = (1-\alpha)^n$; $\psi_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k$; $\alpha \in]0,1[$

0,50 ☐**1**☐ Montrer que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et donner leurs limites

☐**2**☐ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{\varphi_n}{u_n} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

0,50 ☐☐**a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.

0,25 ☐☐**b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

0,50 ☐☐**c** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$

0,50 ☐☐**d** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
5^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (04,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I ☐☐☐ Soit $(G, +)$ un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}, +)$ tel que :
 $\forall x \in [0, 1] ; (x + ix^2) \in G$

0,50 ☐ **1 a** Montrer que : $\forall x \in [0, 1] ; (2x - 1)(1 + i) \in G$

0,25 ☐☐ **b** En déduire : $\forall x \in [0, 1] ; (x + ix) \in G$

0,25 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x \in [0, 1] ; (x - x^2) \in G$

0,25 ☐☐ **b** En déduire que : $[0 ; 1/4] \subset G$

0,25 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall x \in G), (\exists n \in \mathbb{Z}) : \frac{x}{n} \in [0 ; \frac{1}{4}]$

0,25 ☐☐ **b** En déduire que : $\mathbb{R} \subseteq G$.

0,25 ☐ **4** Montrer que : $\forall x \in [0, 1] : i(x - x^2) \in G$

0,25 ☐ **5** Montrer que : $G = \mathbb{C}$

II ☐☐☐ Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \beta b & a + \alpha b \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixés} \right\}$

0,25 ☐ **1** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

0,50 ☐ **2** Montrer que : $(\alpha^2 - 4\beta) < 0 \Rightarrow (E, +, \times)$ est un corps commutatif

☐ **3** On supposera dans cette question que : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

☐☐☐ On considère l'application $d : (E, \times) \mapsto (\mathbb{R}^*, \times)$

$$M(a, b) \mapsto \det(M(a, b))$$

0,25 ☐☐ **a** Montrer que d est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

0,25 ☐☐ **b** On considère l'ensemble : $F = \{ M(a, b) \in E ; \det(M(a, b)) = 1 \}$
 Déterminer la structure algébrique de l'ensemble $(F, \times)$

0,50 ☐☐ **c** Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ l'équation ainsi proposée :

$$\det \left(M \left(\frac{\cos x}{2} ; \frac{\sqrt{3} \sin x}{2} \right) \right) = \frac{3}{4}$$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ On considère les points : $A(i)$; $K(1 + i)$; $L\left(\frac{i}{2}\right)$

☐☐☐ Soit l'application $f : \mathcal{P} \setminus \{A\} \mapsto \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z') ; z' = \frac{-z^2}{z - i}$$

☐☐☐ Le but de cet exercice est de construire M' connaissant M .

- 0,25 ☐ **1 a** D'abord un exemple. Placer le point K dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 0,25 ☐ **b** Déterminer l'abscisse du point $k' = f(k)$.
- 0,25 ☐ **c** Placer le point K' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- 0,50 ☐ **2 a** Déterminer $L' = f(L)$. Que remarque-t-on ?
- 0,50 ☐ **b** Démontrer qu'ils existent deux points invariants par f . ($f(M) = M$)
- 0,50 ☐ **3 a** Maintenant on va établir un procédé de construction.
- ☐ **b** Soit : $G = \text{barycentre} \{(A, a) ; (M, a) ; (M', a)\}$; $\forall a \in \mathbb{R}$ et $g = \text{aff}(G)$
- 0,25 ☐ **b** Vérifier l'égalité suivante : $g = \frac{1}{3(z-i)}$
- 0,25 ☐ **c** Montrer que : $M \in \text{Cercle}(A, r) \Rightarrow G \in \text{Cercle}\left(O, \frac{1}{3r}\right)$
- 0,25 ☐ **d** Démontrer que : $\arg(g) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$
- 0,50 ☐ **e** En déduire un programme de construction du point $D' = f(D)$.
- Avec : $D \in \text{Cercle}\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

■ Exercice Numéro 3 : (02,50 points)

- 0,25 ☐ **1** Montrer que 163 est un nombre premier.
- ☐ **2** On considère l'équation : $(E) : 13x - 162y = 1$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
- 0,25 ☐ **a** Déterminer une solution particulière de l'équation (E) .
- 0,25 ☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .
- ☐ **3** On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) défini ainsi :
- $$(S) : \begin{cases} x \equiv a [13] \\ x \equiv b [162] \end{cases} ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2$$
- 0,25 ☐ **a** Vérifier que le nombre $x_0 = 325b - 324a$ est une solution de (S)
- 0,25 ☐ **b** Montrer l'équivalence : $x \in \text{Solutions}(S) \Leftrightarrow x \equiv x_0 [2106]$
- 0,50 ☐ **c** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) dans le cas où $a = 2$; $b = 3$
- ☐ **4** Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{25} \equiv 3 [163]$
- 0,50 ☐ **a** Montrer que : $x \wedge 163 = 1$. puis prouver que : $x \equiv 3^{13} [163]$
- 0,25 ☐ **b** En déduire que : $x^{25} \equiv 3 [163] \Leftrightarrow x \equiv 3^{13} [163]$

■ Exercice Numéro 4 : (04,50 points)

- I** ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$$
- ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 0,50 ☐ **2** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une α est telle que $1,5 < \alpha < 1,6$.

II ☐ ☐ Soit maintenant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (2 - 2e^{-u_n}) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

☐ **1** ☐ Soit : $g(x) = 2 - 2e^{-x}$; $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] = I$

0,50 ☐ ☐ **a** Étudier les variations de la fonction g .

0,75 ☐ ☐ **b** Montrer que : $g(I) \subseteq I$ et que $\forall x \in I$; $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$

0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

0,25 ☐ ☐ **e** En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est α .

0,50 ☐ **2** ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,25 ☐ ☐ **b** Redémontrer le résultat suivant : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

■ Exercice Numéro 5 : (05,50 points)

☐ ☐ ☐ On considère la suite numérique (u_n) définie implicitement par :

$$\begin{cases} \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \end{cases}$$

0,75 ☐ **1** ☐ Calculer : u_2 ; u_3 et Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{2u_n}{4u_n - 1}$

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

☐ **3** ☐ On considère les sous-suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n = u_{2n} ; b_n = u_{2n+1}$$

☐ ☐ ☐ Soit : $f(x) = \frac{2x}{4x - 1}$; $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subseteq \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer par récurrence que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante

0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

0,50 ☐ ☐ **d** Puis déterminer la limite de chacune d'entre elles.

☐ **4** ☐ On pose : $v_n = \left(\frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,75 ☐ ☐ **a** Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

0,75 ☐ ☐ **b** Exprimer les termes généraux v_n et u_n en fonction de n .

0,50 ☐ ☐ **c** Déterminer ainsi la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
6^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (05,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient : $G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \det M \neq 0 \}$; $G^+ = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \det M > 0 \}$

☐☐☐ Soient : $S = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \det M = 1 \right\}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

☐☐☐ On considère l'application $\det$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} \det : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times) &\mapsto (\mathbb{R}, \times) \\ M &\mapsto \det(M) \end{aligned}$$

0,25 ☐☐☐ **1** Montrer que l'application $\det$ est un homomorphisme.

0,25 ☐☐☐ **2 a** Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que $(G^+, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(G, \times)$.

0,25 ☐☐☐ **c** Montrer que $(S, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(G^+, \times)$.

☐☐☐ **3** Soit : $M^{-1} = \text{symétrique}(M)$; $\forall M \in (G, \times)$

0,25 ☐☐☐ Montrer que : $(\forall M \in G), (\forall A \in G^+) : M \times A \times M^{-1} \in G^+$

0,25 ☐☐☐ **4 a** Vérifier que $(\{1, -1\} ; \times)$ est un groupe commutatif.

☐☐☐ Soit l'application suivante : $f : (G, \times) \mapsto (\{1, -1\} ; \times)$

$$M \mapsto f(M) = \frac{\det M}{|\det M|}$$

0,25 ☐☐☐ **b** Montrer que l'application f est un homomorphisme surjective.

0,25 ☐☐☐ **c** Déterminer l'ensemble $K = \{ M \in G ; f(M) = 1 \}$

☐☐☐ **5** Soit : $E = \left\{ M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$

0,25 ☐☐☐ **a** Montrer que $(E, \times)$ est un sous-groupe du groupe $(S, \times)$.

0,25 ☐☐☐ **b** Calculer : $(M(\theta))^n = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois le } M(\theta)} ; \forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$

0,25 ☐ **6** ☐ Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

☐ **7** ☐ On pose : $F = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

☐ ☐ ☐ Soit g l'application définie ainsi : $g : \mathbb{C} \mapsto F$
 $a + ib \mapsto M(a, b)$

0,50 ☐ ☐ **a** Calculer : $g(1)$; $g(i)$; $g(\bar{z})$; avec $z = a + ib$

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que l'application g est bijective.

0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que $(F, +)$ et $(F \setminus \{0\}; \times)$ sont des groupes commutatifs.

0,75 ☐ ☐ **d** Calculer : $(M(a, b))^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{2*}$

0,25 ☐ ☐ **e** Résoudre dans F l'équation $(M - I)(M - J) = \theta$ d'inconnue $M \in F$.

■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

☐ ☐ ☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐ ☐ ☐ On pose : $P(z) = z^6 - 12z^4 + 36z^2 - 81$; $\forall z \in \mathbb{C}$

0,25 ☐ **1 a** Déterminer les nombres α et β tels que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (z^2 - 9)(z^4 + \alpha z^2 + \beta)$$

0,50 ☐ ☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : P(z) = 0$

0,50 ☐ ☐ **c** Vérifier que les solutions de (E) sont les nombres complexes z_k :

$$\begin{cases} z_k = 3 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \\ k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\} \end{cases}$$

☐ **2** ☐ On pose : $u_k = 2i\left(z_k - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)$; $\forall k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

0,50 ☐ ☐ ☐ Montrer que les nombres u_k sont des termes successifs d'une suite géométrique puis calculer la somme $(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)$.

0,25 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R} ; \forall z \in \mathbb{C} : (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) = z^2 - 2z \cos \theta + 1$

0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que : $z^5 - 1 = (z - 1)\left(z^2 - 2z \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2z \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$

0,50 ☐ **5 a** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 1 = 0$.

0,50 ☐ ☐ **b** En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

■ **Exercice Numéro 3 : (02,50 points)**

☐ **1** ☐ Soit : $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $m \wedge n = 1$.

0,50 ☐ **a** Montrer que : $(2m^2 + n^2) \not\equiv 0 [5]$.

0,50 ☐ **b** En déduire que : $(2m^2 + n^2) \wedge 5 = 1$.

☐ **2** ☐ Soit l'équation : $(E) : 2x^3 + x - 5 = 0$; $x \in \mathbb{R}$

0,50 ☐ **a** Montrer que (E) admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha < 2$

0,50 ☐ **b** On suppose que : $\alpha = \frac{m}{n}$; $m \wedge n = 1$; $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

Vérifier que : $(2m^2 + n^2)m = 5n^3$. Puis montrer que $m = 5$.

0,50 ☐ **c** En déduire que α est irrationnel.

■ **Exercice Numéro 4 : (03,50 points)**

☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1} & ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,25 ☐ **1** ☐ Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro.

0,50 ☐ **3 a** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro.

0,25 ☐ **b** Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,50 ☐ **4** ☐ Étudier les variations de la fonction f .

0,25 ☐ **5** ☐ Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $x_0 = 1$.

0,25 ☐ **6** ☐ Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 ☐ **7** ☐ Montrer que f est bijective de $I = \left[\frac{1}{e}; e\right]$ vers J à déterminer.

0,75 ☐ **8** ☐ Montrer que $f^{-1} : J \mapsto I$ est dérivable en 0 puis donner $(f^{-1})'(0)$.

■ **Exercice Numéro 5 : (05,50 points)**

I ☐ ☐ On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^3 + 4x^2 + 6x - 1$$

0,50 ☐ **1** ☐ Calculer : $h(0)$; $h\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(1)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

0,50 ☐ **2** ☐ Calculer $h'(x)$; $\forall x \geq 0$, puis dresser le tableau de variations de h .

0,25 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\exists ! \alpha \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right[\subset [0, +\infty[$; $h(\alpha) = 0$

0,50 ☐ **4** ☐ Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $[0, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$

II ☐ ☐ On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 6}$$

0,25 ☐ **1 a** ☐ Encadrer la quantité $(x^2 + 4x + 6)$ pour $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ En déduire que : $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$; $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$

0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que : $\forall x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$; $|g'(x)| \leq \frac{5}{36}$

☐ **3** ☐ On considère maintenant la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

0,50 ☐ ☐ **a** ☐ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

0,50 ☐ ☐ **b** ☐ Montrer que : $g(\alpha) = \alpha$.

0,50 ☐ ☐ **c** ☐ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{36} |u_n - \alpha|$

0,25 ☐ ☐ **d** ☐ En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

0,50 ☐ ☐ **e** ☐ Montrer que : $u_0 \leq \alpha \leq u_1$.

0,50 ☐ ☐ **f** ☐ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
7ème Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (03,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ On pose : $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$: $x * y = x + y - xy$

0,25 ☐☐☐ **1** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

0,50 ☐☐☐ **2** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,50 ☐☐☐ **3** Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}; *)$ est un groupe commutatif.

0,25 ☐☐☐ **4** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois le } x} = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2x)^n)$

☐☐☐ **II** Soit $\mathcal{A} = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}$

0,25 ☐☐☐ **1** Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

☐☐☐ **2** On considère l'application définie ainsi :

$$f : \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}; * \right) \mapsto (\mathcal{A}, \times)$$

$$x \mapsto M(x)$$

0,50 ☐☐☐ **a** Montrer que l'application f est un isomorphisme.

0,25 ☐☐☐ **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(\mathcal{A}, \times)$

0,50 ☐☐☐ **c** Soient : $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = M\left(\frac{-1}{2}\right)$, Montrer les égalités suivantes :

$$B^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right) ; \quad (B^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

■ **Exercice Numéro 2 : (03,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que $1 ; j ; j^2$ sont des solutions de $z^3 = 1$; avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0,25 ☐☐☐ **b** Calculer la quantité $(1-j)(1+j+j^2)$.

0,25 ☐☐☐ **c** En déduire que : $1+j+j^2 = 0$.

0,25 ☐☐☐ **d** Vérifier que : $e^{\frac{i\pi}{3}} + j^2 = 0$.

- 0,50 ☐ **2** ☐ Soient les points 2 à 2 distincts suivants : $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $R(1)$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : ABC est équilatéral direct $\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : ABC est équilatéral direct $\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0$
- 0,50 ☐ **3** ☐ **a** Pour quelles valeurs de $z \neq 1$, les points $M(z)$; $M'(\bar{z})$ sont-ils distincts ?
- 0,50 ☐ ☐ **b** On suppose que $M \neq M'$, Montrer que l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que RMM' soit un triangle équilatéral direct est une droite privé d'un point qu'on déterminera.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- ☐ ☐ ☐ Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .
- 0,25 ☐ **1** ☐ Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
- 0,25 ☐ **2** ☐ **a** Montrer que : $\forall n \geq 2 : S(n) \geq n + 1$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Pour quelles valeurs de n on ait : $S(n) = 1 + n$?
- ☐ **3** ☐ On suppose dans cette question que : $n = pq$; $(p, q) \in \mathbb{P}^2$; $p \neq q$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** On considère la proposition : $\forall (m \neq n) \in \mathbb{N}^2 : S(m \times n) = S(m) \times S(n)$
- ☐ ☐ ☐ Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? justifier.
- ☐ **4** ☐ On suppose dans cette question que : $n = p^k$; $p \in \mathbb{P}$; $k \in \mathbb{N}$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Quels sont les diviseurs de l'entier naturel n ?
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que : $S(n) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$
- ☐ **5** ☐ On suppose dans cette question que : $n = p^{13} \times q^7$; $(p \neq q) \in \mathbb{P}^2$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Soit m un entier naturel, Montrer l'équivalence suivante :
- $$m \text{ divise } n \Leftrightarrow \exists (s, t) \in \mathbb{N}^2 ; m = p^s \times q^t \text{ et } \begin{cases} 0 \leq s \leq 13 \\ 0 \leq t \leq 7 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Démontrer ainsi l'identité suivante : $S(n) = \left(\frac{1 - p^{14}}{1 - p}\right) \times \left(\frac{1 - q^8}{1 - q}\right)$

■ Exercice Numéro 4 : (11,00 points)

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x} & ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
- ☐ ☐ ☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que f est une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$.

- 0,75 ☐ **2 a** Montrer que : $\forall x > 0 : x - \frac{x^3}{3} < \text{Arctan}(x) < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$
- 0,25 ☐ **b** En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- 0,50 ☐ **c** Calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
- 0,75 ☐ **3 a** En utilisant une intégration par parties, montrer qu'on ait :
- $$\forall x > 0 : \int_0^x \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^2 dt = \frac{-1}{2} x^2 f'(x)$$
- 0,25 ☐ **b** En déduire les variations de la fonction f .
- 0,50 ☐ **4** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- II** ☐ Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ F(0) = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1** Montrer que la fonction F est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
- 0,50 ☐ **2** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq F(x) \leq 1$.
- 0,75 ☐ **3** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : F'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - F(x))$
- 0,50 ☐ **4 a** Montrer que la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $F'(0)$.
- 0,25 ☐ **b** Donner les variations de la fonction F .
- 0,75 ☐ **c** Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[: 0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$
- 0,25 ☐ **d** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
- III** ☐ On considère la suite numérique (u_n) définie ainsi :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = F(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1 a** Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$
- 0,75 ☐ **b** Montrer que : $\forall x > 0 : |F'(x)| \leq \frac{1}{x} \left(1 - f(x) \right)$
- 0,50 ☐ **c** Montrer que : $\forall x > 0 : \frac{1}{x} \left(1 - f(x) \right) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) dt$
- 0,25 ☐ **d** Puis en déduire que : $\forall x > 0 : |F'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
- 0,75 ☐ **2** Montrer que : $\exists ! \alpha \in]0,1] : F(\alpha) = \alpha$.
- 0,75 ☐ **3 a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.
- 0,50 ☐ **b** En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
8^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (03,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{C}} = 0$; $1_{\mathbb{C}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient : $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

0,50 ☐**1**☐ Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0,50 ☐**2**☐ Montrer que (I, J) est une base de l'espace E .

0,50 ☐**3 a** Calculer J^2 puis déterminer J^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

0,50 ☐☐**b** Déterminer les coordonnées de la matrice $A = I + J + J^2 + \dots + J^{2n}$
 En fonction de n dans la base (I, J) .

☐**4**☐ On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (E, \times) &\mapsto (\mathbb{C}, \times) \\ M(a, b) &\mapsto a + i b \sqrt{2} \end{aligned}$$

0,50 ☐☐**a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.

0,50 ☐☐**b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0,50 ☐☐**c** Résoudre dans E l'équation : $(M(a, b))^3 = -\sqrt{2} \cdot I + J$

■ **Exercice Numéro 2 : (05,50 points)**

☐☐☐ Soit f_{α} l'application définie ainsi : $f_{\alpha} : \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$
 $z \mapsto f_{\alpha}(z) = \frac{\alpha z}{z - \alpha}$

0,75 ☐**1**☐ Montrer l'équivalence : $f_{\alpha}(z) \in i\mathbb{R} \iff |z|^2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha) = |\alpha|^2 \cdot \operatorname{Re}(z)$

☐**2**☐ Soient : $r = |z - \alpha|$ et $\arg(z - \alpha) \equiv \theta [2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$

0,75 ☐☐**a** Calculer $|f_{\alpha}(z) - \alpha|$ en fonction de r et $|\alpha|$.

0,75 ☐☐**b** Calculer $\arg(f_{\alpha}(z) - \alpha)$ en fonction de θ et $\arg \alpha$.

☐**3**☐ On prend dans cette question $\alpha = -1 + i$, et on considère dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ les ensembles de points définis ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ M(z) ; \arg(f_{\alpha}(z) - \alpha) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \right\} \\ \mathcal{F} &= \{ M(z) ; |f_{\alpha}(z) - \alpha| = 2 \} \quad \mathcal{H} = \left\{ M(z) ; f_{\alpha}(z) \in i\mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

- 0,75 ☐ ☐ **a** Déterminer chacun des ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $\mathcal{D}$ est une demi-droite d'extrémité $A(\alpha)$ privée du point A, dont on déterminera une équation cartésienne.
- 0,75 ☐ ☐ **c** Soit : $B(z_0) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{F}$; avec $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$.
Écrire $f_\alpha(z_0)$ sous forme algébrique puis déterminer z_0 .
- 0,25 ☐ ☐ **d** Représenter graphiquement les ensembles : $\mathcal{D}$; $\mathcal{F}$; $\mathcal{H}$.
- ☐ **4** ☐ On considère l'application φ définie ainsi :
- $$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P} &\mapsto \mathcal{P} \\ M(z) &\mapsto M'(z') \quad ; \quad z' = (-1+i)z + 3i - 1 \end{aligned}$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que φ est la composée d'une homothétie et d'une rotation toutes les deux à déterminer.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer les ensembles : $\varphi(\mathcal{D})$; $\varphi(\mathcal{F})$.

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

- ☐ **1** ☐ Soit a un entier naturel tel que $a \equiv 1 [10]$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(a^9 + a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \equiv 0 [10]$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $a^{10} \equiv 1 [100]$.
- 0,50 ☐ **2** **a** Déterminer les restes possibles de la division d'un certain $b^4 \in \mathbb{N}$ par 10
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire l'équivalence suivante : $b \wedge 10 = 1 \Leftrightarrow b^4 \equiv 1 [10]$
- 0,50 ☐ **3** **a** Montrer que : $(\forall b \in \mathbb{N}) ; b \wedge 10 = 1 \Rightarrow b^{40} \equiv 1 [100]$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer les chiffres des unités et des dizaines du nombre 67^{42} .

■ **Exercice Numéro 4 : (04,50 points)**

- ☐ ☐ ☐ Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
- $$h(x) = \frac{1}{x} - 2 \operatorname{Arctan}(x)$$
- ☐ ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.
- 0,50 ☐ **1** **a** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha < 1$
- 0,50 ☐ ☐ **c** Étudier le signe de $h(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- ☐ **2** ☐ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{1+x^2}$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Étudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha^2)}$
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(\forall x \geq 0) ; 0 \leq f(x) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$
- 0,50 ☐ **3** ☐ En utilisant l'inégalité des accroissements finis, Montrer que :
- $$\forall (x > x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; (\operatorname{Arctan} x)^2 - (\operatorname{Arctan} x_0)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$
- ☐ **4** ☐ On considère la suite $(u_n(x))_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x > 0}}$ définie par :
- $$\forall n \in \mathbb{N} : u_n(x) = \sum_{p=0}^n \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2^p} \right) \right)^2$$
- 0,50 ☐ ☐ ☐ Montrer que la suite $(u_n(x))$ est majorée par $\frac{3\sqrt{3}x}{2}$.
- ☐ **5** ☐ On pose : $\forall x \geq 0 : \mathcal{C}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x))$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que : $\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}|x - x_0| \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que la fonction $\mathcal{C}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

■ Exercice Numéro 5 : (03,50 points)

- ☐ ☐ ☐ On considère la suite numérique (u_n) définie par :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{1 - 2(u_n)^2} ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = a \in \left] 0 ; \frac{1}{4} \right[\end{cases}$$
- 0,25 ☐ **1** **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < \frac{1}{4}$
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que la suite (u_n) est convergente et que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$
- ☐ **2** ☐ Soit (S_n) la suite définie par : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$
- 0,50 ☐ ☐ **a** On considère les sous-suites : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que les suites numériques (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n$
- 0,50 ☐ ☐ **d** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} ; |S_n - v_n| \leq a \sum_{k=n+1}^{k=2n} \left(\frac{2}{7} \right)^k$
- 0,50 ☐ ☐ **e** En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = \ell \in \mathbb{R}$
- On pourrait remarquer que : $|S_n - \ell| \leq |S_n - v_n| + |v_n - \ell|$



Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
9^{ème} Blanc 2021

■ Exercice Numéro 1 : (04,50 points)

I ☐ ☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐ **1** ☐ On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

0,25 ☐ ☐ **a** Déterminer le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel on ait : $A = a \cdot J + b \cdot I$

0,25 ☐ ☐ **b** Calculer J^2 en fonction de J .

0,25 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2} (4^n - (-2)^n) J$

0,25 ☐ ☐ **d** Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice carrée d'ordre 2.

0,25 ☐ ☐ **e** Montrer que A est inversible et donner A^{-1} .

☐ **2** ☐ On note (v_n) et (w_n) les deux suites numériques définies par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + w_n & ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} w_{n+1} = 3v_n + w_n & ; & \forall n \in \mathbb{N} \\ w_0 = 3 \end{cases}$$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : X_n = A^n \times X_0$; avec $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire l'expression de X_n en fonction de n .

0,25 ☐ ☐ **c** Calculer les valeurs de v_n et w_n en fonction de n .

II ☐ ☐ Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

0,25 ☐ **1** ☐ Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice d'inconnue M suivante :
(E) : $D \times M = M \times D$

0,25 ☐ **2** ☐ **a** Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E), Montrer que :
 $(\forall M \in S), (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) : M = \alpha D + \beta I$

0,25 ☐ ☐ **b** Établir que $(S, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa $\dim$

0,25 ☐ **3** ☐ **a** Montrer que S est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que $(S, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

0,50 ☐ ☐ **c** Résoudre dans S l'équation d'inconnue M suivante : $M^3 = M$.

☐ **4** ☐ Soit : $D^n = \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_{n \text{ fois le } D}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $D^0 = I$

0,25 ☐ ☐ **a** Calculer D^n en fonction de n .

0,50 ☐ ☐ **b** Déterminer $(D + I)^n$ en fonction de n . (pensez au binôme de Newton)

■ **Exercice Numéro 2 : (03,50 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ On pose : $f(z) = z + \frac{4}{z}$; $\forall z \in \mathbb{C}^*$

0,50 ☐☐**1** Déterminer z_1 ; z_2 les solutions de l'équation (E) : $f(z) = -2$.

0,50 ☐☐**2 a** Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique avec $\Im m(z_1) > \Im m(z_2)$

0,75 ☐☐**b** Montrer que : $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{2017}$.

☐☐**3** Soient les points : $A(\alpha)$; $B(z_1)$; $C(z_2)$; $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

0,50 ☐☐**a** Déterminer la valeur de α pour laquelle ABC soit équilatéral.

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^* : f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 4) = 0$

0,50 ☐☐**c** En déduire (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$.

0,25 ☐☐**d** Vérifier que les points A ; B ; C appartiennent à (Γ) .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,00 points)**

0,50 ☐☐**1 a** Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : (2^{3n} - 1)$ est un multiple de 7

0,25 ☐☐**b** En déduire que : $(2^{3n+1} - 2)$ est un multiple de 7.

0,25 ☐☐**c** Et Montrer que : $(2^{3n+2} - 4)$ est un multiple de 7 aussi.

0,25 ☐☐**2** Déterminer les restes de la division des puissances de 2 par 7.

☐☐**3** Soit le nombre : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$; $\forall p \in \mathbb{N}$.

0,25 ☐☐**a** Si $p = 3n$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ?

0,25 ☐☐**b** Prouver l'implication suivante : $p = 3n + 1 \Rightarrow 7/p$.

0,50 ☐☐**c** Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

☐☐**4** On considère les nombres a et b écrits dans le système décimal par :

$$a = \overline{1001001000}_{(2)} \quad \text{et} \quad b = \overline{1000100010000}_{(2)}$$

0,50 ☐☐**a** Vérifier que ces deux nombres sont de la forme A_p .

0,25 ☐☐**b** Les nombres a et b sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.

■ **Exercice Numéro 4 : (03,50 points)**

☐☐**1** Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}$$

☐☐☐ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,75 ☐☐**a** Montrer que : $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}}$

0,50 ☐☐**b** Montrer que : $\exists ! \lambda \in I : f(\lambda) = \lambda$.

0,50	☐ ☐ c	Montrer que : $(\forall x \in I) ; f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
	☐ 2 ☐	On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$
0,25	☐ ☐ a	Vérifier que : $f(I) \subseteq I$.
0,50	☐ ☐ b	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$.
0,50	☐ ☐ c	Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \lambda \leq \frac{\sqrt{2}}{2} u_n - \lambda $.
0,50	☐ ☐ d	Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
■ Exercice Numéro 5 : (05,50 points)		
	☐ ☐ ☐	Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
		$f_n(x) = x - n \ln x \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$
0,50	☐ 1 ☐ a	Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$
0,25	☐ ☐ b	Étudier les variations de la fonction f_n .
0,50	☐ ☐ c	En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n et que $0 < u_n < n < v_n$.
0,25	☐ 2 ☐ a	Montrer que : $(\forall n \geq 3) : 1 < u_n < e$.
0,25	☐ ☐ b	Montrer que : $(\forall n \geq 3) : f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
0,25	☐ ☐ c	Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.
0,25	☐ ☐ d	En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
0,50	☐ ☐ e	En encadrant $\ln(u_n)$, Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$
0,50	☐ ☐ f	Démontrer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} \right) = 1 ; \lim_{n \rightarrow \infty} n(u_n - 1) = 1$
0,25	☐ 3 ☐ a	Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$
0,50	☐ ☐ b	Calculer $f_n(n \ln n)$ puis en déduire que : $(\forall n \geq 3) : n \ln(n) < v_n$.
0,25	☐ ☐ c	Montrer que : $(\forall x > 0) : x > 2 \ln x$.
0,25	☐ ☐ d	Déterminer le signe de la quantité $f_n(2n \ln(n))$.
0,50	☐ ☐ e	Montrer que : $(\forall n \geq 3) ; n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
0,50	☐ ☐ f	Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n}{n \ln n} \right) = 1$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
10^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (01,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$

☐☐☐ On considère l'application s définie sur $\mathbb{R}$ ainsi : $s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que s est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}, *)$.

0,50 ☐ **2** ☐ En déduire la structure de $(\mathbb{R}, *)$ en déterminant son élément neutre et le symétrique de tout élément dans $(\mathbb{R}, *)$.

0,50 ☐ **3** ☐ On pose : $\forall x \in \mathbb{R} ; \forall n \geq 2 : x^{(n)} = x * x * \dots * x$, calculer $x^{(n)}$.

■ **Exercice Numéro 2 : (01,00 points)**

☐☐☐ On considère le sous-ensemble E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; a + d = b + c \right\}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 ☐ **2** ☐ Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel E .

■ **Exercice Numéro 3 : (04,00 points)**

☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐☐☐ On considère les nombres complexes z_n définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

☐☐☐ On note $z_n = aff(A_n)$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

0,50 ☐ **1 a** ☐ Écrire sous forme exponentielle les nombres z_1 à z_6 .

0,50 ☐☐ **b** ☐ Placer les points A_0 à A_6 dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

☐ **2** ☐ On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

$$\text{et} \quad z_{n+2} - z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (z_{n+1} - z_n)$$

- 0,50 ☐ ☐ **a** En déduire une relation reliant d_{n+1} et d_n ; $\forall n \in \mathbb{N}$ puis exprimer d_n en fonction de n et d_0 .
- 0,50 ☐ ☐ **b** Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n .
- 0,50 ☐ ☐ **c** On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : L_n = \sum_{k=0}^n A_k A_{k+1}$
Déterminer l'expression de L_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n)$
- ☐ **3** ☐ On pose : $a_n \equiv \arg(z_n) [2\pi]$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Établir une relation entre a_{n+1} et a_n .
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \equiv \left(\frac{n\pi}{6}\right) [2\pi]$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Pour quelles valeurs de l'entier n les points $O ; A_0 ; A_n$ sont alignés ?

■ Exercice Numéro 4 : (04,00 points)

- I** ☐ ☐ On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où $x, y \in \mathbb{Z}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Vérifier que le couple (13,3) est une solution de l'équation (E).
- 0,50 ☐ **2** ☐ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
- II** ☐ ☐ Soient (x, a, c, g) des entiers naturels tels que : $25g - 108c = 1$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Démontrer que si $x \equiv a [7]$ et $x \equiv a [19]$, alors $x \equiv a [133]$
- 0,50 ☐ **2 a** ☐ Vérifier que : $\forall x \in \llbracket 1; 6 \rrbracket ; x^6 \equiv 1 [7]$. Avec $(\llbracket 1; 6 \rrbracket = [1; 6] \cap \mathbb{N})$
- 0,50 ☐ ☐ **b** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que : $a^{108} \equiv 1 [7]$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** En déduire que : $(a^{25})^g \equiv a [7]$.
- 0,50 ☐ ☐ **d** On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que : $(a^{25})^g \equiv a [133]$.
- 0,50 ☐ ☐ **e** On admet que pour tout entier naturel a : $(a^{25})^g \equiv a [19]$
Démontrer que : $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

■ Exercice Numéro 5 : (03,50 points)

- I** ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$
- ☐ ☐ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.
- 0,50 ☐ **1** ☐ Déterminer D_f le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f .
- 0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
- 0,50 ☐ **3** ☐ Étudier les variations de la fonction f sur D_f .
- 0,25 ☐ **4** ☐ Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 0,50 ☐ **5** ☐ Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \geq \frac{3}{2}$ tel que $f(\ell) = \ell$.

II ☐ ☐ On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ Montrer qu'il existe un réel $q \in]0,1[$ tel que : $\left(\forall x \geq \frac{3}{2}\right) : |f'(x)| \leq q$

0,50 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \ell| \leq q |u_n - \ell|$.

0,50 ☐ **3** ☐ Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$

■ Exercice Numéro 6 : (06,00 points)

I ☐ ☐ On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x}{(x-1)^2 + 1}$$

0,75 ☐ **1** ☐ Déterminer D_g , le domaine de définition de g .

0,75 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall x \in D_g) : g'(x) = \frac{2x-4}{[(x-1)^2 + 1]^2}$

0,75 ☐ **3** ☐ Dresser le tableau de variation de g en déterminant ses limites aux bornes de son domaine de définition D_g .

0,75 ☐ **4** ☐ Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1,2 ; 1,4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On donne : $\operatorname{Arctan}(2,5) \approx 1,19$ et $\operatorname{Arctan}(5) \approx 1,37$

0,75 ☐ **5** ☐ En déduire le signe de $g(x)$ sur D_g .

II ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

0,75 ☐ **1** ☐ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

0,75 ☐ **2** ☐ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

0,75 ☐ **3** ☐ Donner le tableau de variations de f sans calculer $f(\alpha)$.

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
11^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (05,00 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 Soit $E = \left\{ M(x, y) = xI + yJ \ ; \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- 0,50 ☐☐☐ **1** Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- 0,25 ☐☐☐ **2 a** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- 0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif non intègre.
- 0,50 ☐☐☐ **3 a** Déterminer l'ensemble des éléments de E qui admettent un inverse dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- 0,50 ☐☐☐ **b** Montrer que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
- ☐☐☐ **4** On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne suivant :
 $\forall (a, b), (x, y) \in G : (a, b) \top (x, y) = (ax ; ay + bx)$
☐☐☐ Et on considère l'application φ définie ainsi :
- $$\begin{aligned} \varphi : (F, \times) &\mapsto (G, \top) \\ M(x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$
- 0,25 ☐☐☐ **a** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.
- 0,50 ☐☐☐ **b** Quelle est la structure algébrique de l'ensemble $(G, \top)$?
- 0,50 ☐☐☐ **c** Déterminer le symétrique de chaque élément (x, y) dans $(G, \top)$.
- ☐☐☐ **5** On pose : $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
- 0,50 ☐☐☐ **a** Calculer les matrices M^2 et M^3 .
- 0,50 ☐☐☐ **b** En utilisant un raisonnement par récurrence, trouver une expression de M^n pour tout $n \geq 2$.
- 0,50 ☐☐☐ **c** Déterminer $(x, y)^n = (x, y) \top (x, y) \top \dots \top (x, y) ; \forall n \geq 2 ; \forall (x, y) \in G$.

■ **Exercice Numéro 2 : (04,00 points)**

- ☐☐☐ **I** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
☐☐☐ Soient : $A(a) ; B(b) ; C(c)$ avec $a = -2i$; $b = -1 + i\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3} + i$
- 0,25 ☐☐☐ **1 a** Vérifier que le point O est le centre du cercle circonscrit de ABC
- 0,25 ☐☐☐ **b** Soit G le centre de gravité de ABC, Déterminer $g = aff(G)$.
- ☐☐☐ **2** Soit $H(h)$ un point du plan ; avec $h = (\sqrt{3} - 1)(1 + i)$

- 0,50 ☐ ☐ **a** Calculer : $\arg\left(\frac{c-b}{h-a}\right)$ et $\arg\left(\frac{c-a}{h-b}\right)$
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC
(orthocentre = intersection des hauteurs)
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que les points $O; G; H$ sont alignés.
- II** ☐ ☐ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
- $$(E) : (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha) \quad ; \quad \alpha \in I = \left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$$
- 0,50 ☐ **1 a** Soit z_0 une solution de (E) , Montrer que $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que z_0 est un nombre réel.
- 0,50 ☐ **2 a** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}\right)$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Soit z un nombre complexe. On pose $z = \tan \varphi$; $\varphi \in I$.
Montrer que l'équation (E) est équivalente à une équation (E') d'inconnue φ puis résoudre (E') dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

- 0,25 ☐ **1 a** Déterminer les restes possibles modulo 7 de x^2 avec $x \in \mathbb{Z}$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 [7]$.
- 0,25 ☐ **2 a** Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le reste modulo 7 de 2^n .
- 0,25 ☐ ☐ **b** Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009} .
- 0,50 ☐ ☐ **c** Déterminer les entiers naturels n tels que $(107^n + 107^{2n} + 107^{3n})$ soit divisible par l'entier 7.
- ☐ **3** ☐ Soit a un entier naturel non divisible par l'entier 7.
- 0,50 ☐ ☐ **a** On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 [7]$
Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie l'égalité : $a^r \equiv 1 [7]$.
- 0,25 ☐ ☐ **b** Quelles sont les valeurs possibles de k .
- 0,50 ☐ **4** ☐ Soit : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
Montrer que : $A_{2012} \equiv 6 [7]$.

■ Exercice Numéro 4 : (03,50 points)

- ☐ ☐ ☐ Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{12} \right[$ par :
- $$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = \left[\frac{1}{2} , +\infty \right[$.

- ☐ **2** ☐ On pose : $g = f^{-1}$ et $K = [1,2]$.
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in K$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $g(K) \subseteq K$.
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que : $\forall (x,t) \in K^2 : |g(x) - g(t)| \leq \frac{1}{2}|x - t|$
- ☐ **4** ☐ On considère la suite numérique définie ainsi :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in K$.
- 0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- 0,50 ☐ ☐ **c** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

■ Exercice Numéro 5 : (04,50 points)

- ☐ ☐ ☐ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
- $$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$
- 0,50 ☐ **1** ☐ Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
- 0,25 ☐ **2** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
- 0,50 ☐ **3** ☐ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$
- ☐ **4** ☐ On définit les suites (α_n) et (β_n) par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$
- 0,25 ☐ ☐ **a** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \beta_n = 1 + \frac{1}{1 + \alpha_n}$
- 0,25 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha_n \leq \beta_n$
- 0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que la suite (α_n) est croissante et (β_n) est décroissante.
- 0,50 ☐ ☐ **d** Montrer que (α_n) et (β_n) convergent et vers la même limite.
- 0,50 ☐ **5** **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$
- 0,50 ☐ ☐ **b** En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 0,50 ☐ ☐ **c** Déterminer un entier naturel N à partir duquel on aurait :
- $$(\forall n \geq N) ; |u_n - \sqrt{2}| < 10^{-2}$$

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Professeur Badr Eddine El Fatih



Ministère de l'Éducation Nationale
 De la Formation professionnelle
 de l'Enseignement supérieur
 & de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
12^{ème} Blanc 2021

■ **Exercice Numéro 1 : (02,50 points)**

☐☐☐ **Rappel** : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

☐☐☐ Soient $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & pb \\ b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$

0,75 ☐☒☐ Vérifier que $J^2 = pI$ puis montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

☐☒☐ On suppose que $p < 0$ et on pose $E^* = E - \{\theta\}$.

☐☐☐ On considère l'application φ de E^* dans $\mathbb{C}^*$ définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (E^*, \times) &\mapsto (\mathbb{C}^*, \times) \\ M(x, y) &\mapsto x + i y \sqrt{-p} \end{aligned}$$

0,50 ☐☐☒ a Montrer que φ est un isomorphisme de $(E^*, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

0,50 ☐☐☒ b Quelle est la structure algébrique de l'ensemble $(E^*, \times)$?

0,75 ☐☐☒ c Développer $(\sqrt{-p} + i)^2$ puis en déduire les solutions dans l'ensemble E^* de l'équation suivante : $X^2 = (-p - 1)I + 2J$

■ **Exercice Numéro 2 : (02,00 points)**

☐☐☐ On pose : $A(x) = x e^x$; $B(x) = e^x$; $C(x) = e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

☐☐☐ Soit $F = \{ f(x) = (\alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \}$

0,50 ☐☒☐ a Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0,50 ☐☐☒ b Montrer que (A, B, C) est une base de F .

0,50 ☐☒☐ 2 Soit $f \in F$ et soit f' sa fonction dérivée.

Montrer que $f' \in F$ puis déterminer les coordonnées de f' dans la base (A, B, C) .

0,50 ☐☒☐ 3 Soit $f = \alpha A + \beta B + \gamma C$ un élément de F .

Montrer que si $\alpha\gamma \neq 0$ alors (f, f', f'') est une base de F .

■ **Exercice Numéro 3 : (03,50 points)**

- ☐☐☐ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- ☐☐☐ Soit $(E) : z^3 + (4 \cos \theta - 2)z^2 + (4 - 8 \cos \theta)z - 8 = 0 ; z \in \mathbb{C} ; \theta \in]0, \pi[$
- 0,50 ☐**1**☐**a** Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle indépendante de θ .
- 0,50 ☐☐**b** Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.
- ☐**2**☐ Soient les points : $A(2) ; B(-2 e^{-i\theta}) ; C(-2 e^{i\theta})$.
- 0,50 ☐☐**a** Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
- 0,50 ☐☐**b** Déterminer la valeur de θ pour laquelle ABC soit un triangle équilatéral direct.
- 0,50 ☐☐**c** Déterminer z_E et z_F affixes des points E et F respectivement, milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.
- 0,50 ☐☐**d** Montrer que : $\left(\frac{z_E}{z_F} \times \frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} \right) \in \mathbb{R}$
- 0,50 ☐☐**e** Puis en déduire que les points $A ; O ; E ; F$ sont cocycliques.

■ **Exercice Numéro 4 : (03,00 points)**

- I** ☐☐☐ On considère l'équation $(E) : 7x - 6y = 1 ; (x, y) \in \mathbb{N}^2$.
- 0,25 ☐**1**☐ Donner une solution particulière de l'équation (E) .
- 0,50 ☐**2**☐ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) .
- II** ☐☐☐ On se propose de déterminer les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^{2*}$ vérifiant la relation suivante : $(F) : 7^n - 3 \times 2^m = 1$
- 0,25 ☐**1**☐ Montrer qu'il y a exactement deux couples de solutions pour $m \leq 4$.
- ☐**2**☐ On suppose maintenant que : $m \geq 5$.
- 0,25 ☐☐**a** Montrer que si le couple (n, m) vérifie (F) alors $7^n \equiv 1 [32]$.
- 0,50 ☐☐**b** En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
- 0,25 ☐☐**c** En déduire que si (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 [5]$.
- 0,50 ☐☐**d** Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) ?
- 0,50 ☐**3**☐ Résoudre ainsi dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation (F) .

■ **Exercice Numéro 5 : (09,00 points)**

I ☐ ☐ Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et soit (x_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + (n+1)x_n^2} & ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

0,50 ☐ **1** ☐ On suppose dans cette question que $a = 1$.
Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n = \frac{1}{n+1}$

☐ **2** ☐ On suppose maintenant que $a > 1$.

0,50 ☐ ☐ **a** Montrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée.

0,25 ☐ ☐ **b** En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

☐ **3** ☐ On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + (n+1)x^2}$$

0,25 ☐ ☐ **a** Montrer que la fonction f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$

0,75 ☐ ☐ **c** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = (k+1)x_k$

0,75 ☐ ☐ **d** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{n-1 + \frac{1}{x_1}} \leq x_k \leq \frac{1}{n+1}$

0,50 ☐ ☐ **e** Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} (n x_n)$

II ☐ ☐ On considère la fonction numérique g_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \left(x - n + \frac{n \ln x}{2}\right) ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

0,50 ☐ **1** ☐ Étudier les variations de la fonction g_n .

0,75 ☐ **2 a** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n > 0$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

0,50 ☐ ☐ **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 \leq \alpha_n \leq e^2$.

0,75 ☐ ☐ **c** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(\alpha_n) = \left(2 - \frac{2\alpha_n}{n}\right)$

0,75 ☐ **3 a** Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n .

0,50 ☐ ☐ **b** Puis en déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

0,50 ☐ **4** ☐ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

0,75 ☐ **5** ☐ Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\alpha_n) = 2$



التحضير الجيد للامتحان الوطني الموحد

عرض خاص بشعبة العلوم الرياضية

الدعم عن بعد

تلاميذ جميع مدن المغرب من طنجة إلى الكويرة

- الاستفادة من خدمة تصحيح التمارين و الفروض و الامتحانات.
- الاستفادة من حصص مركزة مضمونها مراجعة شاملة للمقرر الدراسي.
- شهر أبريل خاص بمراجعة الدروس و التركيز على الخصائص المهمة فقط.
- شهر ماي خاص بإنجاز و تصحيح 12 امتحان تجريبي من هذا الكتاب.
- عدد الساعات المقررة لشهر أبريل هو 30 ساعة - فيديوهات للمراجعة.
- عدد الساعات المقررة لشهر ماي هو 36 ساعة - فيديوهات للتصحيح.
- سوف يتم التركيز على ما هو مهم للامتحان الوطني و المباريات فقط.



06 - 60 - 34 - 41 - 36

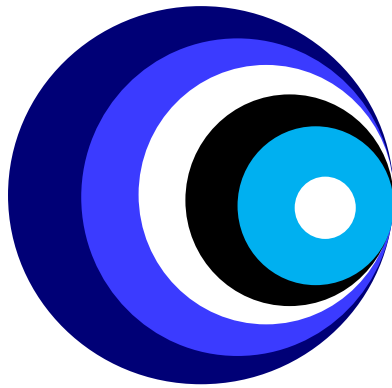
للتسجيل

أثمنة جد مناسبة للجميع

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

Ouarzazate 2020

Dimanche 20 Décembre 2020



Mes Propositions de Correction

2015 normale et de Rattrapage

2016 normale et de Rattrapage

2017 normale et de Rattrapage

2018 normale et de Rattrapage

2019 normale et de Rattrapage

2020 normale et de Rattrapage

Examens Oujda et Khmisset

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

On calcule directement le discriminant de cette équation à l'aide de la formule connue :

$$\begin{aligned}\Delta &= (5 + i\sqrt{3})^2 - 4(4 + 4i\sqrt{3}) \\ &= 25 + 10i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 - 16 - 16i\sqrt{3} \\ &= 25 + 10i\sqrt{3} - 3 - 16 - 16i\sqrt{3} \\ &= 6 - 6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant : $\Delta = 6 - 6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (1)$

De l'autre côté, On développe $(3 - i\sqrt{3})^2$ on trouve :

$$(3 - i\sqrt{3})^2 = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = 6 - 6i\sqrt{3}$$

D'où le résultat suivant :

$$(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$

Remarque : la question posée est une question de vérification. C-à-d que le résultat est connu à priori. Et on vous demande de le redémontrer et de le redécouvrir. Mais si on reformule la question ainsi : écrire sous la forme d'un carré, alors là je vous propose le procédé suivant :

Premièrement : On doit écrire $(6 - 6i\sqrt{3})$ sous sa forme exponentielle $re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 6 - 6i\sqrt{3} &= 12 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 12 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right) \\ &= 12e^{-\frac{i\pi}{3}}\end{aligned}$$

Il est facile maintenant de trouver les racines carrées de $12e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Rappel : les racines $n^{\text{ème}}$ du nombre complexe $re^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$.
k et n sont deux entiers naturels qui vérifient $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n - 1$.

D'après ce petit rappel, on déduit que les racines carrées de $12e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sont :

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[2]{12} e^{i\left(\frac{-\pi + 2 \times 0 \times \pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \\ &= 3 - i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[2]{12} e^{i\left(\frac{-\pi + 2 \times 1 \times \pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3} e^{\frac{5i\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) \\ &= 2\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \\ &= -3 + i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalement on écrit : $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2 = (-3 + i\sqrt{3})^2$

La Question : 1) b)

$$a = \frac{(5 + i\sqrt{3}) - (3 - i\sqrt{3})}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$b = \frac{(5 + i\sqrt{3}) + (3 - i\sqrt{3})}{2} = 4 \in \mathbb{R}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}(1 - i\sqrt{3})a &= (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) \\ &= 1^2 - (i\sqrt{3})^2 \\ &= 1 - (-3) = 4 = b\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soit R la rotation mentionnée dans cette question

$$\begin{aligned}R(O) = B_1 &\Leftrightarrow (z_{B_1} - z_A) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_O - z_A) \\ &\Leftrightarrow (b_1 - a) = i(0 - a) \\ &\Leftrightarrow b_1 = a(1 - i) \\ &\Leftrightarrow b_1 = (1 + \sqrt{3})(1 - i) \\ &\Leftrightarrow b_1 = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Notons par H la transformation du plan (P) qui associe B à B₁

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B_1} - z_A} \right) &= \frac{4 - 1 - i\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - i - 1 - i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} - i)} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B_1} - z_A}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow (z_B - z_A) = \sqrt{3}(z_{B_1} - z_A) \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{3} \overrightarrow{AB_1}$$

Donc B est l'image de B_1 par l'homothétie H de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

La Question : 2) c)

$$\frac{b}{b-a} = \frac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a-a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1} \\ = \frac{1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\left|1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

La Question : 2) d)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OAB et soit C un point du cercle $(\mathcal{C})$ différent de O et de B .

$$C \in (\mathcal{C}) \Rightarrow O, A, B \text{ et } C \text{ sont circulaires} \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_A - z_B}\right) [\pi] \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{0 - c}{a - c}\right) \equiv \arg\left(\frac{0 - b}{a - b}\right) [\pi] \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{-c}{a - c}\right) \equiv \arg\left(\frac{-b}{a - b}\right) [\pi] \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a - c}\right) + \pi \equiv \arg\left(\frac{b}{a - b}\right) + \pi [\pi] \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a - c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a - b}\right) [\pi] \\ \Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a - c}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$$

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

Rappel : (Théorème de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} ; au + bv = 1$$

$$\text{On a : } 1436(1051) + 2015(-749) = 1$$

$$\text{Alors : } 2015 \wedge 1436 = 1$$

La Question : 2) a)

Soit x un entier relatif vérifiant $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x^{1439} - 1436 = 2015k$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x^{1439} - 2015k = 1436$$

Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015

$$\Rightarrow d/x \text{ et } d/2015$$

$$\Rightarrow d/x^{1439} \text{ et } d/2015k$$

$$\Rightarrow d/(x^{1439} - 2015k)$$

$$\Rightarrow d/1436$$

La Question : 2) b)

Soit $\delta = 2015 \wedge x$

$$\Rightarrow \delta/2015 \text{ et } \delta/x$$

$$\Rightarrow \delta/2015 \text{ et } \delta/1436 ; \text{ selon 2)a)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta/(2015 \times 749) \\ \delta/(1436 \times 1051) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta/(1436 \times 1051 - 2015 \times 749)$$

$$\Rightarrow \delta/1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } \delta = 1 \\ \text{oubien } \delta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta = 1 ; \text{ car } 1 > -1$$

$$\Rightarrow 2015 \wedge x = 1$$

La Question : 3) a)

Rappel : (Théorème de Fermat)

La Forme générale :

$$p \in \mathbb{P} \Rightarrow (\forall a \in \mathbb{Z}) : a^p \equiv a [p]$$

La Forme réduite :

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

Pour commencer, il est très facile de montrer que 5, 13 et 31 sont tous des nombres premiers. Et cela à l'aide du critère connu par tout le monde (test de primalité). Aussi, une simple calculatrice nous assure les égalités suivantes :

$$\begin{cases} 1440 = 360 \times 4 \\ 1440 = 120 \times 12 \\ 1440 = 30 \times 48 \end{cases}$$

$$\textbf{Rappel : } x \wedge abc = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge a = 1 \\ x \wedge b = 1 \\ x \wedge c = 1 \end{cases}$$

$$x \wedge 2015 = 1 \Leftrightarrow x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases}$$

Et voilà ! on dispose maintenant des armes nécessaires pour appliquer le Théorème de Fermat sous sa forme réduite :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 5 = 1 \end{cases} &\Rightarrow x^{5-1} \equiv 1[5] \\ &\Rightarrow x^4 \equiv 1[5] \\ &\Rightarrow (x^4)^{360} \equiv 1^{360}[5] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 13 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 13 = 1 \end{cases} &\Rightarrow x^{13-1} \equiv 1[13] \\ &\Rightarrow x^{12} \equiv 1[13] \\ &\Rightarrow (x^{12})^{120} \equiv 1^{120}[13] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 31 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases} &\Rightarrow x^{31-1} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow x^{30} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow (x^{30})^{48} \equiv 1^{48}[31] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[31] \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : $\begin{cases} a/n \\ b/n \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/n$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 5/(x^{1440} - 1) \\ 13/(x^{1440} - 1) \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow (5 \times 13)/(x^{1440} - 1) \\ &\Rightarrow 65/(x^{1440} - 1) \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[65] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^{1440} \equiv 1[65] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 65/(x^{1440} - 1) \\ 31/(x^{1440} - 1) \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow (65 \times 31)/(x^{1440} - 1) \\ &\Rightarrow 2015/(x^{1440} - 1) \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[2015] \end{aligned}$$

La Question : 4)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^{1439} \equiv 1436[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \cdot x^{1439} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^{1440} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1436x \equiv 1[2015] & (1) \\ 1436 \times 1051 \equiv 1[2015] & (2) \end{cases} \\ (1) - (2) &\Rightarrow 1436(x - 1051) \equiv 0[2015] \\ &\Rightarrow 2015/1436(x - 1051) \\ &\Rightarrow 2015/(x - 1051) ; \text{ Gauss} \\ &\Rightarrow x \equiv 1051[2015] \end{aligned}$$

Remarque : On peut montrer que $2015 \wedge 1436 = 1$ à l'aide du procédé de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2015 et de 1436

$$\text{On a : } \begin{cases} 2015 = 5 \times 13 \times 31 \\ 1436 = 2^2 \times 359 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } (5 \times 13 \times 31) \wedge (2^2 \times 359) = 1$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

L'application φ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, +) &\mapsto (E, \top) \\ x &\mapsto M(x - 1) \end{aligned}$$

Le but de cette question est de montrer la chose suivante : $\varphi(x + y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$

Pour commencer, soient x et y deux nombres réels .

$$\begin{aligned} \varphi(x) \top \varphi(y) &= M(x - 1) \top M(y - 1) \\ &= M(x - 1 + y - 1 + 1) \\ &= M(x + y - 1) \\ &= \varphi(x + y) \end{aligned}$$

D'où φ est un homomorphisme de groupes.

La Question : 1) b)

Premièrement, On veut bien montrer que φ est une bijection. Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(x) = M(x - 1)$ dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle admet une seule solution réelle .

Etant donnée M une matrice de E , alors par définition de l'ensemble E on peut écrire M sous la forme $M = M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ avec x est un nombre réel. Donc $\varphi(x + 1) = M(x)$

c-à-d : $(\forall M \in E)(\exists ! x \in \mathbb{R}) : \varphi(x + 1) = M(x)$

Et d'après la définition d'une application bijective on conclut que φ est bien une bijection

Ainsi, l'image du groupe $(\mathbb{R}, +)$ par φ est le groupe $(E, \top)$ (car $\varphi(\mathbb{R}) = E$)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G, *)$ vers un ensemble $(F, \top)$. alors l'image du groupe $(G, *)$ par f est le groupe $(f(G), \top)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(E, \top)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(\mathbb{R}, +)$ par le biais de l'application φ . Autrement-dit, il suffit d'exploiter l'égalité $\varphi(\mathbb{R}, +) = (E, \top)$.

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif alors $(E, \top)$ l'est aussi. Comme 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$

alors $\varphi(0)$ sera l'élément neutre pour $(E, \top)$ avec

$$\varphi(0) = M(0 - 1) = M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ Donc la}$$

matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sera l'élément neutre pour $(E, \top)$.

Le symétrique d'un élément $\varphi(x)$ dans (E, τ) est l'élément $\varphi(-x)$ dans (E, τ) (car $-x$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi(-x) = M(-x - 1)$)

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & y(1-x) + x(1+2y) \\ -2x(1-y) - 2y(1+2x) & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & x+y+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2x+2y+2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & (x+y+xy) \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix} \\ &= M(x+y+xy) \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées, d'ordre 2 à coefficients réels, qui s'écrivent sous la forme $M(x)$ définie dans l'énoncé. Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de E , Alors On a d'après la question précédente : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$ comme x et y sont deux nombres réels alors $(x+y+xy)$ est aussi un nombre réel d'où : $\forall M(x), M(y) \in E : M(x) \times M(y) \in E$ Donc E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par la multiplication matricielle $\times$ dans E .
 $\times$ est commutative dans E car :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= M(x+y+xy) \\ &= M(y+x+yx) \\ &= M(y) \times M(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Soient $M(x)$, $M(y)$ et $M(z)$ trois éléments de E .

$$\begin{aligned} M(x) \times (M(y) \times M(z)) &= M(x) \times M(y+z+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M(x) \times M(y)) \tau (M(x) \times M(z)) &= M(x+y+xy) \tau M(x+z+xz) \\ &= M(x+y+xy+x+z+xz+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (**) \end{aligned}$$

D'après les résultats (*) et (**) on tire :

$$\begin{aligned} M(x) \times (M(y) \times M(z)) &= (M(x) \times M(y)) \tau (M(x) \times M(z)) \end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive à gauche par rapport à τ .
on vérifie aisément la distributivité à droite de $\times$ par rapport à τ pour conclure finalement que $\times$ est distributive par rapport à τ .

Soit $M(x)$ un élément de .

$$\begin{aligned} M(x) \tau M(-1) &= M(x-1+1) = M(x) \\ M(-1) \tau M(x) &= M(-1+x+1) = M(x) \end{aligned}$$

Donc $M(-1)$ est l'élément neutre du groupe (E, τ) pour la matrice unité I .

on a tout d'abord $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 \\ -2 \times 0 & 1+2 \times 0 \end{pmatrix}$

soit $M(x)$ un élément de E on a :

$$M(x) \times M(0) = M(x+0+x0) = M(x)$$

$$M(0) \times M(x) = M(0+x+0x) = M(x)$$

Donc $M(0) = I$ est l'élément neutre de la multiplication matricielle $\times$ dans E .

La Question : 3) a)

Soit x un nombre réel différent de -1 ,

$$\begin{aligned} M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) &= M\left(x + \frac{-x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x}\right) \\ &= M\left(\frac{x^2+x-x-x^2}{1+x}\right) \\ &= M(0) = I \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : soit E un ensemble muni de deux lois de compositions internes $*$ et τ .

$(E, *, \tau)$ est un corps Si et seulement si :

$(E, *)$ est un groupe abélien (commutatif)

$(E \setminus \{e\}, \tau)$ est un groupe

τ est distributive par rapport à $*$

Avec e est l'élément neutre du groupe $(E, *)$.

Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E \setminus \{M(-1)\}$

On a : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$

Comme $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y(x+1) \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Donc $x+y(x+1) \neq -1$

c-à-d : $(x+y+xy) \neq -1$

D'où : $M(x+y+xy) \in E \setminus \{M(-1)\}$

Donc $\times$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $E \setminus \{M(-1)\}$.

Comme $\times$ est associative dans E alors elle l'est aussi dans $E \setminus \{M(-1)\}$. comme $I = M(0)$ est l'élément neutre pour $(E, \times)$ et $M(0) \in E \setminus \{M(-1)\}$ alors I est aussi l'élément neutre pour $\times$ dans $E \setminus \{M(-1)\}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$ alors tout élément $M(x)$ de $E \setminus \{M(-1)\}$ admet un symétrique $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ dans $E \setminus \{M(-1)\}$

Finalement : On a trouvé que x est une loi de composition interne dans $E \setminus \{M(-1)\}$, associative, admet un élément neutre et qui vérifie la symétrie des éléments de $E \setminus \{M(-1)\}$ alors $(E \setminus \{M(-1)\}; x)$ est un groupe (1).

Mais d'après les questions précédentes on a vu que (E, T) est un groupe (2) . et aussi que x est distributive par rapport à T (3). Donc on tire des résultats (1) , (2) et (3) , à l'aide du rappel que (E, T, x) est bien un corps qui est commutatif car la loi x est commutative dans E .

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + (\ln x)^2 \right) = +\infty$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $+\infty$ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY)

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 + (\ln x)^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + x(\ln x)^2 \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})^2 (2 \ln \sqrt{x})^2 \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \sqrt{x}}} 4t^2 \ln t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{(4t)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(t \ln t)}_{\rightarrow 0} = 0 = f(0) \end{aligned}$$

Alors la fonction f est bien continue à droite en 0 .

La Question : I) 2) b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + (\ln x)^2 = +\infty$$

$\searrow$
 $-\infty$

l'axe (OY) est tangente à (C) au voisinage de 0 .

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1 \\ &= (\ln x + 1)^2 > 0 ; \forall x > 0 \end{aligned}$$

Alors la fonction f est purement croissante.

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = (\ln x + 1)^2$$

f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant un carré d'une autre fonction aussi dérivable. La dérivée seconde f'' est définie par :

$$f''(x) = 2(\ln x + 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{e} \text{ Alors } f''(x) = 0$$

$$\text{Si } x > \frac{1}{e} \text{ Alors } f''(x) > 0$$

$$\text{Si } x < \frac{1}{e} \text{ Alors } f''(x) < 0$$

Alors $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion à (C) .

La Question : I) 3) b)

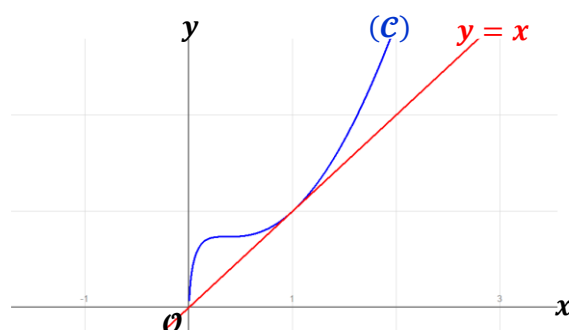
$$f(x) - x = x(1 + (\ln x)^2) - x = x(\ln x)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \text{signe}(f(x) - x) &\equiv \text{signe}(x(\ln x)^2) \\ &\equiv \text{signe}(x) ; \text{ car } (\ln x)^2 > 0 \\ &\equiv (+) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0 ; f(x) - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[; f(x) \geq x$$

La Question : I) 3) c)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Soit (P_n) la proposition définie comme suit :
 $(P_n) : \frac{1}{e} \leq u_n < 1$. Examinons la véracité de (P_n) pour chaque n de $\mathbb{N}$ à l'aide du procédé de récurrence. L'instance (P_0) est validée car tout simplement $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$.

Soit n dans $\mathbb{N}$ et on suppose que (P_n) soit vraie.

$$\begin{aligned}
(P_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow e^{-1} \leq u_n < 1 \\
&\Rightarrow f(e^{-1}) \leq f(u_n) < f(1) \\
&\Rightarrow \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1 ; \text{ car } f \text{ est } \nearrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{e} < f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} l'instance(P_0) \text{ est vraie} \\ l'instance(P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Donc (P_n) est toujours vraie

C-à-d : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{e} \leq u_n < 1$

La Question : II) 2)

$$(\forall x > 0) : f(x) \geq x$$

$$(\text{pour } x = u_n) : f(u_n) \geq u_n$$

$$\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq \frac{1}{e} > 0$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n$$

Et par définition de la croissance des suites on conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Or, $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < 1$ (majorée par 1)

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle l .

La Question : II) 3) a)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{e} \leq u_n < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} \leq l \leq 1 ; \text{ passage aux limites}$$

La Question : II) 3) b)

$$(u_n) : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{e} \end{cases}$$

f est une fonction continue et croissante, soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$; Donc l vérifie : $l = f(l)$.

$$\Leftrightarrow l(1 + (\ln l)^2) = l$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\ln l)^2 = 1 ; l \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln l)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln l = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 1$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Une condition suffisante pour qu'une fonction f admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue. Il est évident que la fonction h est bien continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme étant somme de deux fonctions trivialement continues sur $]0, +\infty[$. il reste à démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; H'(x) = h(x)$$

$$\text{Soit } x > 0 ; H'(x) = \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x} + 2x \ln x\right)$$

$$= \frac{-x}{2} + \frac{x}{2} + x \ln x$$

$$= x \ln x$$

$$= h(x)$$

La Question : III) 1) b)

Je propose une démarche à base d'une intégration par parties.

Rappel : l'intégration par parties est la méthode à travers laquelle on transforme l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales dans le but de simplifier le calcul :

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^x \underbrace{t}_{u'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{v(t)} dt &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \cdot (\ln t)^2 \right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \cdot 2 \ln t \cdot \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \int_1^x t \ln t dt
\end{aligned}$$

La Question : III) 1) c)

Evaluons d'abord l'intégrale suivante : $\int_1^x t \ln t dt$

$$\int_1^x (t \ln t) dt = \int_1^x H'(t) dt = [H(t)]_1^x$$

$$= H(x) - H(1)$$

$$= \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x f(t) dt \\
&= \int_1^x t(1 + (\ln t)^2) dt \\
&= \int_1^x t dt + \int_1^x \underbrace{t}_{v'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{u(t)} dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x + \left[\frac{t^2}{2} (\ln x)^2 \right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \cdot 2 \ln t \cdot \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \int_1^x (t \ln t) dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \left(\frac{-1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2}
\end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2}$$

F est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant somme de quatre fonctions toutes continues sur $[0, +\infty[$.

La Question : III) 2) b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} \right) \\
&= \left(\frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 \right) = \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

La continuité à droite en 0 nous donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) &\Rightarrow \frac{-3}{4} = \int_1^0 f(t) dt \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} = \int_0^1 f(t) dt
\end{aligned}$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
\text{Soient } x > 0 \text{ et } t \in [x, 2x] &\Rightarrow x \leq t \leq 2x \\
&\Rightarrow -2x \leq -t \leq -x \\
&\Rightarrow e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x} ; \text{Exp est } \nearrow
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

$$\begin{aligned}
e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x} &\Rightarrow \frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t} ; t > 0 \\
\Rightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-2x}}{t} \right) dt &\leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-x}}{t} \right) dt
\end{aligned}$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale parce que les trois fonctions sont toutes continues sur $[x, 2x]$ et aussi $x < 2x$ gardera l'ordre inchangeable.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{-2x} [\ln t]_x^{2x} \leq g(x) \leq e^{-x} [\ln t]_x^{2x} \\
&\Rightarrow e^{-2x} (\ln 2) \leq g(x) \leq e^{-x} (\ln 2)
\end{aligned}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{array}{ccc}
e^{-2x} (\ln 2) \leq g(x) \leq e^{-x} (\ln 2) \\
\swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
x \rightarrow 0^+ & & x \rightarrow 0^+ \\
\ln 2 & & \ln 2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 2 = g(0) \\
&\Rightarrow g \text{ est bien continue à droite en } 0
\end{aligned}$$

La Question : 2)

Soit a un réel strictement positif.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $a \in]0, +\infty[$ Donc $\psi : x \mapsto \int_a^x \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt$ est la seule fonction primitive de φ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en a
C-à-d : $\begin{cases} \forall x > 0 ; \psi'(x) = \varphi(x) \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt = \int_x^{2x} \varphi(t) dt \\
&= \int_x^a \varphi(t) dt + \int_a^{2x} \varphi(t) dt \\
&= - \int_a^x \varphi(t) dt + \int_a^{2x} \varphi(t) dt \\
&= -\psi(x) + \psi(2x)
\end{aligned}$$

g est dérivable car elle s'écrit sous la forme d'une somme de deux compositions continues de fonctions continues.

$$g'(x) = -\psi'(x) + 2\psi'(2x) = -\varphi(x) + 2\varphi(2x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-2x}}{2x} \\
&= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}
\end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit $t > 0$. la fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'usage du **TAF** est donc valable sur n'importe quel intervalle dans $\mathbb{R}$.
En particulier sur $[0, t]$

$$\begin{cases} h \text{ est continue sur } [0, t] \\ h \text{ est dérivable sur }]0, t[\end{cases}$$

$$\text{Donc : } \exists c \in]0, t[; \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < c < t \\ \left(\frac{e^{-t} - 1}{t} \right) = -e^{-c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 < c < t &\Rightarrow -t < -c < 0 \\ &\Rightarrow e^{-t} < e^{-c} < 1 ; \text{Expo est } \nearrow \\ &\Rightarrow -1 < -e^{-c} < -e^{-t} \\ &\Rightarrow -1 < \frac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t} ; t > 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soient x et t deux nombres réels strictement positifs.

$$\begin{aligned} -1 < \frac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t} ; t > 0 \\ \Rightarrow \int_x^{2x} (-1) dt < \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t} - 1}{t} \right) dt < \int_x^{2x} (-e^{-t}) dt \end{aligned}$$

On a introduit l'intégrale sur cet encadrement car la continuité est vérifiée et $x < 2x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -[t]_x^{2x} &\leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt - \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} \right) dt \leq [e^{-t}]_x^{2x} \\ \Rightarrow -x &\leq g(x) - \ln 2 \leq e^{-2x} - e^{-x} \\ \Rightarrow -1 &\leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} ; x > 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) c)

Calculons tout d'abord cette gentille limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x}) \left(\frac{e^{-x} - e^0}{x - 0} \right) \\ &= (e^{-0}) ((e^{-x})'_{x=0}) \\ &= (e^{-0}) (-e^{-0}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$D'ou : \underbrace{-1}_{x \rightarrow 0^+} \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \right)}_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = -1 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow g$ est dérivable à droite en 0

2015 R

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x * y &= x + y - e^{xy} + 1 \\ &= y + x - e^{xy} + 1 \\ &= y * x \end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

La Question : I) 1) b)

Soit a l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$, alors : $a * x = x * a = x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + x - e^{ax} + 1 &= x ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow e^{ax} &= a + 1 ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \ln(e^{ax}) &= \ln(a + 1) ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow ax &= \ln(a + 1) ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow ax + 0 &= 0x + \ln(a + 1) ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Et bien } a = 0 \\ \text{Et bien } \ln(a + 1) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow a &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'élément neutre de la loi $*$ est 0

Remarque : j'ai utilisé le fait que deux polynômes $(\sum_0^n a_i x^i)$ et $(\sum_0^n b_i x^i)$ sont égaux si et seulement si $\forall (1 \leq i \leq n) ; a_i = b_i$

La Question : I) 2)

L'équation $3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions réelles différentes α et β .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \alpha - e^{2\alpha} = 0 \\ 3 + \beta - e^{2\beta} = 0 \end{cases} ; \alpha \neq \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha - e^{2\alpha} + 1 = 0 \\ 2 + \beta - e^{2\beta} + 1 = 0 \end{cases} ; \alpha \neq \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 * \alpha = \alpha * 2 = 0 \\ 2 * \beta = \beta * 2 = 0 \end{cases} ; \alpha \neq \beta$$

Dire que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$ revient à démontrer, pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la chose suivante : $(x * y) * z = x * (y * z)$ (■).

Réfuter l'associativité revient donc à trouver un triplet qui ne vérifie pas l'égalité (■) (un contre exemple), il suffit de remarquer que le triplet $(\alpha, 2, \beta)$ accomplira la tâche avec rigueur.

d'une part : $\alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha$

et d'autre part : $(\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta$

comme $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta$

Donc c'est gagné.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : En algèbre linéaire, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie non vide F de E stable par combinaisons linéaires. Cette stabilité s'exprime par : la somme de deux vecteurs de F appartient à F , et le produit d'un vecteur par un scalaire appartient à F aussi. Premièrement, F est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de F . Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux éléments de F et soit α un nombre réel. Pour simplifier, on pose $M(x, y) = M$ et $M'(x', y') = M'$

$$\begin{aligned}\alpha M + M' &= \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2\alpha y - 2y' \\ \frac{\alpha y}{2} + \frac{y'}{2} & \alpha x + x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -2(\alpha y + y') \\ \frac{\alpha y + y'}{2} & (\alpha x + x') \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + x', \alpha y + y') \in F\end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall (M, M') \in F^2), (\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; (\alpha M + M') \in F$

Donc F est stable par les combinaisons linéaires. D'où $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

La Question : II) 2)

D'abord F est une partie non-vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient des matrices carrées d'ordre 2 dont l'élément $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fait partie. Soient $M = M(x, y)$ et $M' = M'(x', y')$ deux éléments de F .

$$\begin{aligned}M \times M' &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -2xy' - 2x'y' \\ \frac{x'y}{2} + \frac{xy'}{2} & -yy' + xx' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -2(xy' + x'y) \\ \frac{(x'y + xy')}{2} & (xx' - yy') \end{pmatrix} \\ &= M(xx' - yy', x'y + xy') \in F\end{aligned}$$

Ainsi : $(\forall M, M' \in F) ; M \times M' \in F$. Donc F est stable par la multiplication matricielle $\times$.
C-à-d : F est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

La Question : II) 3) a)

Etant donnée φ une application définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F qui, à tout complexe $(x + iy)$, associe la matrice $M(x, y)$.

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}^* &\mapsto F \\ (x + iy) &\mapsto M(x, y)\end{aligned}$$

L'application φ est un homomorphisme si et seulement si elle vérifie la chose suivante :
 $(\forall z, z' \in \mathbb{C}^*) ; \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$
Soient $(x + iy)$ et $(x' + iy')$ deux nombres complexes non-nuls.

$$\begin{aligned}\varphi((x + iy) \times (x' + iy')) &= \varphi((xx' - yy') + i(xy' + x'y)) \\ &= M((xx' - yy'), (xy' + x'y))\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question 2), On a vu que $M(x, y) \times M'(x', y') = M(xx' - yy', x'y + xy')$

$$\begin{aligned}\text{C-à-d } \varphi(x + iy) \times \varphi(x' + iy') &= M(x, y) \times M'(x', y') \\ &= M(xx' - yy', x'y + xy') \\ &= \varphi((x + iy) \times (x' + iy'))\end{aligned}$$

La Question : II) 3) b)

Pour montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$, il suffit de montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto F^*$ est une bijection. Soit $M(a, b)$ un élément de F^* .

$$\text{Donc } M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix} ; (a, b) \neq (0, 0).$$

L'équation $\varphi(x + iy) = M(a, b)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}^*$ et c'est le nombre complexe $a + ib$ car $\varphi(x + iy) = M(a, b)$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \neq 0 \\ y = b \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, On a montré la chose suivante :

$(\forall M(a, b) \in F)(\exists! (x + iy) \in \mathbb{C}^*) : \varphi(x + iy) = M(a, b)$.
D'où φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F^* .
C-à-d : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$.

La Question : II) 3) c)

On a vu que l'application $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (F^*, \times)$ est un isomorphisme, Donc l'image du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ est le groupe $(F^*, \times)$.

En d'autres termes : $\varphi(\mathbb{C}^*, \times) = (F^*, \times)$
ou encore $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times) = (F^*, \times)$. C-à-d que $(F^*, \times)$ est un groupe qui hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Comme $(1 + 0i)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ alors $\varphi(1 + 0i) = M(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ est l'élément neutre du groupe $(F^*, \times)$.

Comme le symétrique d'un élément $(x + iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$ Alors le symétrique de l'élément $M(x, y)$ dans F^* est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} ; \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

La Question : II) 4)

Pour montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- 1) $(F, +)$ est un groupe abélien d'élémt neutre $(0, 0)$
- 2) $(F \setminus \{M(0, 0)\}; \times)$ est un groupe.
- 3) la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans F
- 4) la loi $\times$ est commutative dans F .

$(F, +)$ est un groupe commutatif puisque $(F, +)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

Remarquer que $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F \neq \emptyset$

et $M(x, y) - M(x', y') = M(x - x' ; y - y') \in F$

$(F \setminus \{M(0, 0)\}; \times)$ est un groupe abélien puisque c'est $(F^*, \times)$ qu'on a démontré dans 3)c).

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Donc c'est la même chose dans F puisque F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La loi $\times$ est commutative dans F comme on l'avait démontré dans 3)c).

La conclusion : $(F, +, \times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Rappel : du petit Théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p , alors $(a^{p-1} - 1)$ est un multiple de p . Autrement-dit, sous les mêmes conditions sur a et p , on écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\begin{aligned} 13 \in \mathbb{P} &\Rightarrow a^{12} \equiv 1[13] ; \text{ d'après Fermat} \\ &\Rightarrow (a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13] \\ &\Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

On pose $x \wedge 13 = \delta$. comme 13 est un nombre premier alors : ou bien $\delta = 1$, ou bien $\delta = 13$. car les diviseurs de 13 sont $\{-13, -1, 1, 13\}$. pour montrer que $\delta = 1$ il suffit de réfuter le cas $\delta = 13$. On le suppose vrai, alors $x \wedge 13 = 13$ C-à-d que 13 divise x . D'où l'existence d'un certain x dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 13k$

Comme x est solution de l'équation (E) Alors $x^{2015} \equiv 2[13]$. D'où $(13k)^{2015} \equiv 2[13] \rightsquigarrow (1)$. Or, $13 \equiv 0[13]$. Donc $(13k)^{2015} \equiv 0[13] \rightsquigarrow (2)$. Par transitivité du signe ($\equiv$), et en partant de (1) et (2) on conclut que $2 \equiv 0[13]$. C-à-d que 13 divise 2 (contradiction) Donc la proposition $\delta = 13$ qu'on a supposé être vraie, a abouti à une contradiction (13 divise 2). Ce qui signifie qu'elle est fausse, Alors $\delta \neq 13$. Ainsi $x \wedge 13 = \delta = 1$. C-à-d que x et 13 sont premiers entre eux.

La Question : I) 2) b)

Soit x une solution de l'équation (E).

x est solution de (E) $\Rightarrow x \wedge 13 = 1$, selon I)2)a)

$$\Rightarrow x^{2016} \equiv 1[13] \text{ (3)} ; \text{ d'après I)1)}$$

x est solution de (E) $\Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$

$$\Rightarrow x \cdot x^{2015} \equiv 2x[13] \rightsquigarrow (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow 2x \equiv 1[13]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \equiv 1[13] \\ 14 \equiv 1[13] ; \text{ solution particulière} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 14 \equiv 0[13]$$

$$\Rightarrow 2(x - 7) \equiv 0[13]$$

$$\Rightarrow (x - 7) \equiv 0[13] ; \text{ d'après Gauss}$$

$$\Rightarrow x \equiv 7[13]$$

La Question : I) 3)

Pour résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer l'équivalence suivante :

x est solution de (E) $\Leftrightarrow x = 7 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$.

Pour l'implication directe, si x est solution de (E), alors d'après la question 2)b) On a : $x \equiv 7[13]$

d'où $x = 13k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$. Pour l'implication inverse, on se sert de la compatibilité de la congruence modulo avec la multiplication :

$$x = 7 + 13k \Rightarrow x \equiv 7[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv 7^{2015}[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv (7^3)^{671} \times 7^2[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv (343)^{671} \times 49[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv 5^{671} \times 10[13] \text{ car } \begin{cases} 343 \equiv 5[13] \\ 49 \equiv 10[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv (5^2)^{335} \times 5^1 \times 10[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv 25^{335} \times 50[13]$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv (-1)^{335} \times 11[13] \text{ car } \begin{cases} 25 \equiv -1[13] \\ 50 \equiv 11[13] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{2015} \equiv -11[13]$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{2015} \equiv 2[13]} \text{ car } -11 \equiv 2[13]$$

D'où l'implication suivante :

$$\begin{cases} x = 7 + 13k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \text{ est solution de (E) dans } \mathbb{Z}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $\mathcal{S} = \{7 + 13k ; k \in \mathbb{Z}\}$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

On tire au hasard une boule portant le chiffre n , pour que n soit une solution de l'équation (E), il suffit qu'il s'écrive sous la forme $7 + 13k$ avec k est un entier relatif et $1 \leq n \leq 50$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 &\leq 7 + 13k \leq 50 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow -6 &\leq 13k \leq 43 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{-6}{13} &\leq k \leq \frac{43}{13} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 0,46 &\leq k \leq 3,3 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow k &\in [-0,46; 3,3] \cap \mathbb{Z} \\ \Rightarrow k &\in \{0; 1; 2; 3\} \\ \Rightarrow (7 + 13k) &\in \{7; 20; 33; 46\} \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

On considère l'événement A défini comme suit :

$A = \text{"tirer une boule numéroté 7, 20, 33 ou 46"}$

Signalons que l'hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée puisqu'on a affaire à un tirage au hasard d'une boule parmi cinquante autres toutes identiques. D'où $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_{50}^1} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Rappel : soit A un événement, de probabilité p , dans une expérience aléatoire. Si A est répété indépendamment n fois, alors la probabilité correspondante à la vérification de A exactement k fois est donnée par $p_K = C_n^K \times p^K \times (1-p)^{n-k}$ fin.
A est un événement de probabilité $\frac{2}{25}$.

Cet événement est répété trois fois.

Ainsi, la probabilité correspondante à l'obtention de A exactement trois fois est donnée par :

$$p_3 = C_3^2 \times (p(A))^2 \times (1-p(A))^{3-2} = \frac{276}{15625}$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+i)^2 - 4(2+2i) \\ &= 1+2i-1-8-8i \\ &= 1-6i-9 \\ &= 1^2 - 2(1)(3i) + (3i)^2 \\ &= (1-3i)^2 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

D'après la question 1)a), On remarque que $(1-3i)$ est une racine carrée du déterminant Δ . Ainsi, les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ seront donc z_1 et z_2 définies comme suit :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(1+i) - (1-3i)}{2} = 2i \\ z_2 = \frac{(1+i) + (1-3i)}{2} = 1-i \end{cases}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i-1 \\ \Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= |i-1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\text{On a : } aff(A) = z_1 \text{ et } aff(B) = z_2$$

E est le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow aff(E) &= \frac{aff(A) + aff(B)}{2} \\ \Leftrightarrow e &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \Leftrightarrow e &= \frac{2i + 1 - 1}{2} \\ \Leftrightarrow e &= \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Rappel : Soit $r_{(A,\theta)} : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$
 $M(z) \mapsto M'(z')$
une rotation dans le plan complexe.
 $r(M) = M' \Leftrightarrow (z' - z_A) = e^{i\theta} (z - z_A)$

On a : $A(z_1), B(z_2), E\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)$ et $C(c)$ et on considère la rotation r dans le plan complexe définie par :

$$\begin{aligned} r_{(A, \frac{-\pi}{2})} : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \\ r(E) = c &\Leftrightarrow (z_c - z_1) = e^{\frac{-i\pi}{2}} (z_E - z_1) \\ \Leftrightarrow (c - 2i) &= -i \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2i \right) \\ \Leftrightarrow c &= 2i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 2 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{3i}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } & \left(\frac{z_2 - d}{c - d} \right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1} \right) \\
 &= \left(\frac{1 - i - 1 - \frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} \right) \times \left(\frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1 - i - 2i} \right) \\
 &= \left(\frac{-\frac{5}{2}i}{-\frac{5}{2}} \right) \times \left(\frac{-1}{2} \right) \times \left(\frac{3 + i}{1 - 3i} \right) \\
 &= \left(\frac{-i}{2} \right) \times \left(\frac{3 + i}{1 - 3i} \right) \times \left(\frac{1 + 3i}{1 + 3i} \right) \\
 &= \left(\frac{-i}{2} \right) \times \left(\frac{3 + 9i + i - 3}{1 - (-9)} \right) \\
 &= \left(\frac{-i}{2} \right) \times \left(\frac{10i}{10} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Rappel : soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points dans le plan complexe.

Si la quantité $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \times \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right)$ est un nombre réel $\left(\arg \left(\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \times \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) \right) \equiv 0[\pi] \right)$, Alors, ou bien les 4 points sont colinéaires, Ou bien ils sont cocycliques .
Fin du rappel.

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } & \left(\frac{z_2 - d}{c - d} \right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \\
 \Leftrightarrow & \arg \left(\left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) \times \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \right) \equiv 0[\pi] \\
 \Leftrightarrow & \arg \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) + \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv 0[\pi] \\
 \Leftrightarrow & \arg \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) [\pi] \\
 \Leftrightarrow & (\widehat{DC, DB}) \equiv (\widehat{AC, AB}) [\pi]
 \end{aligned}$$

Si A, B et D sont colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le sont.

Donc $(\exists k \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

C-à-d : $(z_B - z_A) = k(z_C - z_A)$.

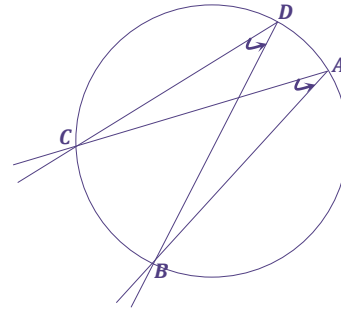
C-à-d : $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow (*)$

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } & \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left(\frac{1 - i - 2i}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i} \right) = \left(\frac{1 - 3i}{-\frac{3}{2} - \frac{i}{2}} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1 - 3i}{3 + i} \right) \times \left(\frac{3 - i}{3 - i} \right) \\
 &= -2 \left(\frac{3 - i - 9i - 3}{9 + 1} \right) \\
 &= \frac{-1}{5} (-10i) = 2i \in i\mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec (*).

D'où A, B et C ne sont pas colinéaires.

de même pour A, B et D. Ainsi, comme ces 4 points ne sont pas colinéaires, alors ils sont cocycliques.



$$(\widehat{DC, DB}) \equiv (\widehat{AC, AB}) [\pi]$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}} \\
 &= \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(+\infty)}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}} \right) \\
 &= \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(-\infty)}} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0
 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

On a $\frac{-3}{2}(x - n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est une fonction affine. Donc $e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car c'est une composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$. d'où $1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (toujours positive). Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &= \frac{-\left(e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} = \frac{-\left(\frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}
 \end{aligned}$$

La Question : 1) c)

$$\text{On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_n(x) = \left(\frac{\frac{3}{2} e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} \right)$$

$f'_n(x)$ est une quantité positive sur $\mathbb{R}$ comme étant un quotient de deux quantités strictement positives. Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f'_n(x) > 0$
D'où f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La Question : 2) a)

Rappel : Soit D_f le domaine de définition d'une fonction réelle f et soit $A(\alpha, \beta)$ un point dans le plan réel. On dit que (C_f) est symétrique par rapport à A si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

$$\left| \begin{array}{l} (\forall x \in D_f) ; (\alpha + x) \in D_f \text{ et } (\alpha - x) \in D_f \\ (\forall x \in D_f) ; f(\alpha - x) = f(\alpha + x) \end{array} \right. \text{Fin du rappel.}$$

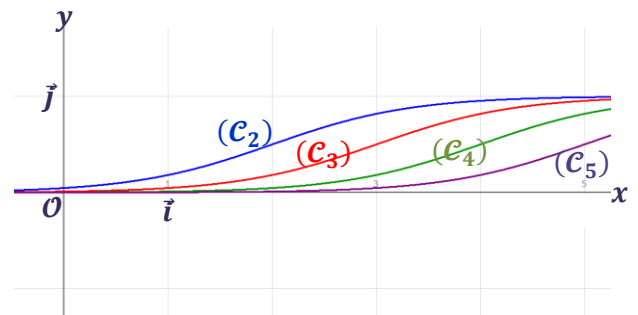
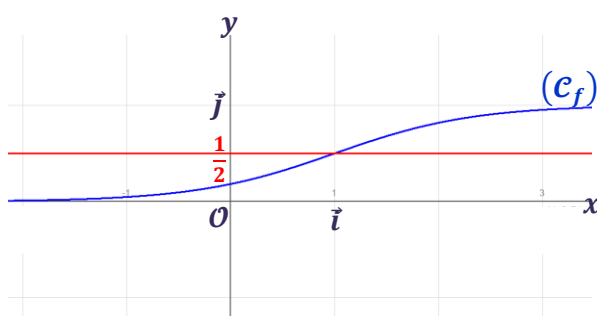
On a f_n est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors on aura toujours $(n - x) \in \mathbb{R}$ et $(n + x) \in \mathbb{R}$ à partir du moment où x appartient à $\mathbb{R}$ quel que soit n dans $\mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} f_n(n - x) + f_n(n + x) &= \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(n-x-n)}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(n+x-n)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\frac{3}{2}x}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}x}} \\ &= \frac{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}x}\right) + \left(1 + e^{\frac{3}{2}x}\right)}{\left(1 + e^{\frac{3}{2}x}\right)\left(1 + e^{\frac{-3}{2}x}\right)} \\ &= \frac{2 + e^{\frac{-3}{2}x} + e^{\frac{3}{2}x}}{2 + e^{\frac{-3}{2}x} + e^{\frac{3}{2}x}} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $f_n(n - x) + f_n(n + x) = 2 \times \frac{1}{2}$ Donc la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à $I_n\left(n, \frac{1}{2}\right)$

La Question : 2) b)

La représentation graphique de la courbe (C_1) représentant la fonction $\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



La Question : 2) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire définie par l'intersection de la courbe (C_1) et les droites d'équations : $x = 0, x = 1$ et $y = 0$
 $\mathcal{A} = \int_0^1 |f_1(x)| dx = \int_0^1 f_1(x) dx$ car f_1 est positive sur $[0, 1]$. par un procédé de changement de variables, on pose $t = e^{\frac{-3}{2}(x-1)}$:

$$\frac{dt}{dx} = \left(e^{\frac{-3}{2}(x-1)} \right)' = \frac{-3}{2} e^{\frac{-3}{2}(x-1)} = \frac{-3t}{2}$$

$$\text{Ainsi : } dx = \left(\frac{-2}{3} \right) \frac{dt}{t}$$

$$\text{On a aussi : } \begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow t = e^{\frac{3}{2}} \\ x = 1 \Leftrightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x-1)}} \right) dx = \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{1+t} \right) \left(\frac{-2dt}{3t} \right) \\ &= \frac{-2}{3} \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{t(t+1)} \right) dt \\ &= \frac{-2}{3} \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{-2}{3} \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{t} \right) dt + \frac{2}{3} \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{-2}{3} [\ln|t|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1 + \frac{2}{3} [\ln|t+1|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \\ &= \frac{-2}{3} \left(0 - \frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\ln 2 - \ln \left(1 + e^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\approx 0,327 \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit g_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x , associe son image $(f_n(x) - x)$.

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) - x \end{aligned}$$

$g_n(x)$ est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f_n(x)$ et x le sont.

$$\begin{aligned}
g'_n(x) &= f'_n(x) - 1 = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1 \\
&= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - \left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - 1 - 2e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - e^{-3(x-n)}}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} \\
&= \frac{-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} + 1 + e^{-3(x-n)}\right)}{\left(1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'_n(x) < 0$ d'où g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors comme g_n est continue et elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g_n]-\infty, +\infty[= \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) \right[= \mathbb{R}$$

En réalité, g_n est une bijection de n'importe quel intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $g_n(I)$.

On pose $I =]0, n[\subset \mathbb{R}$, Alors $g_n :]0, n[\mapsto g_n]0, n[$ est une bijection.

$$\begin{aligned}
g_n]0, n[&= \left] \lim_{x \rightarrow n^-} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) \right[\\
&= \left] \frac{1}{2} - n ; \frac{1}{1 + e^{\frac{3n}{2}}} \right[
\end{aligned}$$

C-à-d $g_n :]0, n[\mapsto \left] \frac{1}{2} - n ; \frac{1}{1 + e^{\frac{3n}{2}}} \right[$ est une bijection.

Et d'après la définition d'une bijection on conclut que :

$$\left(\forall y \in \left] \frac{1}{2} - n ; \frac{1}{1 + e^{\frac{3n}{2}}} \right[\right), (\exists ! u_n \in]0, n[) : g_n(u_n) = y$$

En particulier, pour $y = 0$ (car $\frac{1}{2} - n < 0 < \frac{1}{1 + e^{\frac{3n}{2}}}$)

On écrit : $0 \in \left] \frac{1}{2} - n ; \frac{1}{1 + e^{\frac{3n}{2}}} \right[$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\exists ! u_n \in]0, n[) : g_n(u_n) = 0 \\
&\Rightarrow (\exists ! u_n \in]0, n[) : f_n(u_n) - u_n = 0 \\
&\Rightarrow (\exists ! u_n \in]0, n[) : f_n(u_n) = u_n
\end{aligned}$$

C'est l'élégance qui m'a conduit à répondre ainsi. Sinon, si vous aimeriez être typique, vous pouvez répondre comme suit : On pose $g_n(x) = f_n(x) - x$. la fonction g_n est continue sur $]0, n[$ il est trop facile de démontrer que $g_n(0) \times g_n(n) < 0$ Donc d'après le TVI on écrit : $\exists u_n \in]0, n[; g_n(u_n) = 0$ comme g_n est continue et est strictement décroissante ($g'_n(x) < 0$) Alors u_n est unique (g_n bijective). D'où : $\exists ! u_n \in]0, n[; f_n(u_n) = u_n$

La Question : 3) b)

$$\begin{aligned}
-1 < 0 &\Rightarrow x - n - 1 < x - n \\
&\Rightarrow \frac{-3}{2}(x - n - 1) > \frac{-3}{2}(x - n) \\
&\Rightarrow e^{\frac{-3}{2}(x - n - 1)} > e^{\frac{-3}{2}(x - n)} \\
&\Rightarrow 1 + e^{\frac{-3}{2}(x - n - 1)} > 1 + e^{\frac{-3}{2}(x - n)} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x - n - 1)}} < \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(x - n)}} \\
&\Rightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x)
\end{aligned}$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned}
n \in \mathbb{N}^* &\Rightarrow u_n < n \\
&\Rightarrow f_n(u_n) < f_n(n) ; \text{ car } f_n \text{ est } \nearrow \\
&\Rightarrow u_n < \frac{1}{2} ; \text{ car } \begin{cases} f_n(u_n) = u_n \\ f_n(n) = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n < \frac{1}{2} \\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow (u_{n+1} - u_n) < 1 \\
&\Rightarrow u_{n+1} - 1 < u_n \\
&\Rightarrow u_{n+1} - 1 - n < u_n - n \\
&\Rightarrow \frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1 + n)) > \frac{-3}{2}(u_n - n) \\
&\Rightarrow e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1 + n))} > e^{\frac{-3}{2}(u_n - n)} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1 + n))}} < \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(u_n - n)}} \\
&\Rightarrow f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_n) \\
&\Rightarrow u_{n+1} < u_n ; \text{ car } \begin{cases} f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} \\ f_n(u_n) = u_n \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} < u_n$ C-à-d $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante et comme elle est minorée par 0 (car $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_n < \frac{1}{2}$).

Alors elle est convergente.

La Question : 3) d)

On part du fait que $f_n(u_n) = u_n$

C-à-d : $\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(u_n - n)}} = u_n$. par passage aux limites, on retrouve bien :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(u_n - n)}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \\
&\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{-3}{2}(l - \infty)}} = l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1+e^{+\infty}} &= l \\ \Rightarrow \frac{1}{1+\infty} &= l \\ \Rightarrow \frac{1}{+\infty} &= l \\ \Rightarrow 0 &= l \end{aligned}$$

D'où finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 0$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On démontre la parité de la fonction g à l'aide d'un procédé de changement de variable.

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt$$

On pose : $l = -t \Rightarrow dt = -dl$

$$\begin{cases} \frac{\cos t}{t} = \frac{\cos(-l)}{-l} = \frac{\cos l}{-l} = \frac{-\cos l}{l} \\ t = -x \Leftrightarrow l = x \\ t = -3x \Leftrightarrow l = 3x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt = \int_x^{3x} \left(\frac{-\cos l}{l} \right) (-dl) \\ &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos l}{l} \right) dl = g(x) \\ &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt ; \quad \text{Si vous n'êtes pas dérangés} \\ &= g(x) \quad t \text{ et } l \text{ sont deux variables muettes} \end{aligned}$$

Comme $g(-x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$ Alors g est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$: C-à-d la courbe (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La Question : 2)

Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$ et soit a un élément de $]0, +\infty[$. la fonction φ est bien définie et est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions toutes continues sur $]0, +\infty[$. Donc φ admet des primitives sur $]0, +\infty[$. En particulier, φ admet une primitive ψ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en a et qui est définie comme suit :

$$\begin{cases} \psi(x) = \int_a^x \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases} \quad \text{la fonction } \psi \text{ est dérivable et}$$

admet φ comme dérivée sur $]0, +\infty[$.

C-à-d : $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x} = \varphi(x)$; $\forall x > 0$.

ou encore : $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \right) = \frac{\cos x}{x}$.

Et voici un récapitulatif :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \\ &= \int_x^a \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \\ &= - \int_a^x \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \\ &= -\psi(x) + \psi(3x) \\ &= \psi(3x) - \psi(x) \end{aligned}$$

ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$, Donc $\psi(3x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions toutes définies et dérivables sur $]0, +\infty[$. Donc $x \mapsto \psi(3x) - \psi(x)$ est dérivable comme étant différence de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } g'(x) &= (\psi(3x) - \psi(x))' \\ &= 3x \cdot \psi'(3x) - \psi'(x) \\ &= 3x \cdot \varphi(3x) - \varphi(x) \\ &= 3x \cdot \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit x un élément de $]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{v'(t)} \right) \left(\frac{1}{u(t)} \right) dt \\ &= [u(t) \times v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t) \times v(t) dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{t} \right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{-\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x} \right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x} \right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soit x un élément de $]0, \infty[$ On a : $|\sin t| \leq 1 \rightsquigarrow (1)$

Aussi : $x \leq t \Rightarrow x^2 \leq t^2 \Rightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow (2)$

$$\begin{aligned} (1) \times (2) &\Rightarrow \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| dt \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1}{x^2} \right) dt \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2} \right) \int_x^{3x} 1 dt \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2} \right) (3x - x) \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| dt \leq \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Récapitulatif :

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \left| \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt \right| \\
&= \left| \left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x} \right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \\
&= \left| \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \\
&\leq \left| \frac{\sin 3x}{3x} \right| + \left| \frac{\sin x}{x} \right| + \left| \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{3x} \right| + \left| \frac{1}{x} \right| + \int_x^{3x} \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| dt \\
&\leq \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \\
&\leq \frac{10}{3x}
\end{aligned}$$

D'où : $(\forall x > 0) ; |g(x)| \leq \frac{10}{3x}$

comme : $|g(x)| \leq \frac{10}{3x}$

Alors : $\underset{x \rightarrow +\infty}{0} \leq |g(x)| \leq \underset{x \rightarrow +\infty}{\left(\frac{10}{3x} \right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{0}$

ou encore : $\underset{x \rightarrow +\infty}{\left(\frac{-10}{3x} \right)} \leq g(x) \leq \underset{x \rightarrow +\infty}{\left(\frac{10}{3x} \right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{0}$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

La Question : 4) a)

D'une part : $\cos t \leq 1 \Rightarrow 1 - \cos t \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \geq 0 ; \text{ car } \begin{cases} x \leq t \leq 3x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) : \int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \geq 0 ; \text{ car } 0 < x < 3x$$

D'autre part :

$$1 - \cos t \leq t \Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1 ; \text{ car } t \geq x > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \leq \int_x^{3x} 1 dt$$

Car $x < 3x$ et la fonction $\left(\frac{1 - \cos t}{t} \right)$ est continue sur $]0, +\infty[$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \leq 2x$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow (\forall x > 0) ; 0 \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \leq 2x$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned}
\int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t} \right) dt - \int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} \right) dt \\
&= g(x) - [\ln|t|]_x^{3x} \\
&= g(x) - (\ln 3x - \ln x) ; x \neq 0 \\
&= g(x) - \ln \left(\frac{3x}{x} \right) ; x \neq 0 \\
&= g(x) - \ln 3
\end{aligned}$$

La Question : 4) c)

$$(\forall x > 0) ; \underset{x \rightarrow 0^+}{0} \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \leq \underset{x \rightarrow 0^+}{2x} \underset{x \rightarrow 0^+}{0}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{2x} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \right) dt \right) = 0$

Aussi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{2x} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt \right) = 0$

comme : $g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x) - \ln 3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt \right)$

C - à - d : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x) - \ln 3) = 0$

Ou encore : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 3$



Le Premier Exercice

La Question : 1)

Tout d'abord, E est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(x, y)$ et $M(0, 0) = \mathcal{O} \in E$.
soient (x, y) et (a, b) deux éléments de E :

$$M(x, y) - M(a, b) = \begin{pmatrix} x+y-a-b & 0 & -2y+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & x-y-a+b \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a; y-b) \in E \text{ car } \begin{cases} (x-a) \in \mathbb{R} \\ (y-b) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où : $(E, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

La Question : 2)

$$M(x, y) \times M(x', y') =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') + (xy' + yx') & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy' + yx') & 0 & (xx' - yy') - (xy' + yx') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy'; xy' + yx') \in E ; \text{ car } \begin{cases} xx' - yy' \in \mathbb{R} \\ xy' + yx' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La Question : 3) a)

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ et soit φ l'application suivante :

$$\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \mapsto (E, \times)$$

$$z = x + iy \mapsto \varphi(z) = M(x, y)$$

$$\varphi(z \times z') = \varphi((x + iy)(x' + iy'))$$

$$= \varphi((xx' - yy') + i(xy' + yx'))$$

$$= M(xx' - yy'; xy' + yx')$$

$$= M(x, y) \times M(x', y') ; \text{ d'après 2)}$$

$$= \varphi(z) \times \varphi(z')$$

Ainsi φ est l'homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

La Question : 3) b)

Soit $M(a, b)$ un élément de E^* .

l'équation $\varphi(x + iy) = M(a, b)$ admet une seule solution $x + iy = a + ib$ Donc :

$(\forall M(a, b) \in E^*), (\exists! (x + iy) \in \mathbb{C}^*) : \varphi(x + iy) = M(a, b)$
c-à-d que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans E^* .

Dés lors : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

comme φ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E et comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif,

alors la structure algébrique de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sera transmise vers $(E^*, \times)$ via l'application φ .

$(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe commutatif $\Rightarrow (E^*, \times)$ Aussi.

$(1 + i0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*, \times) \Rightarrow$

$\varphi(1 + i0) = M(1, 0)$ est l'élément neutre pour $(E^*, \times)$

La Question : 4)

$(E, +, \times)$ est un groupe commutatif car :

$$\text{car : } \begin{cases} \blacksquare (E, +) \text{ est un groupe} \\ \blacksquare (E^*, \times) \text{ est un groupe commutatif} \\ \blacksquare \times \text{ est distributive par rapport à } + \\ \blacksquare \times \text{ est commutative dans } E \end{cases}$$

La distributivité de $\times$ par rapport à $+$:

$$M(a, b) \times (M(x, y) + M(x', y'))$$

$$= M(a, b) \times M(x + x'; y + y')$$

$$= M(a(x + x') - b(y + y'); a(y + y') + b(x + x'))$$

$$= M(ax + ax' - by - by'; ay + ay' + bx + bx')$$

$$M(a, b) \times M(x, y) + M(a, b) \times M(x', y')$$

$$= M(ax - by; ay + bx) + M(ax' - by'; ay' + bx')$$

$$= M(ax - by + ax' - by'; ay + bx + ay' + bx')$$

Donc la distributivité à gauche est vérifiée.

Même procédé pour la distributivité à droite.

Pour la commutativité de $\times$ dans E , on a :

$$M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy'; xy' + yx')$$

$$= M(xx' - yy'; y'x + x'y)$$

$$= M(x', y') \times M(x, y)$$

La Question : 5) a)

$$A \times M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

La Question : 5) b)

Soient $M(x, y)$ une matrice de E et $M(x', y')$ son symétrique dans E .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') &= M(x', y') \times M(x, y) = I \\ \Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') &= I \text{ car } \times \text{ est commutative} \\ \Rightarrow A \times M(x, y) \times M(x', y') &= A \times I = A \\ \Rightarrow O \times M(x', y') &= A \\ \Rightarrow O &= A \\ \Rightarrow 0 &= 1 ; \text{ c'est absurde} \end{aligned}$$

Donc $M(x, y)$ n'est pas inversible (n'admet pas de symétrique)

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} 173/(a^3 + b^3) &\Rightarrow (a^3 + b^3) \equiv 0[173] \\ &\Rightarrow a^3 \equiv -b^3[173] \\ &\Rightarrow (a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57}[173] \\ &\Rightarrow a^{171} \equiv -b^{171}[173] \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$\begin{aligned} 173/a &\Leftrightarrow 173/a^3 ; 173 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow (a^3 + b^3) \equiv b^3[173] \\ &\Leftrightarrow b^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow 173/b^3 \\ &\Leftrightarrow 173/b ; \text{ car } 173 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

$$\begin{aligned} 173/a &\Rightarrow 173/b ; \text{ d'après 2)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 173/a \\ 173/b \end{cases} \\ &\Rightarrow 173 \text{ divise toute combinaison linéaire en } a \text{ et } b \\ &\Rightarrow 173/(a + b) \end{aligned}$$

La Question : I) 4) a)

Rappel du Théorème de Fermat :

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Comme 173 ne divise pas le nombre a , alors 173 ne divise pas b à cause de l'équivalence de la question 2) : $173/a \Leftrightarrow 173/b$

$$\text{On peut Donc écrire : } \begin{cases} 173 \wedge a = 1 \\ 173 \wedge b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi d'après Fermat : } \begin{cases} a^{172} \equiv 1[173] \\ a^{172} \equiv 1[173] \end{cases}$$

$$\text{D'où : } a^{172} \equiv b^{172}[173]$$

La Question : I) 4) b)

$$\begin{cases} a^{171} \equiv -b^{171}[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^{171}) \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{172} \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^{172} \equiv -a(b^{171})[173] ; \text{ la transitivité}$$

$$\Rightarrow 173/b^{171}(a + b)$$

$$\Rightarrow b^{171}(a + b) \equiv 0[173]$$

La Question : I) 4) c)

$$\begin{aligned} 173 \wedge b = 1 &\Rightarrow 173 \wedge b^{171} = 1 \\ &\Rightarrow 173/(a + b) ; \text{ car } \begin{cases} 173/b^{171}(a + b) \\ \text{c'est Gauss} \end{cases} \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est solution de } (E) &\Rightarrow x^3 + y^3 = 173(xy + 1) \\ &\Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 173(xy + 1) \\ &\Rightarrow 173k((x - y)^2 + xy) = 173(xy + 1) \\ &\Rightarrow k(x - y)^2 + kxy = xy + 1 \\ &\Rightarrow k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1 \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

$$k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } k = 1 \\ \text{ou bien } k > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k > 1 &\Rightarrow (k - 1) > 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{et } (k - 1)xy > 0 \\ \text{et } k(x - y)^2 > 1 ; x \neq y \end{cases} \\ &\Rightarrow k(x - y)^2 + (k - 1)xy > 1 \\ &\Rightarrow 1 > 1 ; \text{ c'est absurde} \\ &\Rightarrow k = 1 ; \text{ c'est le cas restant} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + y = 173 \times 1 \\ 1(x - y)^2 + (1 - 1)xy = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + y = 173 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \begin{cases} x + y = 173 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \text{ou bien } \begin{cases} x + y = 173 \\ x - y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x, y) = (87, 86) \\ \text{ou bien } (x, y) = (86, 87) \end{cases}$$

soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{2*}$. Le résultat est :

$$(x, y) \in \mathcal{S} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x, y) = (87, 86) \\ \text{ou bien } (x, y) = (86, 87) \end{cases}$$

Inversement : $\begin{cases} 87^3 + 86^3 = 1294559 \\ 173(87 \times 86 + 1) = 1294559 \end{cases}$

Ainsi : $87^3 + 86^3 = 173(87 \times 86 + 1)$.
C-à-d que : $(87, 86) \in \mathcal{S}$ et $(86, 87) \in \mathcal{S}$

La conclusion : $\mathcal{S} = \{(87, 86); (86, 87)\}$

Le Troisième Exercice

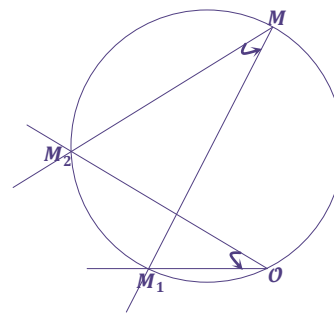
La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} &= \left(\frac{z_1 - \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}}{z_2 - \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}} \right) \times \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \\ &= \frac{z_1(z_1 + z_2) - 2z_1 z_2}{z_2(z_1 + z_2) - 2z_1 z_2} \times \frac{z_2}{z_1} \\ &= \frac{z_1}{z_2} \times \frac{z_1 + z_2 - 2z_2}{z_1 + z_2 - 2z_1} \times \frac{z_2}{z_1} \\ &= \frac{z_1 + z_2 - 2z_2}{z_1 + z_2 - 2z_1} \\ &= \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1 &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M} \right) \times \left(\frac{z_{M_2} - z_O}{z_{M_1} - z_O} \right) = -1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } M, M_1, M_2 \text{ et } O \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou bien } M, M_1, M_2 \text{ et } O \text{ sont cocycliques} \end{cases} \end{aligned}$$

O, M_1 et M_2 Sont supposés différents deux à deux dans l'énoncé. Alors M, M_1, M_2 et O ne peuvent être colinéaires. D'où les 4 points sont cocycliques. Autrement-dit : M appartient au cercle circonscrit au triangle $OM_1 M_2$



$$(\widehat{MM_2, MM_1}) \equiv (\widehat{OM_2, OM_1}) [\pi]$$

La Question : 2)

$$\begin{aligned} z_2 = \bar{z}_1 &\Rightarrow \bar{z} = \overline{\left(\frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right)} = \frac{2\bar{z}_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{2\bar{z}_1 \bar{\bar{z}}_1}{\bar{z}_1 + \bar{z}_1} \\ &= \frac{2\bar{z}_1 z_1}{\bar{z}_1 + z_1} = \frac{2|z_1|^2}{2\Re(z_1)} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow M \in (l' \text{ axe réelle}) \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit r la rotation définie comme suit :

$$\begin{aligned} r(\theta, \alpha) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(M_1) = M_2 &\Leftrightarrow (z_{M_2} - z_O) = e^{i\alpha} (z_{M_1} - z_O) \\ &\Leftrightarrow z_2 = e^{i\alpha} z_1 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1 &\Leftrightarrow \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{-z_1}{z_2} \\ &\Rightarrow \left| \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right| = \left| \frac{-z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{-1 \cdot z_1}{e^{i\alpha} \cdot z_1} \right| = |e^{-i\alpha}| = 1 \\ &\Rightarrow \left| \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right| = 1 \\ &\Rightarrow |z_1 - z| = |z_2 - z| \\ &\Rightarrow MM_1 = MM_2 \\ &\Rightarrow M \in \text{la médiatrice de } [M_1 M_2] \end{aligned}$$

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont} \\ \text{solutions de } (G) \end{array} \right. &\Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-(e^{i\theta} + 1)}{6} \\ z_1 z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{6} \end{cases} \\ &\Rightarrow z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{2(e^{i\theta} - 1)}{e^{i\theta} + 1} \end{aligned}$$

La Question : 4) b)

Rappel des formules d'Euler :

$$\begin{cases} e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} \right) = 2 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta} + e^{i0}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{2i \sin\left(\frac{\theta-0}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}{2 \cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}} \right) \\ &= 2i \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i0} \\ &= 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \left[2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right); \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant la composée de deux fonctions dérivables bien définies sur $\mathbb{R}$ ($e^{-\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$). On peut ainsi appliquer le **TAF** sur n'importe quel intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0, x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0, x[\end{cases} \\ &\Rightarrow \exists \theta \in]0, x[; \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \right) = \varphi'(\theta) \\ &\Rightarrow 0 < \theta < x ; \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -e^{-\theta} \\ &\Rightarrow 0 < \theta < x ; \left(\frac{x}{1 - e^{-x}} \right) = e^{\theta} \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned} \theta > 0 &\Rightarrow e^{\theta} > 1 \Rightarrow \frac{x}{1 - e^{-x}} > 1 \\ &\Rightarrow x > 1 - e^{-x} > 0 ; \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

La Question : I) 2) b)

$$\begin{aligned} \theta < x &\Rightarrow e^{\theta} < e^x \Rightarrow \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x \\ &\Rightarrow x < e^x - 1 ; \begin{cases} \text{avec } 1 - e^{-x} > 0 \\ \text{car } x > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow x + 1 < e^x \end{aligned}$$

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned} 0 < \theta < x &\Rightarrow e^0 < e^{\theta} < e^x ; \text{ Exp est continue et } \nearrow \\ &\Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}} < e^x \\ &\Rightarrow \ln 1 < \ln\left(\frac{x}{1 - e^{-x}}\right) < \ln(e^x) \\ &\quad \ln \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^+ \text{ est } \nearrow \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)} \\ &= \frac{e^0}{(e^x)'_{x=0}} = \frac{e^0}{e^0} = 1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite en 0 .

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote pour (C_f) au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Soient $t > 0$ et $x > 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 - t < e^{-t} ; \text{ d'après I)2)a)} \\ &\Rightarrow \int_0^x (1 - t) dt < \int_0^x (e^{-t}) dt \end{aligned}$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale $\int_0^x dt$ car ces deux quantités sont intégrables (la continuité est vérifiée). L'ordre n'a pas changé à cause de $0 < x$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x < -[e^{-t}]_0^x$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x^2}{2} \right) < -e^{-x} + 1 ; (1)$$

De même, Soient $t > 0$ et $x > 0$.

$$\Rightarrow 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) ; \text{ d'après 1)2)c)$$

$$\Rightarrow e^0 < e^{\ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x \cdot e^x}{e^x \cdot (1 - e^{-x})}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

On multiplie les deux côtés de cette inégalité par le nombre positif $(1 - e^{-x})$, il est positif car $x > 0$.

$$\Rightarrow (1 - e^{-x}) < x$$

$$\Rightarrow (2) : -e^{-x} + 1 < x ; \text{ joliment}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall x > 0 ; x - \frac{x^2}{2} < -e^{-x} + 1 < x$$

Pour $x = 0$, On a : $x - \frac{x^2}{2} = -e^{-x} + 1 = x = 0$ (■)

On écrit finalement :

$$(\forall x \geq 0) ; x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \leq x \text{ (■)}$$

La Question : II) 2) b)

a-t-On le droit d'intégrer la formule ■ ?

Oui, effectivement, On a le droit de le faire car les trois quantités sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tout entier. Et $x > 0$ gardera le sens de l'ordre interchangeable.

$$(■) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1 \leq x$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx < \int_0^t (-e^{-x} + 1) dx < \int_0^t x dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + cte \right]_0^t < [e^{-x} + x + cte]_0^t < \left[\frac{x^2}{2} + cte \right]_0^t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) < (e^{-t} + t - 1) < \left(\frac{t^2}{2} \right) ; t > 0$$

Cette inégalité reste vraie pour $t = 0$.

Donc finalement on écrit :

$$(\forall t \geq 0) : \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) < (e^{-t} + t - 1) < \left(\frac{t^2}{2} \right)$$

La Question : II) 3) a)

Soit $x > 0$:

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) - 1}{x} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$= \frac{xe^x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} \right)}{x(e^x - 1)}$$

$$= \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) \cdot \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2 e^x} \right)$$

$$= \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) \cdot \left(\frac{e^x}{e^x} \right) \cdot \left(\frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) f(x)$$

La Question : II) 3) b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Mais pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$?

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \leq (e^{-x} + x - 1) \leq \left(\frac{x^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x \right) \leq \left(\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) \leq \left(\frac{1}{2} \right) ; x^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x \right) \leq \left(\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) \leq \left(\frac{1}{2} \right)$$

$\swarrow x \rightarrow 0^+ \quad \frac{1}{2}$
 $\searrow x \rightarrow 0^+ \quad \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite} \\ \text{en } 0 \text{ et } f'_d(0) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (C_f) \text{ admet la demi-droite } (\Delta) \\ \text{de coefficient directeur } \frac{1}{2} \text{ comme} \\ \text{tangente à droite en } (0,1) \\ (\Delta) : y = \frac{1}{2}x + f(0) \end{array} \right.$$

La Question : II) 4) a)

Comme $x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables. Aussi la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant somme (différence de deux fonctions dérivables) ; et $\forall x > 0 ; e^x - 1 \neq 0$. Alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ soit $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(xe^x)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - (e^x)xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(1+x)(e^x - 1) - xe^{2x}}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x((1+x)(e^x - 1) - xe^x)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(xe^x - x + e^x - 1 - xe^x)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

La Question : II) 4) b)

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} (e^x - 1)^2 \geq 0 ; \text{ toujours} \\ e^x > 0 ; \text{ toujours} \\ e^x > 1 + x ; \text{ II) 2) b)} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} > 0 ; \forall x > 0$$

$$C - \text{à} - d : f'(x) > 0 ; \forall x > 0$$

$$C - \text{à} - d : f \text{ est } \nearrow \text{ sur }]0, +\infty[\text{ ainsi sur } [0, +\infty[$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit la proposition $P(n) : u_n > 0$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 > 0$. donc l'instance $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P(n)$ est vraie.

$$P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n > 0$$

$$\Rightarrow f(u_n) > f(0) ; f \text{ est } \nearrow [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(u_n) > 1$$

$$\Rightarrow \ln(f(u_n)) > \ln 1 ; \ln \text{ est } \nearrow]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi on a trouvé : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Alors : } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$$

La Question : III) 2)

$$I) 2) c) \Rightarrow 0 < \ln(f(x)) < x ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(f(u_n)) < u_n ; \text{ car } u_n > 0$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement } \searrow$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge car minorée par } 0$$

La Question : III) 3)

f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$.

On a d'après I) 2) c) : $(\forall x > 0) ; \ln(f(x)) < x$.

Autrement-dit : $\forall x \in]0, +\infty[; \ln(f(x)) \neq x$.

Mais $\ln(f(0)) = \ln 1 = 0$. Donc la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ est 0 dans l'ensemble $]0, +\infty[\cup \{0\} = [0, +\infty[$. C-à-d dans $[0, +\infty[$.

Rappel : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$

Et soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in I$.

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite l , et $l \in I$

Alors $(l) = l$.

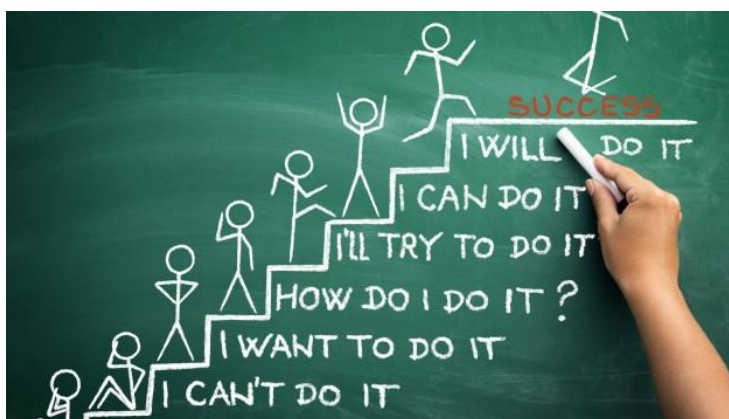
On pose $\forall x \in [0, +\infty[; \varphi(x) = \ln(f(x))$.

φ est continue sur $[0, +\infty[$ car c'est une composition de deux fonctions continues (f et $\ln$). Et $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

On a aussi $\varphi([0, +\infty[) = \ln([1, +\infty[) = [0, +\infty[$.

Comme $(u_n)_n$ est convergente vers l alors d'après le rappel, la limite l vérifie $\varphi(l) = l$.

C-à-d : $\ln(f(l)) = l$. d'où $l = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$



Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$\text{On pose } \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} ; \forall x > 0$$

ψ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ comme étant une composition bien définie de trois fonctions continues.

On remarque que $(\forall x > 0) ; \psi(x) > 0$.

Donc le signe de l'intégrale $\int_{\ln 2}^x \psi(t) dt$ dépend de l'ordre entre $\ln 2$ et x . Si $x < \ln 2 \Rightarrow \int_{\ln 2}^x \psi(t) dt < 0$.

Si $x > \ln 2 \Rightarrow \int_{\ln 2}^x \psi(t) dt > 0$

La Question : 1) b)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.

Alors f admet des primitives sur I . En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en 0 et qui

vérifie : $\begin{cases} \forall x \in I ; \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ et } \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I ; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$.

On a ψ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\ln 2 \in]0, +\infty[$

Alors ψ admet une primitive F qui s'annule en $\ln 2$

Avec : $\begin{cases} \forall x > 0 ; F(x) = \int_{\ln 2}^x \psi(t) dt \text{ et } F(\ln 2) = 0 \\ \forall x > 0 ; F'(x) = \psi(x) \end{cases}$.

Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et $\forall x > 0 ; F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$.

La Question : 1) c)

$$\forall x > 0 ; F'(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$$

D'où F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La Question : 2) a)

On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$. la fonction $u(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions continues.

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} = \frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\Leftrightarrow dt = \left(\frac{2u}{u^2 + 1} \right) du$$

$$\begin{cases} t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x - 1} \\ u = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{1}{u} \end{cases}$$

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^x \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt &= \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u} \right) \cdot \left(\frac{2u}{u^2 + 1} \right) \cdot du \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= 2 [\arctan u]_1^{\sqrt{e^x - 1}} \\ &= 2 (\arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \arctan(1)) \\ &= 2 \left(\arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(2 \arctan(\sqrt{e^0 - 1}) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(2 \arctan(0) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \left(\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \sqrt{e^x - 1}}} \arctan t \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

F est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $F(]0, +\infty[)$ car F est continue et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F :]0, +\infty[&\mapsto F(]0, +\infty[) \\ x &\mapsto \int_{\ln 2}^x \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt \end{aligned}$$

$$F(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right[= \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\begin{aligned} F :]0, +\infty[&\mapsto \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\mapsto \int_{\ln 2}^x \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$F :]0, +\infty[\mapsto \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2}$$

F est une bijection Alors :

$$\left(\forall y \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) (\exists ! x \in]0, +\infty[) : y = f(x)$$

$$\left(\text{soit } y \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) (\text{alors } \exists ! x \in]0, +\infty[) : y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \arctan(\sqrt{e^x - 1})$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)} = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)} \right) + \left(\frac{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)} \right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)} \right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) - \ln\left(1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) = x$$

Remarque : il est trop facile de montrer que :

$$\ln(2) - \ln\left(1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) > 0$$

Finalement :

$$F^{-1} : \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\mapsto]0, +\infty[$$

$$y \mapsto \ln 2 - \ln\left(1 - \tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

2016 R

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$p(R_U) = \frac{\text{card}(R_U)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

$$p(B_U) = \frac{\text{card}(B_U)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$p(B_V/R_U) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

La Question : 2) b)

$$p(B_V/B_U) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$$

La Question : 3)

$$p(B_V) = p(R_U \cap B_V) + p(B_U \cap B_V)$$

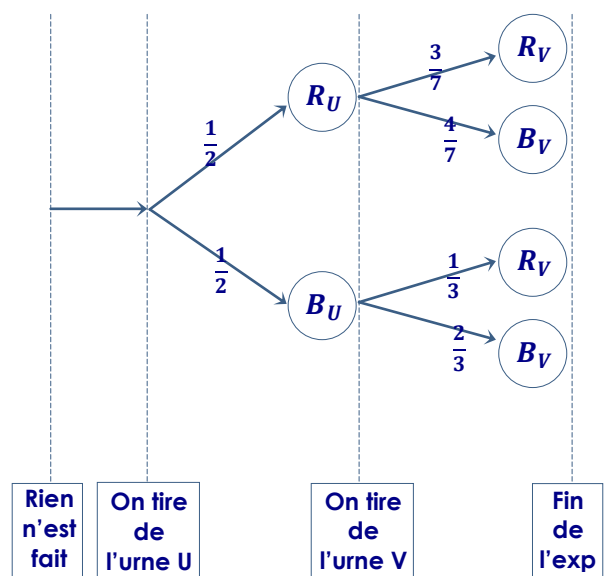
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{21}$$

La Question : 4)

$$p(R_V) = 1 - p(B_V) = \frac{8}{21}$$

$$= p(R_U) \times p(B_V/R_U) + p(B_U) \times p(B_V/B_U)$$

Résumé :



Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$(E, *)$ est un groupe commutatif car :

- $*$ est une loi de composition interne dans E
- $*$ est associative dans E
- $M(0)$ est l'élément neutre dans E
- Le symétrique de $M(z)$ est $M(-z)$ dans E
- $*$ est commutative dans E

Je vous laisse le soin de vérifier ces assertions.

La Question : 2) a)

Il est très facile de montrer, à l'aide d'un simple calcul matriciel, que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{2*} ; \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$$

La Question : 2) b)

Montrer tout d'abord que φ est bijective :
 (l'équation $\varphi(z) = M(a)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$). Et à partir de l'isomorphisme φ ,
 on écrit : $(\mathbb{C}^*, \times) = (\varphi(\mathbb{C}^*), \times) = (E^*, \times)$.
 le groupe $(E^*, \times)$ hérite ses caractéristiques du
 groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ via l'isomorphisme φ .

La Question : 3)

$(E, *, \times)$ Est un corps commutatif car :

- $(E, *)$ Est un groupe d'élément neutre $M(0)$.
- $(E \setminus \{M(0)\}, \times)$ Est un groupe.
- $\times$ Est distributive par rapport à $*$
- $\times$ Est commutative dans E .

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

A l'aide d'un simple calcul, que j'ai fait dans mon brouillon, On montre facilement que :

$$\Delta = ((\sqrt{3} - 1)(1 - i))^2 \quad \odot$$

La Question : 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \left[4 ; \frac{\pi}{3} \right] \\ z_2 = \left[4 ; \frac{\pi}{6} \right] \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$(D) : z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (D) : (x + iy) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy)$$

$$\Leftrightarrow (D) : \sqrt{3}y - x = 0$$

La Question : 2) b)

Tout d'abord, vous devez montrer que $b^2 = 2a$
 et $\frac{2b}{a} = \bar{b}$ à l'aide d'un simple calcul sur des
 nombres complexes : $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + i$.
 En suite :

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} &= \frac{2a}{(a\bar{z} - 2b)(z - b)} \\ &= \left(\frac{a}{a\bar{z} - 2b}\right) \left(\frac{2}{z - b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{b}}\right) \left(\frac{2}{z - b}\right) \\ &= \frac{2}{(\bar{z} - \bar{b}) \cdot (z - b)} \\ &= \frac{2}{|z - b|^2} \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} &= \frac{2}{|z - b|^2} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \left(\frac{b}{z' - b}\right) \left(\frac{b}{z - b}\right) &\in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \left(\frac{0 - b}{z' - b}\right) \times \left(\frac{0 - b}{z - b}\right) &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\left(\frac{0 - b}{z' - b}\right) \times \left(\frac{0 - b}{z - b}\right)\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) + \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_M - z_B}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_{M'} - z_B}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_O - z_B}\right) [\pi]$$

$$\Rightarrow (\widehat{BM'}; \widehat{BO}) \equiv (\widehat{BO}; \widehat{BM}) [\pi]$$

$$\Rightarrow (BO) \text{ est la bissectrice de l'angle } (\widehat{BM}; \widehat{BM'})$$

$$\Rightarrow (D) \text{ est la bissectrice de l'angle } (\widehat{BM}; \widehat{BM'})$$

car $O \in (D)$ et $B \in (D)$



Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow (C_n) \text{ admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses}$$

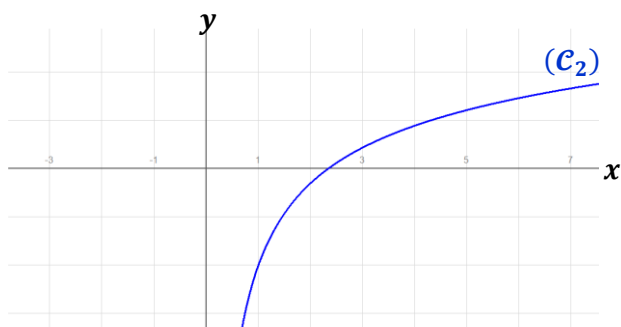
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty \Rightarrow \text{l'axe des ordonnées est une asymptote verticale pour } (C_n)$$

La Question : 1) b)

$$\forall x > 0 ; f'_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{n}{x^2} = \frac{x+n}{x^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

La Question : 1) c)



La Question : 2)

f_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc c'est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $f_n(]0, +\infty[)$
 $f_n(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned} f_n :]0, +\infty[&\mapsto \mathbb{R} \text{ est une bijection} \\ \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R}) ; f_n(x) &= y \\ \Rightarrow (\text{pour } y = 0 \in \mathbb{R})(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[) ; f_n(\alpha_n) &= 0 \\ \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[) ; f_n(\alpha_n) &= 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{-1}{x} < 0 ; \forall x \in]0, +\infty[\\ \Rightarrow \forall x > 0 ; f_{n+1}(x) &< f_n(x) \end{aligned}$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) &= 0 - f_{n+1}(\alpha_n) \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n+1}{\alpha_n} \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -\left(\ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n}\right) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -f_n(\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -0 + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} > 0 ; \text{ car } \alpha_n > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) > 0 ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_{n+1})) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(\alpha_n)) ; \forall n \geq 1$$

car f_{n+1}^{-1} est croissante

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite strictement croissante}$$

La Question : 4) a)

On pose $\varphi(x) = \ln x - x$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		0	-
φ	$-\infty$	-1	$-\infty$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) ; \varphi(x) < 0$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) ; \ln x < x$$

La Question : 4) b)

$$\alpha_n > 0 \Rightarrow \ln(\alpha_n) < \alpha_n ; \text{ selon 4)a)}$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} < \alpha_n - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow f_n(\alpha_n) < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \alpha_n^2 - n > 0 ; \text{ car } \alpha_n > 0$$

$$\Rightarrow |\alpha_n| > \sqrt{n} ; \text{ avec } |\alpha_n| = \alpha_n > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n > \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = +\infty$$

La Question : 5) a)

Utiliser le théorème de la médiane :

$$\text{On a : } \left| \begin{array}{l} f_n \text{ est continue sur } [\alpha_n, \alpha_{n+1}] \subset]0, +\infty[\\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n < \alpha_{n+1} \end{array} \right.$$

$$\text{Alors : } \left| \begin{array}{l} \exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}] \\ \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx = (\alpha_{n+1} - \alpha_n) f_n(c_n) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}] ; \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx = f_n(c_n)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]) ; I_n = f_n(c_n)$$

La Question : 5) b)

$$c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}] \Rightarrow \alpha_n \leq c_n \leq \alpha_{n+1}$$

$$\Rightarrow f_n(\alpha_n) \leq f_n(c_n) \leq f_n(\alpha_{n+1}) ; f_n \nearrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n+1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq 0 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La Question : 5) c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1}) = +\infty \Rightarrow \begin{array}{c} 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} \right) \\ \swarrow \quad \searrow \\ 0 \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$x \mapsto \frac{1}{\ln x} \text{ est continue sur } [n, +\infty[\subseteq [2, +\infty[$$

$$\Rightarrow x \mapsto \frac{1}{\ln x} \text{ admet des primitives sur } [n, +\infty[.$$

En particulier $g_n(x)$

$$\Rightarrow g'_n(x) = \frac{1}{\ln x} ; \forall x \geq n$$

La Question : 1) b)

$$g'_n(x) = \frac{1}{\ln x} > 0 ; \forall x \geq n$$

$$\Rightarrow g_n \text{ est croissante tout au long de } [n, +\infty[$$

La Question : 2) a)

$$\text{On pose } u = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ t = u + 1 \\ t = n \Leftrightarrow u = n - 1 \\ t = x \Leftrightarrow u = x - 1 \end{cases}$$

$$\forall u \geq 0 ; \ln(1+u) \leq u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+u)} \geq \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{x-1} \left(\frac{1}{\ln(1+u)} \right) du \geq \int_{n-1}^{x-1} \left(\frac{1}{u} \right) du$$

$$\Rightarrow g_n(x) \geq \ln \left(\frac{x-1}{n-1} \right)$$

La Question : 2) b)

$$g_n(x) \geq \ln \left(\frac{x-1}{n-1} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$$

$\swarrow$
 $x \rightarrow +\infty$
 $\searrow$
 $+\infty$

La Question : 3) a)

g_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$

$$\Rightarrow g_n \text{ est une bijection de } [n, +\infty[$$

dans $g_n([n, +\infty[) = [0, +\infty[$

La Question : 3) b)

$g_n : [n, +\infty[\mapsto [0, +\infty[$ est une bijection

$$\Leftrightarrow (\forall y \in [0, +\infty[) (\exists! x \in [n, +\infty[) ; g_n(x) = y$$

$$\Rightarrow (\text{pour } y = 1) (\exists! u_n \in [n, +\infty[) ; g_n(u_n) = 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 2) (\exists! u_n \geq n) ; \int_n^{u_n} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt = 1$$

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned} \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt &= \int_{u_n}^n \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt + \int_n^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \\ &+ \int_{n+1}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \\ &= -1 + \int_n^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt + 1 \\ &= \int_n^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \end{aligned}$$

La Question : 4) b)

$$\text{signe} \left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \right) \equiv \text{signe} \left(\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t} \right) dt \right)$$

$$\text{signe}(u_{n+1} - u_n) \equiv \text{signe}(n+1 - n) ; \text{ car } \left(\frac{1}{\ln t} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \text{signe}(u_{n+1} - u_n) \equiv \text{signe}(1) \equiv \boxed{+}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n ; \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2} \text{ est une suite strictement croissante.}$$

La Question : 4) c)

$$u_n \geq n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$$

$\swarrow$
 $n \rightarrow \infty$
 $\searrow$
 $+\infty$

2017 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

E est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(a, b)$ définie dans l'énoncé. La matrice $\mathcal{O}$ est un élément de E car $\mathcal{O} = M(0, 0)$ et $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

soient $M(a, b)$ et $M(c, d)$ deux éléments de E ,

$$\begin{aligned} M(a, b) - M(c, d) &= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ (b-d) & -(a-c) & (a-c) \end{pmatrix} \\ &= M(a-c ; b-d) \in E \text{ car } \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Alors d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que $(E, +)$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

La Question : 2)

Soient $M(a, b)$ et $M(c, d)$ deux matrices de E ,

$$\begin{aligned} M(a, b) \uparrow M(c, d) &= M(a, b) \times A \times M(c, d) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ (ad+bc) & -(ac-bd) & (ac-bd) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= M(ac-bd ; ad+bc) \in E \quad (*)$$

$$\text{car } (ac-bd) \in \mathbb{R} \text{ et } (ad+bc) \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\uparrow$ est une loi de composition interne dans E . C'est-à-dire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \uparrow)$

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (E^*, \uparrow) \\ a+ib &\mapsto M(a, b) \end{aligned}$$

Soient $(a+ib)$ et $(c+id)$ deux nombres complexes non-nuls :

$$\begin{aligned} \varphi((a+ib) \times (c+id)) &= \varphi((ac-bd) + i(ad+bc)) \\ &= M(ac-bd ; ad+bc) \\ &= M(a, b) \uparrow M(c, d) ; \text{ selon } (*) \end{aligned}$$

Ainsi φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E^*, \uparrow)$. En plus ; φ est une bijection car l'équation $\varphi(x+iy) = M(a, b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$ et c'est $(a+ib)$ avec $M(a, b)$ est un élément donné dans E^* . En d'autres termes : $(\forall M(a, b) \in E) (\exists x+iy \in \mathbb{C}^*) : \varphi(x+iy) = M(a, b)$. Donc la bijectivité de φ nous assure l'écriture : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

La Question : 3) b)

Comme φ est un homomorphisme et comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe ; alors $(\varphi(\mathbb{C}^*), \uparrow)$ est un groupe aussi. C'est-à-dire que $(E^*, \uparrow)$ est un groupe. $(1+0i)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ alors $M(1, 0)$ sera l'élément neutre dans $(E^*, \uparrow)$.

Remarque 1) : l'homomorphisme des groupes conserve la structure algébrique des groupes.

Remarque 2) : φ est définie de $\mathbb{C}^*$ dans E^* mais pas dans E parce que l'élément $\mathcal{O} = M(0, 0)$ n'est pas inversible dans $(E, \uparrow)$.

$$\begin{cases} M(0, 0) \uparrow M(x, y) = M(0, 0) \neq M(1, 0) \\ M(x, y) \uparrow M(0, 0) = M(0, 0) \neq M(1, 0) \end{cases}$$

La Question : 4) a)

Soient $M(a, b), M(c, d)$ et $M(e, f)$ trois éléments de E

$$\begin{aligned} M(a, b) \top (M(c, d) + M(e, f)) &= M(a, b) \top M(c + e ; d + f) \\ &= M(ac + e - b(d + f) ; a(d + f) + b(c + e)) \\ &= M(ac + ae - bd - bf ; ad + af + bc + be) \\ \text{Or : } M(a, b) \top M(c, d) + M(a, b) \top M(e, f) \\ &= M(ac - bd ; ad + bc) + M(ae - bf ; af + be) \\ &= M(ac - bd + ae - bf ; ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

Donc $\top$ est distributive par rapport à $+$ à gauche.
La distributivité à droite est déduite via la commutativité de $\top$ dans E .

Finalemment : $\top$ est distributive par rapport à $+$.

La Question : 4) b)

D'après les résultats trouvés ci-dessus, on écrit :

$(E, +)$ est 1 groupe commutatif d'élément neutre $M(0,0)$
 $(E \setminus \{M(0,0)\}, \top)$ est un groupe
 $\top$ est distributive par rapport à $+$

Donc d'après la caractérisation des corps on en déduit que $(E, +, \top)$ est un corps. De plus $\top$ est commutative dans $\top$. Alors $(E, +, \top)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m + 1 + i)^2 - 8(m^2 + m(1 + i) + i) \\ &= 4(m^2 + 2m(1 + i) + (1 + i)^2) - 8(m^2 + m(1 + i) + i) \\ &= 4m^2 + 8m(1 + i) + 4(2i) - 8m^2 - 8m(1 + i) - 8i \\ &= -4m^2 \\ &= (2im)^2 \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$z_1 = \frac{2(m + 1 + i) + 2im}{4} = \frac{(m + 1)(i + 1)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(m + 1 + i) - 2im}{4} = \frac{(m + i)(1 - i)}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned} i z_2 + 1 &= \frac{i(m + i)(1 - i)}{2} + \frac{2}{2} = \frac{i(m - mi + i + 1) + 2}{2} \\ &= \frac{im + m - 1 + i + 2}{2} = \frac{im + m + 1 + i}{2} \\ &= \frac{(m + 1)(i + 1)}{2} = z_1 \end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_{M_1} - \omega}{z_{M_2} - \omega} &= \frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \\ &= \left(\frac{\frac{(1+i)(m+1)}{2} - \frac{(1+i)}{2}}{\frac{(1-i)(m+i)}{2} - \frac{(1+i)}{2}} \right) \\ &= \frac{(1+i)(m+1) - (1+i)}{(1-i)(m+i) - (1+i)} \\ &= \frac{(1+i)(m+1) - (1+i)}{(1-i)(m+i) - i(1-i)} \\ &= \frac{(1+i)(m)}{(1-i)(m)} \\ &= \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{z_{M_1} - \omega}{z_{M_2} - \omega} = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

c'est-à-dire : $(z_{M_1} - \omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_{M_2} - \omega)$.

c-à-d que M_1 est l'image de M_2 via la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. ie :

$$\begin{aligned} R_{\frac{\pi}{2}}(\Omega) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M_2(z_2) &\mapsto M_1(z_1) \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

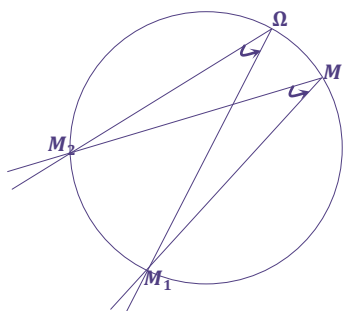
$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_{M_2} - m}{z_{M_1} - m} &= \frac{z_2 - m}{z_1 - m} \\ &= \left(\frac{\frac{(1-i)(m+i)}{2} - \frac{2m}{2}}{\frac{(1+i)(m+1)}{2} - \frac{2m}{2}} \right) \\ &= \frac{(1-i)(m+i) - 2m}{(1+i)(m+1) - 2m} \\ &= \frac{m + i - im + 1 - 2m}{m + 1 + im + i - 2m} \\ &= \frac{-m - im + 1 + i}{im - m + 1 + i} \\ &= \frac{-m(1+i) + 1(1+i)}{m(i-1) - i(i-1)} \\ &= \frac{(1+i)(-m+1)}{(i-1)(m-i)} \\ &= \left(\frac{-1-i}{i-1} \right) \left(\frac{m-1}{m-i} \right) = i \left(\frac{m-1}{m-i} \right) \end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

On part du fait que les points M, M_1 et M_2 sont colinéaires

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} ; \overrightarrow{MM_2} = k \cdot \overrightarrow{MM_1} \\
 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} ; (z_{M_2} - z_M) = k \cdot (z_{M_1} - z_M) \\
 &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} ; \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M} \right) = k \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(i \left(\frac{m-1}{m-i} \right) \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(i \left(\frac{x+iy-1}{x+iy-i} \right) \right) = 0 ; m = x+iy \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{ix-y-i}{x+i(y-1)} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{(ix-y-i)(x-iy-i)}{x^2+(y-1)^2} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{ix^2+xy-x-xy+iy^2-iy-ix-y+1}{x^2+(y-1)^2} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow x^2+y^2-y-x=0 \\
 &\Rightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} + \left(y^2-y+\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} = 0 \\
 &\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(y-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(y-\frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\
 &\Rightarrow |MI|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 ; \text{ avec } I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\
 &\Rightarrow |MI|^2 = \left(\frac{AB}{2} \right)^2 ; \text{ avec } I = \text{milieu}[AB]
 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) c)



Les 4 points sont circulaires si : premièrement M n'appartient pas au cercle (Γ) et deuxièmement si $(\widehat{\Omega M_2, \Omega M_1}) \equiv (\widehat{M M_2, M M_1}) [\pi]$.

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \arg \left(\frac{z_{M_1} - z_{\Omega}}{z_{M_2} - z_{\Omega}} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M} \right) [\pi] \\
 &\Rightarrow \arg \left(\frac{z_{M_1} - z_{\Omega}}{z_{M_2} - z_{\Omega}} \right) - \arg \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M} \right) \equiv 0 [\pi] \\
 &\Rightarrow \arg \left[\left(\frac{z_{M_1} - z_{\Omega}}{z_{M_2} - z_{\Omega}} \right) : \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M} \right) \right] \equiv 0 [\pi] \\
 &\Rightarrow \left(\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \right) : \left(\frac{z_1 - m}{z_2 - m} \right) \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow (i) : \left(\frac{i(m-1)}{m-i} \right) \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \left(\frac{m-i}{m-1} \right) \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{m-i}{m-1} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{x+iy-i}{x+iy-1} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \Im \left(\frac{(x+iy-i)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2} \right) = 0 \\
 &\Im \left(\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2-ix+i-y}{(x-1)^2+y^2} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow -y-x+1=0 \\
 &\Rightarrow x+y=1 \\
 &\Rightarrow M \in (\Delta) : x+y=1
 \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les points d'intersection entre (Γ) et (Δ) en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x+y=1 \\ \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(y-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-x+1-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2 \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2} \right) = \pm \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x=0 \Rightarrow y=1 \\ \text{ou bien } x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (\Delta) \cap (\Gamma) = \{ (0,1) ; (1,0) \}
 \end{aligned}$$

Finalement : l'ensemble $\tilde{E}$ des points M pour que Ω, M, M_1 et M_2 soient circulaires est la droite $(\Delta) : x+y=1$ privée des points $(1,0)$ et $(0,1)$.
Autrement-dit : $\tilde{E} = (\Delta) \setminus \{ (0,1) ; (1,0) \} = (\Delta) \setminus \{ B ; A \}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On considère dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation suivante :

$px + y^{p-1} = 2017$. soit (x, y) une solution.

On a : $px + y^{p-1} - p = p(x-1) + y^{p-1}$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Rightarrow x \geq 1 \text{ et } y > 0 \\&\Rightarrow (x-1) \geq 0 \text{ et } y > 0 \\&\Rightarrow p(x-1) \geq 0 \text{ et } y^{p-1} > 0 \text{ car } p \geq 5 \\&\Rightarrow p(x-1) + y^{p-1} > 0 \\&\Rightarrow px + y^{p-1} - p > 0 \\&\Rightarrow px + y^{p-1} > p \\&\Rightarrow 2017 > p\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Par l'absurde, on suppose que p divise y .

Alors : $(\exists k \in \mathbb{N}^*) ; y = kp$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow px + (kp)^{p-1} = 2017 \\&\Rightarrow px + k^{p-1}p^{p-1} = 2017 \\&\Rightarrow px + (k^{p-1}p^{p-2}p) = 2017 \\&\Rightarrow p(x + k^{p-1}p^{p-2}) = 2017 \\&\Rightarrow p/2017 ; \text{ avec } \begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ 5 \leq p < 2017 \end{cases} \\&\Rightarrow p/2017 ; \text{ avec } \begin{cases} p \neq 1 \\ p \neq 2017 \end{cases} \\&\Rightarrow \text{absurde} \\&\Rightarrow p \text{ ne divise pas } y\end{aligned}$$

Remarque : on peut aisément montrer que $(x + k^{p-1}p^{p-2}) \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ et $k > 0$ et $p \geq 5$.

La Question : 1) c)

C'est le moment idéal pour faire appel au petit théorème de Fermat.

Rappel : $\begin{cases} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On a : $p \wedge y = 1$, car p ne divise pas y donc $y \neq p$.
Donc d'après le petit théorème de Fermat , on écrit : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. Si $y = 1$ alors ça marche aussi.
On a $px + y^{p-1} = 2017$
c-à-d : $px + (y^{p-1} - 1) = 2016$.
comme $\begin{cases} p/px \\ p/(y^{p-1} - 1) \end{cases}$ alors $p/(px + y^{p-1} - 1)$
D'où : $p/2016$

La Question : 1) d)

$$\begin{aligned}p/2016 &\Rightarrow p/(2^5 \times 3^2 \times 7) \\&\Rightarrow p \in \{2 ; 3 ; 7\} \\&\Rightarrow p \in \{7\} ; \text{ car } p \geq 5 \\&\Rightarrow p = 7\end{aligned}$$

La Question : 2)

On a d'après les résultats de la question 1) :
si (x, y) est solution de $px + y^{p-1} = 2017$, alors $p=7$.
Donc il est clair que si $p \neq 7$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^{2*}$.
L'équation devient : $7x + y^6 = 2017$; $(x, y) \in \mathbb{N}^{2*}$

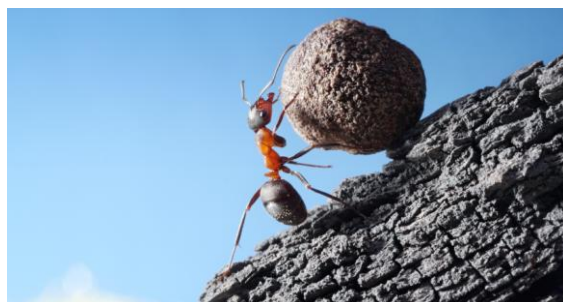
$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Rightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \\&\Rightarrow 7x > 0 \text{ et } y > 0 \\&\Rightarrow 0 < 2017 - 7x < 2017 \\&\Rightarrow 0 < y^6 < 2017 \\&\Rightarrow 0 < y < 2017^{\frac{1}{6}} \\&\Rightarrow 0 < y < 3,55 \\&\Rightarrow y \in \{1 ; 2 ; 3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 1 &\Rightarrow 7x + 1 = 2017 \\&\Rightarrow x = \frac{2016}{7} = \boxed{288}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 2 &\Rightarrow 7x + 2^6 = 2017 \\&\Rightarrow x = \frac{2017 - 2^6}{7} = \boxed{279}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 3 &\Rightarrow 7x + 3^6 = 2017 \\&\Rightarrow x = \frac{2017 - 3^6}{7} = \boxed{184}\end{aligned}$$

Inversement : On vérifie aisément que les couples $(288, 1)$, $(279, 2)$ et $(184, 3)$ vérifient bien l'équation $7x + y^6 = 2017$. Finalement : l'ensemble des solutions de cet équation est défini explicitement par : $\mathcal{S} = \{ (288, 1) ; (279, 2) ; (184, 3) \}$



Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t = \frac{-1}{x}}} (1 - t) e^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t - t e^t) \\ &= 0^+ - 0^- = 0 \\ &= f(0)\end{aligned}$$

Ainsi : f est continue en 0 à droite

La Question : I) 1) b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t = \frac{-1}{x}}} -t(1 - t) e^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t e^t + t^2 e^t) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t e^t) + \lim_{t \rightarrow -\infty} 4 \left(\frac{t}{2} e^{\frac{t}{2}}\right)^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t e^t) + 4 \lim_{\substack{\mu \rightarrow -\infty \\ \mu = \frac{t}{2}}} (\mu e^\mu)^2 \\ &= -0^- + 4(0^-)^2 = 0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

La Question : I) 1) c)

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$,
alors $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est aussi dérivable sur $]0, +\infty[$.
comme $x \mapsto \frac{-1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x$
et aussi dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$; $e^{\frac{-1}{x}} > 0$
Alors $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivables sur $]0, +\infty[$.
comme $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$,
et comme $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ alors le
produit est dérivable aussi sur $]0, +\infty[$.
ainsi $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
soit $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)' \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{-1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \left(-1 + 1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}}\end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = \frac{1}{x}}} (1 + t) e^{-t} \\ &= (1 + 0) e^0 = 1\end{aligned}$$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 2) b)

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}}$ alors $\forall x > 0$; $f'(x) > 0$
donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

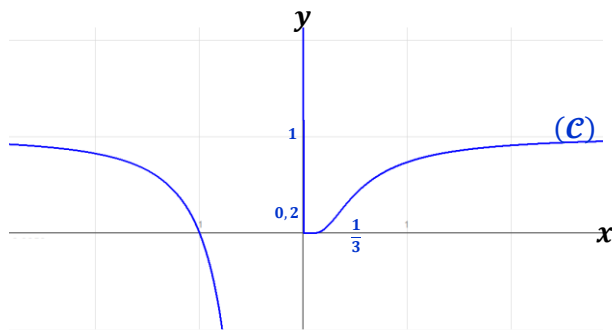
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	1

La Question : I) 3) a)

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}}\right)' = \left(\frac{-3x^2}{x^6}\right) e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{-1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)' \\ &= \left(\frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) e^{\frac{-1}{x}} \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 0 ; \text{ car } e^{\frac{-1}{x}} > 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^5 + x^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4(1 - 3x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = 0 \\ \text{ou bien } (1 - 3x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x) = 0 ; \text{ car } x > 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x) = 0 ; \text{ car } x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc le point $(\frac{1}{3}; 0,2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) .

La Question : I) 3) b)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$, alors f admet des primitives sur l'intervalle I . En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en a telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \forall x \in I ; \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt ; \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I ; \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

Dans cet exercice, f est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$. Alors f admet une primitive φ telle que $\left| \begin{array}{l} \forall x \in]0, +\infty[; \varphi(x) = \int_1^x f(t) dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \end{array} \right.$ et φ est dérivable sur $]0, +\infty[$; $\varphi'(x) = f(x)$. Donc F est continue sur $]0, +\infty[$.

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}} \right) dt &= \int_x^1 \left(\frac{1}{u'(t)} \right) \cdot \left(\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{v(t)} \right) dt \\ &= \left[t \cdot e^{\frac{-1}{t}} \right]_x^1 - \int_x^1 t \cdot \left(\frac{-1}{t} \right)' \cdot e^{\frac{-1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(t \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{\frac{-1}{t}} \right) dt \\ &= e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}} \right) dt \end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{\frac{-1}{t}} dt &= \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}} \right) dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \left(e^{\frac{-1}{t}} \right) dt \\ &= e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}} \right) dt + \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}} \right) dt \\ &= e^{-1} - x e^{\frac{-1}{x}} ; \quad x > 0 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) c)

il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \left(x e^{\frac{-1}{x}} \right)' &= 1 \cdot e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}} \right)' \cdot x = e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot x \cdot e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{-1}{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{-1}{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x e^{\frac{-1}{x}} \right)' dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{x+1} f(x) \right)' dx \\ &= \left[\frac{x^2}{x+1} f(x) \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{1+1} f(1) \right) - \left(\frac{0^2}{0+1} f(0) \right) \\ &= \frac{1}{2} f(1) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1} \right) e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1} \end{aligned}$$

La Question : II) 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 |f(t)| dt = \int_0^2 f(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \int_2^1 f(t) dt \\ &= e^{-1} - \left(e^{-1} - 2 e^{\frac{-1}{2}} \right) \\ &= \left(2 e^{\frac{-1}{2}} \right) \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \| \\ &= \left(2 e^{\frac{-1}{2}} \right) (2 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm}) \\ &= \left(8 e^{\frac{-1}{2}} \right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



La Question : II) 4) a)

La fonction f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$. Alors f admet une primitive φ qui s'annule en 1 définie comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_1^x f(t) dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \end{cases} \quad . \text{ Alors pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*$$

on obtient : $\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [n, n+2] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]n, n+2[\end{cases}$

Ainsi d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ sur $[n, n+2]$ on écrit :

$$\forall n \geq 0 ; \exists v_n \in]n, n+2[; \frac{\varphi(n+2) - \varphi(n)}{(n+2) - n} = \varphi'(v_n)$$

$$\text{c-à-d : } F(n) - F(n+2) = 2f(v_n) .$$

$$\text{c-à-d : } u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{\frac{-1}{v_n}} .$$

Finalemment :

$$\forall n \geq 0 ; \exists v_n \in]n, n+2[; u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{\frac{-1}{v_n}} .$$

La Question : II) 4) b)

On a prouvé, dans la première partie, la croissance de la fonction f sur $]0, +\infty[$. soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow \exists v_n \in]n, n+2[; u_n = f(v_n)$$

$$n < v_n < n+2 \Rightarrow f(n) < f(v_n) < f(n+2) \text{ car } f \nearrow$$

$$\Rightarrow 2f(n) < 2f(v_n) < 2f(n+2)$$

$$\Rightarrow 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\frac{-1}{n}} < u_n < 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{\frac{-1}{n+2}}$$

La Question : II) 4) c)

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\frac{-1}{n}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{\frac{-1}{n+2}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\frac{-1}{n}}}_{n \rightarrow \infty} < u_n < \underbrace{2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{\frac{-1}{n+2}}}_{n \rightarrow \infty}$$

$$\text{Finalement : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 2$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Soit ψ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. il est clair que ψ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{car } x > y &\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{x} > \frac{-1}{y} \\ &\Rightarrow e^{\frac{-1}{x}} > e^{\frac{-1}{y}} \\ &\Rightarrow \psi(x) > \psi(y) \end{aligned}$$

Donc ψ est une bijection de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\psi(]0, +\infty[)$.

$$\psi(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \right[=]0, 1[$$

Donc ψ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$.

$$\begin{aligned} \psi :]0, +\infty[&\mapsto]0, 1[\\ x &\mapsto \psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\forall y \in]0, 1[), (\exists! x \in]0, +\infty[) : \psi(x) = y \\ &\text{ou } (\forall x \in]0, +\infty[), (\exists! y \in]0, 1[) : \psi(x) = y \\ &\text{joliment } (\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! \beta_n \in]0, 1[) : \psi(n) = \beta_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! \beta_n \in]0, 1[) : e^{\frac{-1}{n}} = \beta_n \quad (*) \end{aligned}$$

La fonction f est aussi une bijection de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, 1[$ car elle est continue et elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\mapsto]0, 1[\\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c-à-d : } &(\forall y \in]0, 1[), (\exists! x \in]0, +\infty[) : y = f(x) \\ &(\text{pour } \beta_n \in]0, 1[), (\exists! \alpha_n \in]0, +\infty[) : \beta_n = f(\alpha_n) \quad (**) \end{aligned}$$

De (*) et (**) on conclut :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists! \alpha_n > 0) : f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$$

La Question : III) 1) b)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ c-à-d $n \geq 1$

$$n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} ; \text{ passage à l'inverse}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n} ; \text{ passage à l'opposé}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{-1}{n+1}} > e^{\frac{-1}{n}} ; \text{ Exp est } \nearrow \text{ et bijection}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n) ; \text{ d'après 1)a)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n ; f \text{ est bijective et } \nearrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite } \nearrow$$

La Question : III) 1) c)

$$\begin{aligned}f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) e^{\frac{-1}{\alpha_n}} = e^{\frac{-1}{n}} \\&\Leftrightarrow \ln\left(\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right) = \ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right) \\&\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) + \ln\left(e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right) = \ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right) \\&\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) - \frac{1}{\alpha_n} = \frac{-1}{n}\end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

D'une part, On a :

$$\left(\frac{1}{1+t}\right) - (1-t) = \frac{1 - (1^2 - t^2)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$$

(pour $t \geq 0$) ; $t^2 \geq 0$ et $(1+t) > 0$

Donc : $\frac{t^2}{1+t} \geq 0$ D'où : $\left(\frac{1}{1+t}\right) - (1-t) \geq 0$

c-à-d : $\left(\frac{1}{1+t}\right) \geq (1-t) \rightsquigarrow (1)$

$$\begin{aligned}(1-t+t^2) - \left(\frac{1}{1+t}\right) &= \frac{(1+t)(1-t+t^2) - 1}{1+t} \\&= \frac{t^3}{1+t}\end{aligned}$$

(pour $t \geq 0$) ; $t^3 \geq 0$ et $(1+t) > 0$

Donc : $\frac{t^3}{1+t} \geq 0$

D'où : $(1-t+t^2) - \left(\frac{1}{1+t}\right) \geq 0$

Ainsi : $(1-t+t^2) \geq \left(\frac{1}{1+t}\right) \rightsquigarrow (2)$

$$(1) \text{ et } (2) \Leftrightarrow \boxed{1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2} \quad (\forall t \geq 0)$$

La Question : III) 2) b)

Soit $x \geq 0$, $(1-x) \leq \left(\frac{1}{1+x}\right) \leq (1-x+x^2)$

$$\Leftrightarrow -x \leq \left(\frac{1}{1+x}\right) - 1 \leq -x + x^2$$

$$\Leftrightarrow \int (-1) dx \leq \int \left(\frac{1}{1+x} - 1\right) dx \leq \int (-x + x^2) dx$$

Car la continuité est vérifiée.

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} \leq -x + \ln|1+x| \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

La Question : III) 3) a)

$$\begin{aligned}e^{\frac{3}{4}} \geq 2 &\Leftrightarrow e^1 \cdot e^{\frac{-1}{4}} \geq 2 \\&\Leftrightarrow e^{\frac{-1}{4}} \geq 2 e^{-1} \\&\Leftrightarrow f(\alpha_4) \geq f(1) ; \text{ car } \begin{cases} f(\alpha_4) = e^{\frac{-1}{4}} \\ f(1) = 2 e^{-1} \end{cases} \\&\Leftrightarrow \alpha_4 \geq 1 ; f \text{ est bijective et } \nearrow\end{aligned}$$

On considère la proposition suivante :

$$P(n) : \alpha_n \geq 1$$

Pour $n=4$, on a $\alpha_4 \geq 1$. Donc $P(n)$ est vérifiée.

Soit $n \geq 4$ et on suppose que $\alpha_n \geq 1$.

Comme $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante,

Alors $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \geq 1$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi : $\begin{cases} P(4) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \geq 4 \end{cases}$

D'où : $\forall n \geq 4 : \alpha_n \geq 1$.

La Question : III) 3) b)

On a d'après la question 1)c) :

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\alpha_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) &= \frac{-1}{n} \\&\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{n} \rightsquigarrow (*)\end{aligned}$$

D'autre part : $\alpha_n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_n} \geq 1 > 0$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2 &\leq -\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) \\&\leq \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^3\end{aligned}$$

Et ceci d'après 2)b) :

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\alpha_n^2} \leq \frac{-1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{n} \leq \frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3} ; \text{ selon } (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\alpha_n^2} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3}$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha_n^2 \left(\frac{-1}{2\alpha_n^2} + \frac{1}{3\alpha_n^3}\right) \leq -2\alpha_n^2 \left(\frac{-1}{n}\right) \leq -2\alpha_n^2 \left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n}{n} \leq 1$$

La Question : III) 3) c)

$$\begin{aligned}
\alpha_n \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{\alpha_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2}{3\alpha_n} \geq \frac{-2}{3} \\
&\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq 1 - \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \quad ; \text{ d'après 3)b)} \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{n}{6} \leq \alpha_n^2 \leq \frac{n}{2} \quad ; \text{ car } n \geq 4 > 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \\
&\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{n}{6}}\right) \leq \alpha_n \\
&\quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
&\quad \quad \quad n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) = +\infty$$

La Question : III) 3) d)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) &= +\infty \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) = 1 - \frac{2}{3(+\infty)} = 1 - 0 = 1 \\
&\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \\
&\quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
&\quad \quad \quad n \rightarrow 1 \quad \quad \quad n \rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\alpha_n^2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_n \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$$



Le Premier Exercice

La Question : 1)

La loi de composition interne :

Soient a et b deux éléments de G :

$$\begin{aligned}
(a, b) \in G^2 &\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a < 1 \\ 0 \leq b < 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow 0 \leq (a + b) < 2 \\
&\Rightarrow E(a + b) \in \{0; 1\} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a + b) \leq 1 & \text{si } E(a + b) = 0 \\ 1 \leq (a + b) < 2 & \text{si } E(a + b) = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a + b) - 0 < 1 & \text{avec } E(a + b) = 0 \\ 0 \leq (a + b) - 1 < 1 & \text{avec } E(a + b) = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a + b) - E(a + b) < 1 & \text{avec } E(a + b) = 0 \\ 0 \leq (a + b) - E(a + b) < 1 & \text{avec } E(a + b) = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow a * b \in G
\end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\text{Rappel : } \begin{cases} (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : E(m + x) = m + E(x) \\ (\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) \in \mathbb{Z} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Soient a et b deux éléments de G :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a * b = (a + b) - E(a + b) \\
&\Rightarrow E(a * b) = E((a + b) - E(a + b)) \\
&\Rightarrow E(a * b) = E(a + b) - E(a + b) \\
&\Rightarrow E(a * b) = 0 \\
&\Rightarrow 0 \leq a * b < 1 \\
&\Rightarrow a * b \in [0, 1[= G \\
&\Rightarrow a * b \in G
\end{aligned}$$

La conclusion : $\forall (a, b) \in G^2 ; a * b \in G$

Donc $*$ est une loi de composition interne dans G .

La Question : 2)

La loi $*$ est commutative dans G puisque :

$$\begin{aligned}\forall (a, b) \in G^2 ; \quad a * b &= a + b - E(a + b) \\ &= b + a - E(b + a) \\ &= b * a\end{aligned}$$

Pour l'associativité, on considère trois éléments a, b et c dans G . D'une part on a :

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a * b) + c - E(a * b + c) \\ &= (a + b - E(a + b)) + c - E(a + b - E(a + b) + c) \\ &= (a + b + c) - E(a + b) - E(a + b + c - E(a + b)) \\ &= (a + b + c) - E(a + b) - E(a + b + c) + E(a + b) \\ &= (a + b + c) - E(a + b + c) \rightsquigarrow (1)\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a + (b * c) - E(a + b * c) \\ &= (a + b + c - E(b + c)) - E(a + b + c - E(b + c)) \\ &= (a + b + c) - E(b + c) - E(a + b + c) + E(b + c) \\ &= (a + b + c) - E(a + b + c) \rightsquigarrow (2)\end{aligned}$$

A partir des résultats (1) et (2), on remarque que $(a * b) * c = a * (b * c)$. ce qui veut dire que $*$ est associative. Attention à ne pas utiliser l'égalité $E(x + y) = E(x) + E(y)$ car elle est conditionnée, ce qui montre qu'elle n'est pas toujours vérifiée.

La Question : 3)

Soit ε l'élément neutre de la loi $*$ dans G .
On écrit alors : $a * \varepsilon = \varepsilon * a = a ; \forall a \in G$.

$$\begin{aligned}a * \varepsilon = a &\Leftrightarrow a + \varepsilon - E(a + \varepsilon) = a \\ &\Leftrightarrow E(a + \varepsilon) = \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon = \begin{cases} \text{oubien } 0 \\ \text{oubien } 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon = 0 \text{ car } 0 \in [0, 1[= G\end{aligned}$$

D'où l'élément neutre de la loi $*$ dans G est le nombre 0.

La Question : 4)

Etudions maintenant la symétrie des éléments de G .
Soit a un élément de G et soit a' son symétrique dans G .

$$\begin{aligned}\Rightarrow a * a' &= 0 \\ \Rightarrow a * a' - E(a + a') &= 0 \\ \Rightarrow a * a' &= E(a + a') \\ \Rightarrow a * a' &= E(a + a') = \begin{cases} \text{oubien } 0 \\ \text{oubien } 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } a + a' = 0 \\ \text{oubien } a + a' = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } a' = -a \\ \text{oubien } a' = 1 - a \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } a' = (-a) \in]-1; 0[\\ \text{oubien } a' = (1 - a) \in [0; 1[\end{cases} \\ \Rightarrow a' &= (1 - a) \in [0; 1[= G\end{aligned}$$

La conclusion :

$$(\forall a \in G)(\exists ! a' = (1 - a) \in G) : a * a' = a' * a = 0$$

La Question : 5)

Soit à résoudre dans G^n l'équation suivante :

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\substack{n \text{ fois} \\ n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} = \frac{1}{n}$$

Tout d'abord, remarquez que $x * x = 2x - E(x)$.

$$\begin{aligned}x^{(3)} &= x * x * x = x * (2x - E(x)) \\ &= x + 2x - E(2x) - E(x + 2x - E(2x)) \\ &= 3x - E(2x) - E(3x) + E(2x) \\ &= 3x - E(3x)\end{aligned}$$

$$x^{(4)} = 4x - E(4x)$$

$$x^{(5)} = 5x - E(5x)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x^{(n)} = nx - E(nx) ; \text{ à vérifier par récurrence !}$$

$$(\forall n \geq 2) \text{ soit } (Q_n) : x^{(n)} = nx - E(nx)$$

$$\text{avec : } x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$$

$$\text{pour } n = 2, \quad \text{on a : } x * x = 2x - E(2x)$$

Donc (Q_2) est vérifiée. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n \geq 2$ et on suppose que (Q_n) est vraie.

$$\begin{aligned}(Q_n) \text{ est vraie} &\Rightarrow x^{(n)} = nx - E(nx) \\ \Rightarrow x^{(n+1)} &= x * x^{(n)} = x * (nx - E(nx)) \\ \Rightarrow x^{(n+1)} &= x + nx - E(nx) - E(x + nx - E(nx)) \\ \Rightarrow x^{(n+1)} &= (n + 1)x - E(nx) - E(x + nx) + E(nx) \\ \Rightarrow x^{(n+1)} &= (n + 1)x - E((n + 1)x) \\ \Rightarrow (Q)_{n+1} &\text{ est vraie}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} (Q_2) \text{ est vraie} \\ (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1}) ; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } (\forall n \geq 2) ; x^{(n)} = nx - E(nx) \rightsquigarrow (*)$$

A l'aide de $(*)$ on résout aisément l'équation

$$x^{(n)} = \frac{1}{n} ; \begin{cases} x \in G \\ n \geq 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x^{(n)} = \frac{1}{n} &\Leftrightarrow nx - E(nx) = \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow nx - \frac{1}{n} = E(nx)\end{aligned}$$

$$n \geq 2 \Leftrightarrow E(nx) \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

$$\Leftrightarrow \left(nx - \frac{1}{n}\right) \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

$$\Leftrightarrow nx \in \left\{\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; \frac{2n+1}{n}; \dots; \frac{n(n-1)+1}{n}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{n^2}; \frac{2n+1}{n^2}; \dots; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette équation est défini explicitement par :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{n^2}; \frac{2n+1}{n^2}; \dots; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

Par exemple : l'équation $x^{(9)} = \frac{1}{9}$ admet exactement neuf solutions dans $[0, 1[$, les voici :

$$\mathcal{S}_9 = \left\{\frac{1}{81}, \frac{10}{81}, \frac{19}{81}, \frac{28}{81}, \frac{37}{81}, \frac{46}{81}, \frac{55}{81}, \frac{64}{81}, \frac{73}{81}\right\}$$

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{array}{l} \text{Rappel} \\ \text{Formules :} \\ \text{D'Euler} \end{array} \left| \begin{array}{l} \cos(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) ; \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) ; \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} &= \frac{2i}{2i} \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y-x-y}{2}\right)} \\ &= e^{ix} - e^{iy} \end{aligned}$$

$$\text{De même : } \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} &= \frac{2}{2} \left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-x+y+x+y}{2}\right)} \\ &= e^{ix} + e^{iy} \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

Résolution de l'équation (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2i)^2 + 4(1 + e^{2i\theta}) \\ &= -4 + 4 + 4e^{2i\theta} \\ &= (2e^{i\theta})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2i - 2e^{i\theta}}{2} = i - e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta} \\ &= 2i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta}{2}\right)} \\ &= 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2i + 2e^{i\theta}}{2} = i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \theta}{2}\right)} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

Rappel : A, B et C sont colinéaires $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv 0[\pi]$

$$\begin{aligned} \frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} &= \left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \frac{2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}} \\ &= i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right) &\equiv \arg\left(i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) [2\pi] \\ \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) &\equiv \arg(i) + \arg\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) [2\pi] \\ \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) &\equiv \frac{\pi}{2} + 0 [2\pi] \\ \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) &\not\equiv 0 [\pi] \\ \Rightarrow A, B \text{ et } C &\text{ ne sont pas colinéaires} \end{aligned}$$

$\mathcal{OAB}$ Est un triangle rectangle :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \mathcal{OA} &= |z_A - z_O| = |z_A| = \left|2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}\right| \\ &= |i| \times 2 \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}\right| \\ &= 2 \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| ; \text{ la valeur absolue} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 OB &= |z_B - z_O| = |z_B| = \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| \times \left| e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| ; \text{ la valeur absolue}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= |z_B - z_A| \\
 &= \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} - 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= \left| 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= \left| 2 \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= \left| 2 e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\
 &= |2e^{i\theta}| = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow 4 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + 4 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 &= 4 \\
 \Leftrightarrow \left(2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| \right)^2 + \left(2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| \right)^2 &= 2^2 \\
 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore, on conclut que $\triangle OAB$ est un triangle rectangle en O .

Pour que $\triangle OAB$ soit isocèle, il suffit qu'il vérifie $OA = OB$

$$\begin{aligned}
 OA = OB &\Leftrightarrow \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} \right| &= 1 ; \text{ avec } \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\
 \Leftrightarrow \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right| &= 1 ; \text{ avec } \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\
 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) &= \pm 1 ; \text{ avec } \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{oubien : } \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien : } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \\ \text{oubien : } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{-\pi}{4} [\pi] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien : } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{oubien : } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{-\pi}{4} + k'\pi ; k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien : } \theta = -2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{oubien : } \theta = \pi - 2k'\pi ; k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien : } \theta \equiv 0 [2\pi] \\ \text{oubien : } \theta \equiv \pi [2\pi] \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 [\pi]
 \end{aligned}$$

Donc $\triangle OAB$ est isocèle Si $\theta \equiv 0 [\pi]$.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

La rotation r est définie par :

$$\begin{aligned}
 r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\
 M(z) &\mapsto M'(z')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(M) = M' &\Leftrightarrow (z_{M'} - z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_M - z_A) \\
 &\Leftrightarrow (z' - a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a) \\
 &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a) + a \\
 &\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a
 \end{aligned}$$

Ainsi la rotation r sera définie par :

$$\begin{aligned}
 r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\
 M(z) &\mapsto M'\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(B) = B' &\Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z_B - a) + a \\
 &\Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(b + i - a) + a \\
 &\Leftrightarrow z_{B'} = \left(\frac{b + a - \sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}a}{2}\right)
 \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

$$\begin{aligned}
 B' \in (OY) &\Leftrightarrow z_{B'} \in i\mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \Re(z_{B'}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{b + a - \sqrt{3}}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a + b = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas On retrouve :

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \left(\frac{b+a-\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2} \right) \\ &= i \left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2} \right) \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

La Question : II) 3) a)

$$\text{le cas : } \begin{cases} A(\sqrt{3}) \\ B(i) \\ C(-i) \\ D(2+\sqrt{3}(1-2i)) \end{cases}$$

Pour le triangle ABC on a :

$$\begin{cases} AB = |i - \sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ AC = |-i - \sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ BC = |-i - i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \end{cases}$$

Donc ABC est un triangle équilatéral.

Pour le triangle ACD on a :

$$\begin{cases} AC = |-i - \sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ AD = |2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4 \\ DC = |-i - 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{20} \end{cases}$$

On remarque que $2^2 + 4^2 = (\sqrt{20})^2$

c-à-d que : $AC^2 + AD^2 = DC^2$

c-à-d que le triangle ACD est un triangle rectangle.

La Question : II) 3) b)

Soit T la translation définie par :

$$\begin{aligned} T : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

Et Soit r la rotation définie par :

$$\begin{aligned} r : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M' \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) (z - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(D) = F &\Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow (z_F - z_D) = (z_C - z_A) \\ &\Leftrightarrow (z_F - 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i) = (-i - \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow z_F = -i - 2\sqrt{3}i + 2 \\ &\Leftrightarrow z_F = 2 - i(1 + 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(D) = E &\Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) (z_D - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) (2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}i - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) (2 - 2\sqrt{3}i) + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) 2(1 - \sqrt{3}i) + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = 1^2 - (i\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = 1 - (-3) + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow z_E = 4 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Montrons d'abord que BEF est équilatéral.

$$\text{On a : } \begin{cases} z_B = i \\ z_E = 4 + \sqrt{3} \\ z_F = 2 - (1 + 2\sqrt{3})i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow BE &= |z_E - z_B| = |4 + \sqrt{3} - i| \\ &= \sqrt{(4 + \sqrt{3})^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 8\sqrt{3} + 3 + 1} \\ &= \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } BF &= |z_F - z_B| = |2 - (1 + 2\sqrt{3})i - i| \\ &= |2 - i(2 + 2\sqrt{3})| \\ &= \sqrt{2^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4 + 4 + 8\sqrt{3} + 12} \\ &= \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et : } EF &= |z_F - z_E| = |2 - i - 2\sqrt{3}i - 4 - \sqrt{3}| \\ &= |-(2 + \sqrt{3}) - i(1 + 2\sqrt{3})| \\ &= |(2 + \sqrt{3}) + i(1 + 2\sqrt{3})| \\ &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (1 + 2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1 + 4\sqrt{3} + 12} \\ &= \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On remarque que $BE = BF = EF = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$
Donc BEF est bien un triangle équilatéral.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Rappel : (le petit théorème de Fermat)

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$$

On a p est un nombre premier. On a aussi $a \wedge p = 1$ car $a < p$. Donc c'est impossible d'avoir p soit un diviseur de a . Donc, d'après le petit théorème de Fermat, On écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$. D'où $a(a^{p-2}) \equiv 1[p]$. Et cela veut dire que a^{p-2} est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}$.

La Question : 1) b)

Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} sur p

$$\begin{cases} a^{p-2} \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists! r \in \{0; 1; 2; \dots; p-1\} \\ a^{p-2} \equiv r[p] \end{cases}$$

Si $r = 0$ alors p divise a^{p-1} .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p \text{ divise } a \text{ car } p \text{ est premier} \\ &\Rightarrow p < a \\ &\Rightarrow \text{Absurde car } a < p \\ &\Rightarrow r \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $a^{p-2} \equiv r[p]$ et $r \in \{1; 2; \dots; p-1\}$.
D'où $a^{p-1} \equiv ar[p]$ et $r \in A_p$. Or d'après le petit théorème de Fermat on écrit :

$$a^{p-1} \equiv 1[p] \text{ car } p \in \mathbb{P} \text{ et } a \wedge p = 1.$$

$$\text{résumons : } \begin{cases} a^{p-1} \equiv ar[p] ; r \in A_p \\ a^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ar \equiv 1[p] \\ r \in A_p \end{cases} ; \text{ car "}\equiv\text{" est transitive}$$

r est donc la seule solution de (E) dans A_p

La Question : 2) a)

On pose $p = 31$,
pour $a = 2$ on a : $(\exists! r \in A_{31}) ; 2^{29} \equiv r[31] (*)$.
Or, $2^5 = 32 \equiv 1[31] \Rightarrow (2^5)^5 \equiv 1^5[31]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2^{25} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow 2^4 \times 2^{25} \equiv 2^4[31] \\ &\Rightarrow \boxed{2^{29} \equiv 16[31]} (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ et } (**) &\Rightarrow r \equiv 16[31] \\ &\Rightarrow \boxed{31/(r-16)} \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in A_{31} \text{ Alors } r &\in \{1; 2; \dots; 30\} \\ &\Rightarrow \boxed{|r-16| < 31} \blacksquare \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ et } \blacksquare \blacksquare &\Rightarrow |r-16| = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{r = 16} \end{aligned}$$

Pour $a = 3$; $\exists! r \in A_{31} ; 3^{29} \equiv r[31] \otimes$
Or $3^6 = 729 \equiv 16[31]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (3^6)^4 \equiv (2^4)^4[31] \\ &\Rightarrow 3^{24} \equiv 2^{16}[31] (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aussi } 2^{16} &= (2^5)^3 \times 2 \equiv 1^3 \times 2[31] \\ &\Rightarrow 2^{16} \equiv 2[31] (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ et } (***) &\Rightarrow 3^{24} \equiv 2[31] \\ &\Rightarrow 3^{24} \times 3^5 \equiv 2 \times 3^5[31] \\ &\Rightarrow 3^{29} \equiv 486[31] \\ &\Rightarrow 3^{29} \equiv 21[31] \otimes \otimes \text{ car } 486 \equiv 21[31] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes \text{ et } \otimes \otimes &\Rightarrow r \equiv 21[31] \\ &\Rightarrow \boxed{31/(r-21)} (\otimes) \end{aligned}$$

comme $r \in A_{31} = \{1; 2; \dots; 30\}$

$$\text{Alors : } \boxed{|r-21| < 31} (\otimes \otimes)$$

$$\begin{aligned} \otimes \text{ et } \otimes \otimes &\Rightarrow |r-21| = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{r = 21} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Soit x une solution de l'équation (F_1)

$$x \text{ est solution de } (F_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv 1[31] \\ 2(16) \equiv 1[31] \end{cases}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités modulo 31 on trouve :

$$\begin{aligned} 2(x-16) &\equiv 0[31] \Rightarrow 31 \text{ divise } 2(x-16) \\ &\Rightarrow 31/(x-16) \text{ car } 31 \wedge 2 = 1 \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x-16 = 31k \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 31k + 16 \end{aligned}$$

Inversement : Montrons que tous les entiers relatifs de la forme $(31k + 16)$ vérifient-bien l'équation (F_1)

$$\text{On a : } 2(31k + 16) = 62k + 32$$

$$\text{comme } \begin{cases} 62k \equiv 0[31] \\ 31 \equiv 1[31] \end{cases} \text{ alors } (62k + 32) \equiv 1[31]$$

D'où l'ensemble des solutions de (F_1) est définie implicitement par : $\mathcal{S} = \{31k + 16 ; k \in \mathbb{Z}\}$

De même, pour l'équation (F_2) : $3x \equiv 1[31]$
Sachant que $3 \times 21 \equiv 1[31]$ d'après 2)a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x \equiv 1[31] \\ 3(21) \equiv 1[31] \end{cases} &\Rightarrow 3(x - 21) \equiv 0[31] \\ &\Rightarrow 31/3(x - 21) \\ &\Rightarrow 31/(x - 21) ; \text{ car } 31 \wedge 3 = 1 \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x - 21 = 31k \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 31k + 21 \end{aligned}$$

Inversement, On montre que tout entier relatif de la forme $(31k + 21)$ est bien une solution de (F_2)

$$\begin{aligned} \text{On a : } 31k \equiv 0[31] &\Rightarrow 3(31k) \equiv 0[31] \\ &\Rightarrow 3(31k) + 3(21) \equiv 1[31] \\ &\quad \text{car } 3(21) = 63 \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow 3(31k + 21) \equiv 1[31] \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de (F_2) est défini implicitement par $S_2 = \{ 31k + 21 ; k \in \mathbb{Z} \}$

La Question : 2) c)

Soit x une solution de (F) dans $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (F) &\Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31] \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 1) \equiv 0[31] \\ &\Leftrightarrow 31/(2x - 1)(3x - 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } 31/(2x - 1) \\ \text{ou bien } 31/(3x - 1) \end{cases} ; \text{ car } 31 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } 2x \equiv 1[31] \\ \text{ou bien } 3x \equiv 1[31] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x \text{ est solution de } (F_1) \\ \text{ou bien } x \text{ est solution de } (F_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x \in \{31k + 16 ; k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{ou bien } x \in \{31k + 21 ; k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \{31k + 16 ; 31k + 21 ; k \in \mathbb{Z}\} \\ &\Leftrightarrow S = \{31k + 16 ; 31k + 21 ; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : 1) 1)

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) dt &= \int_0^x (e^t - t - 1) dt \\ &= \int_0^x e^t dt - \int_0^x t dt - \int_0^x 1 dt \\ &= [e^t]_0^x - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x - [t]_0^x \\ &= e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x \\ &\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt \end{aligned}$$

La Question : 1) 2)

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant une somme de fonctions toutes dérivables.

$$h'(x) = e^x - 1 ; (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} h'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \\ &\Leftrightarrow h \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0] \\ h'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\\ &\Leftrightarrow h \text{ est croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty$	0	$+\infty$

La Question : 1) 3)

On a d'après la question 1) :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt \\ \Rightarrow e^x - (1 + x) &= \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt \\ \Rightarrow \frac{e^x - (1 + x)}{x^2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t) dt ; x \neq 0 \\ \Rightarrow (\forall x \neq 0) ; \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t) dt (*) \end{aligned}$$

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, x]$. (t est variable muette)

$$\begin{aligned} t \in [0, x] &\Rightarrow 0 \leq t \leq x \\ &\Rightarrow h(0) \leq h(t) \leq h(x) ; \text{ car } h \nearrow [0, +\infty[\\ &\Rightarrow 0 \leq h(t) \leq h(x) \\ &\Rightarrow \int_0^x 0 dt \leq \int_0^x h(t) dt \leq \int_0^x h(x) dt \end{aligned}$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $0 < x$ gardera le sens de l'ordre inchangé

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \leq \int_0^x h(t) dt \leq (x - 0)h(x) \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t) dt \leq \frac{x h(x)}{x^2} ; x^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{h(x)}{x} ; \text{ selon } (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2} ; \forall x > 0$$

La Question : I) 4)

Soient x dans $\mathbb{R}_-$ et t dans $[x, 0]$.

$$t \in [x, 0] \Rightarrow x \leq t \leq 0$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(t) \geq h(0) ; h \searrow]-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_x^0 h(x) dt \geq \int_x^0 h(t) dt \geq \int_x^0 0 dt$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $x < 0$ gardera le sens de l'ordre inchangé

$$\Rightarrow (0 - x)h(x) \geq - \int_0^x h(t) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow -x h(x) \geq - \int_0^x h(t) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow x h(x) \leq \int_0^x h(t) dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x h(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t) dt \leq \frac{0}{x^2} ; x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{h(x)}{x} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t) dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \leq 0 ; \text{ selon } (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} ; \forall x < 0$$

La Question : I) 5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$= (e^x)'_{x=0} - 1$$

$$= e^0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h(x)}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{h(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{h(x)}{x} \right) = 0$$

Si $(x \in \mathbb{R}_+)$ on obtient selon la question 3) :

$$\left(\frac{1}{2} \right) \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \left(\frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2} \right)$$

$x \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad x \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad \frac{1}{2} \quad \quad \quad \frac{1}{2}$

$$D'où : \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \quad (\odot)$$

Si $(x \in \mathbb{R}_-)$ on obtient selon la question 4) :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \right) \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)$$

$x \rightarrow 0^- \quad \quad \quad x \rightarrow 0^- \quad \quad \quad \frac{1}{2} \quad \quad \quad \frac{1}{2}$

$$D'où : \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \quad (\odot\odot)$$

De $(\odot)$ et $(\odot\odot)$ on tire la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, il est clair que f est continue comme étant quotient de deux fonctions continues et $(e^x - 1) \neq 0$.

Etudions alors la continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right)} = \frac{1}{(e^x)'_{x=0}}$$

$$= \frac{1}{e^0} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : II) 2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe ($\mathcal{C}_f$) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \frac{-\infty}{e^{-\infty} - 1}$$

$$= \frac{-\infty}{0^+ - 1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{1}{0^+ - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} + x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right)$$

$$= \frac{0^-}{e^{-\infty} - 1} = \frac{0^-}{0^+ - 1} = 0$$

Donc la droite (Δ) : $y = -x$ (la 2^{ème} bissectrice) est une asymptote à ($\mathcal{C}_f$)

La Question : II) 3)

On se sert des deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right) = \frac{1}{e^0}$$

D'après I)5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(e^x - (x+1))}{x^2(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2} \right) \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = - \left(\frac{1}{2} \right) \times (1)$$

$$= -\frac{1}{2} = f'(0)$$

D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

La Question : II) 4)

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est un quotient de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x - 1) \neq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{1(e^x - 1) - e^x(x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} ; \quad \varphi(x) = (1 - x)e^x - 1$$

La Question : II) 5)

φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier . $\varphi'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$

Remarque : $\varphi'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et $\varphi'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
φ	-1	0	$-\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) \leq 0$$

$$d'où : \forall x \in \mathbb{R}^* ; \varphi(x) < 0$$

La Question : II) 6)

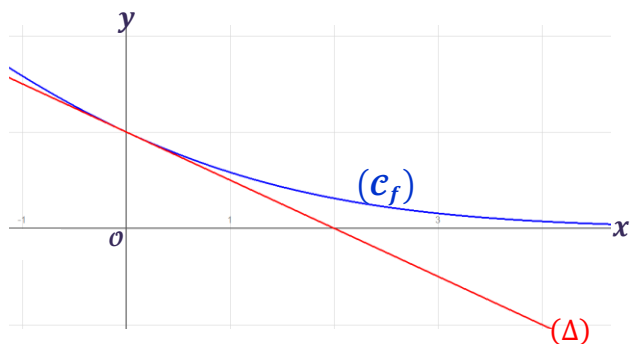
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	-	0	-
$f'(x)$	-		-
f	$+\infty$	1	0

La Question : II) 7)

Soit (Δ) la tangente de $\mathcal{C}_f$ en 0.

$$(\Delta) : y = (x - 0)f'(0) + f(0)$$

$$(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 1$$



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions toutes continues sur $\mathbb{R}$. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x > y$. Alors $f(x) < f(y)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Et On a aussi $-x < -y$. en passant à la somme, on obtient : $f(x) - x < f(y) - y$ c-à-d $g(x) < g(y)$

Ainsi, On a pu montrer l'implication suivante :

$$x > y \Rightarrow g(x) < g(y)$$

Ce qui veut dire que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. et à cause de la continuité, g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})$.

$$g(\mathbb{R}) = g(-\infty; +\infty) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

Ainsi, g est une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme 0 est un élément de $\mathbb{R}$, Alors il admet un antécédent α dans $\mathbb{R}$ via la bijection g .

Dans le cas général on écrit :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R}) ; g(x) = y$$

$$(pour 0 \in \mathbb{R})(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) ; g(\alpha) = 0$$

$$(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) ; f(\alpha) = \alpha$$

c-à-d que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, ($f(\alpha) = \alpha$)

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 ; avec \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha - 1 = 1 ; avec \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = 2 ; avec \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \ln 2 ; avec \alpha \neq 0$$

La Question : III) 2) a)

$$\begin{aligned} \text{pour } x > 0 ; f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\varphi(x) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^x(1 - x) - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

La Question : III) 2) b)

$$\text{Soient : } \begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) ; h(x) = e^x - x - 1 \\ (\forall x \in \mathbb{R}) ; \psi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \geq 0 &\Rightarrow e^x \geq e^0 ; \text{ car Exp est } \nearrow \\ &\Rightarrow e^x - 1 \geq 0 \\ &\Rightarrow h'(x) \geq 0 ; \text{ car } h'(x) = e^x - 1 \\ &\Rightarrow h \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow h(x) \geq h(0) \\ &\Rightarrow h(x) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \psi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x) \\ &= 2e^x h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in \mathbb{R}^+ &\Rightarrow e^x > 0 \text{ et } h(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow 2e^x h(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \psi'(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \psi(x) \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) \\ &\Rightarrow \psi(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{La déduction : } x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geq 0 \\ &\Rightarrow f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \\ &\Rightarrow f'(x) \geq -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 0 > f'(x) \geq -\frac{1}{2} ; \text{ car } \varphi(x) < 0 \end{aligned}$$

La Question : III) 3) a)

On a vu, d'après les résultats précédents, que f est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $[\alpha, u_n] \subset \mathbb{R}$; $\exists c \in]\alpha, u_n[$: $\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[\subset \mathbb{R}^+ ; \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |f'(c)|$$

On a $c \in]\alpha, u_n[\subset \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(c) < 0 ; \text{ d'après 2)b)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(c) < 0 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(c) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| ; \forall n \in \mathbb{N}$$

La Question : III) 3) b)

Par récurrence, On démontre aisément la véracité du prédicat $P(n)$ défini ainsi :

$$(P_n) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha)$$

$$\text{Pour } n = 0 ; |1 - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |1 - \ln 2|$$

Ainsi l'instance $P(0)$ est vérifiée (c-à-d vraie)

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, On suppose que $P(n)$ est vraie

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Finalement : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \text{ implique } P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où, d'après le principe de récurrence, On déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1 - \alpha)$

On remarque que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $(1 - \alpha)$ est un nombre réel. On obtient alors la situation suivante :

$$|u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha)}_{n \rightarrow \infty \rightarrow 0}$$

Donc, d'après le critère de comparaison dans la convergence des suites numériques réelles, On déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

La Question : IV) 1)

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [x, 2x]$,

$$t \in [x, 2x] \Rightarrow x \leq t \leq 2x$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq t \leq 2x$$

$$\Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(t) \geq f(2x) ; f \searrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(t) \geq f(2x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \langle f(x) \geq f(t) \geq 0 \rangle dt$$

J'ai introduit $\int_x^{2x} dt$ car la continuité est vérifiée, et $x < 2x$ gardera le sens de l'ordre inchangé.

$$\Rightarrow \int_x^{2x} f(x) dt \geq \int_x^{2x} f(t) dt \geq \int_x^{2x} 0 dt$$

$$\Rightarrow x f(x) \geq F(x) \geq 0 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^{2\left(\frac{x}{2}\right)}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = \frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}\right)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}(+\infty)^2 - \frac{1}{4}(0)^2} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (*) devient :

$$\underbrace{x f(x)}_{x \rightarrow +\infty} \geq F(x) \geq \underbrace{0}_{x \rightarrow +\infty}$$

D'où, d'après le critère de comparaison dans la convergence des fonctions, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

La Question : IV) 2)

Soient $x \leq 0$ et $t \in [2x, x]$

$$\begin{aligned} t \in [2x, x] &\Rightarrow 2x \leq t \leq x \\ &\Rightarrow t \leq x \\ &\Rightarrow f(t) \geq f(x) ; f \text{ est } \searrow \text{ sur } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \int_{2x}^x f(t) dt \geq \int_{2x}^x f(x) dt ; 2x \leq x \\ &\Rightarrow -\int_x^{2x} f(t) dt \geq -x f(x) \\ &\Rightarrow -F(x) \geq -x f(x) \\ &\Rightarrow F(x) \leq x f(x) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{e^2 - 1} \right) \\ &= \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty} - 1} = \frac{+\infty}{0 - 1} = -\infty \end{aligned}$$

On obtient ainsi : $F(x) \leq \underbrace{x f(x)}_{x \rightarrow -\infty}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$

On multiplie les deux côtés de l'inégalité (*) par le nombre réel négatif $\left(\frac{1}{x}\right)$ on obtient :

$$\frac{F(x)}{x} \geq \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{x \rightarrow -\infty}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

La Question : IV) 3)

Soit a un nombre réel non nul. f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En particulier, f admet une primitive ψ qui s'annule en a et qui est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+ ; \psi(x) = \int_a^x f(t) dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$$

C'est clair que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Et $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \psi'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } F(x) &= \int_x^{2x} f(t) dt \\ &= \int_x^a f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt \\ &= -\int_a^x f(t) dt + \int_a^{2x} f(t) dt \\ &= -\psi(x) + \psi(2x) \end{aligned}$$

f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme étant différence de deux compositions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} F(x) &= \psi(2x) - \psi(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow F'(x) &= 2\psi'(2x) - \psi'(x) ; \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\left(\frac{2x}{e^{2x} - 1}\right) - \frac{x}{e^x - 1} \\ &= \frac{4x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} - \frac{x(e^x + 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} \\ &= \frac{4x - x e^x - x}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \end{aligned}$$

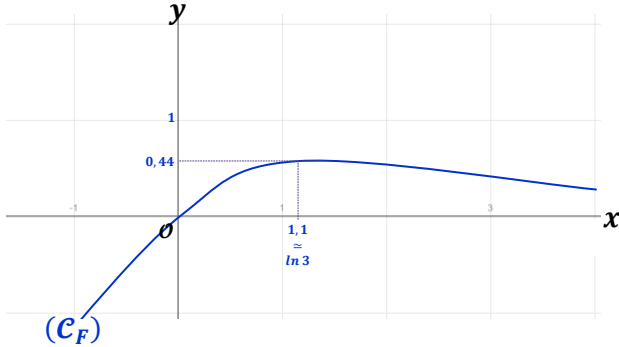
Voyons d'abord est-ce que F est dérivable en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^{2x} - e^0}{2x - 0}\right)} \cdot \left(\frac{3 - e^x}{2} \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^t - e^0}{t - 0}\right)} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - e^x}{2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{e^0} \right) \times \left(\frac{3 - e^0}{2} \right) \\ &= 1 = F'(0) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} F'(x) = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} ; \forall x \in \mathbb{R}^* \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

La Question : IV) 4)

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$	+	1	0	-
F	$-\infty$	0	0,44	0



Oujda

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned}
 E &= \{ M \in (\mathcal{P}) ; \sqrt{3}MA = 2MM' \} \\
 &= \{ M \in (\mathcal{P}) ; \sqrt{3}|z_A - z_M| = 2|z_{M'} - z_M| \} \\
 &= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) ; \sqrt{3} \left| \frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy \right| = 2 \left| \frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy - iy \right| \right\} \\
 &= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) ; \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x \right)^2 + y^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right)^2} \right\} \\
 &= \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) ; 3 \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x \right)^2 + y^2 \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right)^2 \right\} \\
 &= \left\{ M \in (\mathcal{P}) ; 3 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}x + x^2 + y^2 \right) = 4 \left(\frac{3}{4} - \sqrt{3}x + x^2 \right) \right\} \\
 &= \{ M \in (\mathcal{P}) ; 4 - 4\sqrt{3}x + 3x^2 + 3y^2 = 3 - 4\sqrt{3}x + 4x^2 \} \\
 &= \{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) ; -x^2 + 3y^2 = -1 \} \\
 &= \{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{P}) ; -x^2 + 3y^2 = -1 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}
 \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} ; \frac{x^2 - 1}{3} \geq 0 \right\} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R} ; x^2 - 1 \geq 0 \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R} ; (x - 1)(x + 1) \geq 0 \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R} ; x \in]-\infty, -1] \text{ ou } x \in [1, +\infty[\} \\
 &=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[
 \end{aligned}$$

soit $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$

$$\text{car : } \begin{cases} x \leq -1 \Rightarrow -x \geq 1 \\ x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \end{cases}$$

$$f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = f(x)$$

D'où f est une fonction paire

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}}}{x - 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} \right) \left(\sqrt{\frac{(x - 1)(x + 1)}{3}} \right) \\
 &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x - 1}} \left(\frac{1}{t} \right) \left(\sqrt{\frac{t(t + 2)}{3}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{t(t + 2)}{3t^2}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{t + 2}{3t}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3t}} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{0^+}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3} + \infty} = +\infty \notin \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

La Question : 2) c)

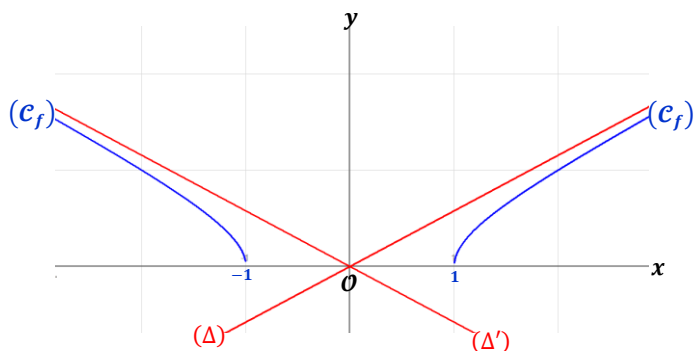
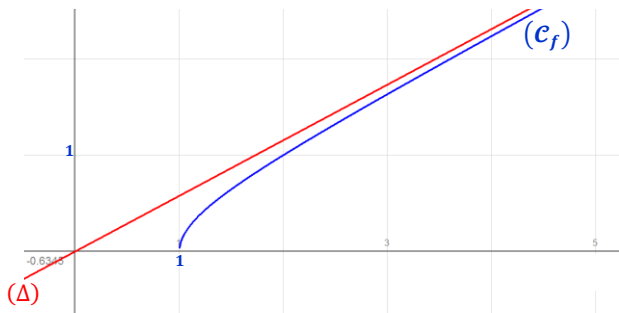
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{3x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3x^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} - \frac{\sqrt{3}x}{3} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} - \frac{\sqrt{3}x}{3} \right) \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} + \frac{\sqrt{3}x}{3} \right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} + \frac{\sqrt{3}x}{3} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x^2-1}{3} - \frac{3x}{9} \right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} + \frac{\sqrt{3}x}{3} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3}}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} + \frac{\sqrt{3}x}{3} \right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\sqrt{3}x}{3} \right) = +\infty \end{cases}$$

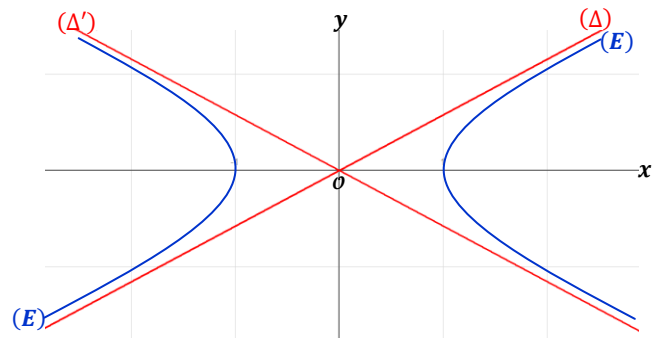
c-à-d que la droite $(\Delta) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$



La Question : 2) d)

$$\begin{aligned}
E &= \{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) ; x^2 - 3y^2 = 1 \} \\
&= \left\{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) ; y^2 = \frac{x^2-1}{3} \right\} \\
&= \left\{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) ; y = \pm \sqrt{\frac{x^2-1}{3}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ M(x,y) \in (\mathcal{P}) ; y = \begin{cases} \text{ou bien } f(x) \\ \text{ou bien } -f(x) \end{cases} \right\} \\
&= (C_f) \cup (C_{-f})
\end{aligned}$$



La Question : 3) a)

Pour simplifier, l'écriture : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$.
et c'est juste pour dire :
 $M(a + ib) \top M(c + id) = M((ac + 3bd) + i(ad + bc))$.
Bien évidemment cette invention aidera à simplifier les notations. Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ trois éléments du plan complexe,

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \top \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac + 3bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e(ac + 3bd) + 3f(ad + bc) \\ f(ac + 3bd) + e(ad + bc) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} eac + 3bde + 3fad + 3fbc \\ fac + 3bdf + ead + ebc \end{pmatrix} \quad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d' autre part : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} ec + 3df \\ cf + ed \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(ec + 3df) + 3b(cf + ed) \\ a(cf + ed) + b(ec + 3df) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} aec + 3dfa + 3bcf + 3bed \\ acf + aed + bec + 3dfb \end{pmatrix} \quad (**)
\end{aligned}$$

Celui qui jettera un coup d'œil sur (*) et (**) se rendra compte qu'il s'agit bien d'un même point dans le plan complexe

$$D'où : \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \top \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \left[\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right]$$

Donc l'associativité de la loi $\top$ est vérifiée.

La Question : 3) b)

Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ deux points de E

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 3by \\ ay + bx \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& (ax + 3bd)^2 - 3(ay + bx)^2 \\
&= a^2x^2 + 9b^2y^2 + 6axby - 3a^2y^2 - 3b^2x^2 - 6axby \\
&= x^2(a^2 - 3b^2) - 3y^2(a^2 - 3b^2) \\
&= (a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in E^2 &\Leftrightarrow a^2 - 3b^2 = 1 \text{ et } x^2 - 3y^2 = 1 \\
&\Rightarrow (a^2 - 3b^2)(x^2 - 3y^2) = 1 \\
&\Rightarrow (ax + 3bd)^2 - 3(ay + bx)^2 = 1 \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} ax + 3by \\ ay + bx \end{pmatrix} \in E \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in E^2 ; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$$

C-à-d que la loi $\top$ est une loi de composition interne dans E . Autrement-dit, l'ensemble E est stable par la loi $\top$.

La Question : 3) c)

On a $\top$ est une loi de composition interne dans E et cette loi est associative dans l'ensemble E . pour que E soit un groupe il suffit de vérifier les assertions suivantes : l'admission d'un élément neutre dans E et tout élément de E admet un symétrique dans E .

L'élément neutre :

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ l'élément neutre de la loi $\top$ dans E .

$$\text{Alors : } \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + 3by \\ xb + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ax + 3by = x \\ xb + ay = y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x(a - 1) + 3by = 0 \\ xb + y(a - 1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} xb(a - 1) + 3b^2y = 0 \\ xb(a - 1) + y(a - 1)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow 3b^2y - y(a - 1)^2 = 0 \\
&\Rightarrow -y(a^2 - 3b^2) + 2ay - y = 0 \\
&\Rightarrow -y + 2ay - y = 0 ; \text{ car } (a^2 - 3b^2) = 1 \\
&\Rightarrow a = 1 \\
&\Rightarrow b = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Inversement : } \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 3 \times 0 \times y \\ 0x + 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 3 \times 0 \times y \\ 1y + 0x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de la loi $\top$ dans E .

La symétrie :

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de E .

Et soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son symétrique dans E .

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} xx' + 3yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} yxx' + 3y^2y' = y \\ x^2y' + xyx' = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow 3y^2y' - x^2y' = y \\
&\Rightarrow -y'(x^2 - 3y^2) = y \\
&\Rightarrow -y' = y \\
&\Rightarrow y' = -y ; \text{ ainsi } x' = x \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \in E \text{ car } x^2 - 3(-y)^2 = 1
\end{aligned}$$

Inversement :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 \\ -xy + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 \\ xy - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc tout élément $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans E admet un seul symétrique $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ dans E .

Finalement : On conclut que $(E, \top)$ est un groupe abélien (commutatif). il est commutatif car la loi $\top$ est commutative dans E .

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd \\ ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \top \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]$$

La Question : 1) a)

1^{ère} Méthode : la décomposition en facteurs premiers : les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 109 sont 2, 3, 5 et 7. Et on remarque que 109 n'est pas divisible par aucun de ces nombres. Alors 109 est un nombre premier. De même, pour $226 = 2 \times 113$, les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 113 sont 2, 3, 5 et 7. On remarque que 113 n'est pas divisible par aucun de ces nombres, Alors c'est un nombre premier. D'où : $226 \wedge 109 = 2 \times 113 \wedge 109 = 1$. C-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

2^{ème} Méthode : l'algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{r} 226 \quad 109 \\ 8 \quad 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{226 \wedge 109 = 109 \wedge 8}$$

$$\begin{array}{r} 109 \quad 8 \\ 5 \quad 13 \end{array} \Rightarrow \boxed{109 \wedge 8 = 8 \wedge 5}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \\ 3 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{8 \wedge 5 = 5 \wedge 3}$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{5 \wedge 3 = 3 \wedge 2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{3 \wedge 2 = 2 \wedge 1}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{2 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 1}$$

D'où $226 \wedge 109 = 1$
c-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

Rappel : une équation $ax + by = c$ est résoluble dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $(a \wedge b)$ divise le nombre c . On a $226 \wedge 109 = 1$ divise bien le nombre 1. Alors l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

La Question : 1) b)

Revenons à nouveau à ce mouton qui est l'algorithme d'Euclide pour détecter une solution particulière de l'équation (E)

$$\begin{array}{r} 226 \quad 109 \\ 8 \quad 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{8 = 226 - 2 \times 109} \rightsquigarrow (1)$$

$$\begin{array}{r} 109 \quad 8 \\ 5 \quad 13 \end{array} \Rightarrow \boxed{5 = 109 - 13 \times 8} \rightsquigarrow (2)$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \\ 3 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{3 = 8 - 5 \times 1} \rightsquigarrow (3)$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{2 = 5 - 3 \times 1} \rightsquigarrow (4)$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{1 = 3 - 2 \times 1} \rightsquigarrow (5)$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \end{array} \Rightarrow \text{I'm not gonna need that} \rightsquigarrow (6)$$

$$\begin{aligned} (5) &\Rightarrow 1 = 3 - 2 \times 1 \\ &\Rightarrow 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 ; \text{ selon (4)} \\ &\Rightarrow 1 = 2 \times 3 - 1 \times 5 ; \text{ Simplification} \\ &\Rightarrow 1 = 2 \times (8 - 5) - 5 ; \text{ selon (3)} \\ &\Rightarrow 1 = 2 \times 8 - 3 \times 5 ; \text{ Simplification} \\ &\Rightarrow 1 = 2 \times 8 - 3(109 - 13 \times 8) ; \text{ selon (2)} \\ &\Rightarrow 1 = 41 \times 8 - 3 \times 109 ; \text{ Simplification} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 = 41 \times (226 - 2 \times 109) - 3 \times 109 ; \text{ selon (1)} \\ &\Rightarrow 1 = 41 \times 226 - 85 \times 109 ; \text{ Simplification} \\ &\Rightarrow 109(-85) - 226(-41) = 1 ; \text{ Réorganisation} \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(-85, -41)$ est une solution particulière de l'équation (E). Soit (x, y) une solution de (E) et partons du système suivant :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x, y) \text{ est solution de (E)} \\ (-85, -41) \text{ est solution de (E)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109(-85) - 226(-41) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités on trouve :

$$109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$$

$$c - \text{à} - d : 109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (*)$$

D'après (*) on remarque que 109 divise le produit $226(y + 41)$, mais d'après Gauss, 109 et 226 sont premiers entre eux. Alors 109 divise $(y + 41)$. Il existe alors un entier relatif k' tel que $y + 41 = 109k'$. ou encore $y = 109k' - 41$. On remplace dans (*) on trouve $x = 226k' - 85$. un petit changement de variables accomplira la tâche, on pose ainsi $k' = k + 1$ On trouve :

$$\begin{cases} x = 226k' - 85 = 226(k + 1) - 85 = \boxed{226k + 141} \\ y = 109k' - 41 = 109(k + 1) - 41 = \boxed{109k + 68} \end{cases}$$

Ainsi, On a pu montrer l'implication directe suivante : Si (x, y) est solution de (E) , Alors elle s'écrit sous la forme $(226k + 141 ; 109k + 68)$.

Inversement.

Montrons que tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ qui s'écrivent sous la forme $(226k + 141 ; 109k + 68)$ sont des solutions de l'équation (E) . En effet :

$$\begin{aligned} &109(226k + 141) - 226(109k + 68) \\ &= 24634k + 15369 - 24634k - 15368 \\ &= 15369 - 15368 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est défini implicitement par :

$$\mathcal{S} = \{ (226k + 141 ; 109k + 68) \in \mathbb{Z}^2 ; \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$$

La Question : 1) c)

Soit $(d, e) = (141 + 226k ; 68 + 109k) ;$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} d \in \mathbb{N}^* \\ d \leq 226 \end{array} \right. &\Rightarrow 0 \leq 141 + 226k \leq 226 \\ &\Rightarrow \frac{-141}{226} \leq k \leq \frac{226 - 141}{226} \\ &\Rightarrow -0,62 \leq k \leq 0,37 \\ &\Rightarrow k \in \mathbb{N} \cap [-0,62 ; 0,7] \\ &\Rightarrow k \in \{0\} \\ &\Rightarrow k = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} d = 141 + 226k = 141 \\ e = 68 + 109k = 68 \end{cases} \end{aligned}$$

La Question : 2)

Les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 227 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. On vérifie aisément que 227 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers. Donc 227 est un nombre premier.

La Question : 3) a)

$$A = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 226\}$$

$$\begin{aligned} f : A &\mapsto A \\ a &\mapsto f(a) \equiv a^{109} [227] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : A &\mapsto A \\ a &\mapsto g(a) \equiv a^{141} [227] \end{aligned}$$

$$g(f(0)) \equiv (f(0))^{141} [227] \equiv (0^{109})^{141} [227] \equiv 0 [227]$$

$$\text{D'où : } g(f(0)) = 0$$

La Question : 3) b)

Soit a un élément de $A \setminus \{0\}$. On a 227 est un nombre premier, et il est premier avec a . sinon, on aura : ou bien 227 divisera a qui est plus petit que lui, ou bien a divisera le nombre premier 227 avec $a \neq 227$ ☹. Alors $a \wedge 227 = 1$. D'où, à l'aide du théorème de Fermat, On conclut que : $a^{227-1} \equiv 1 [227]$. C-à-d que : $a^{226} \equiv 1 [227]$. ☺

La Question : 3) c)

Soit a un élément de .

$$\begin{aligned} g(f(a)) &\equiv (f(a))^{141} [227] \\ &\equiv (a^{109})^{141} [227] \\ &\equiv a^{109 \times 141} [227] \\ &\equiv a^{1+226e} [227] ; \text{ selon 1)c) } \\ &\equiv a(a^{226})^e [227] \\ &\equiv a(1)^e [227] ; \text{ selon 3)b) } \\ &\equiv a [227] \quad \text{D'où : } g(f(a)) = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } f(g(a)) &\equiv (g(a))^{109} [227] \\ &\equiv (a^{141})^{109} [227] \\ &\equiv a^{141 \times 109} [227] \\ &\equiv a^{1+226e} [227] ; \text{ selon 1)c) } \\ &\equiv a(a^{226})^e [227] \\ &\equiv a(1)^e [227] ; \text{ selon 3)b) } \\ &\equiv a [227] \quad \text{D'où : } f(g(a)) = a \end{aligned}$$

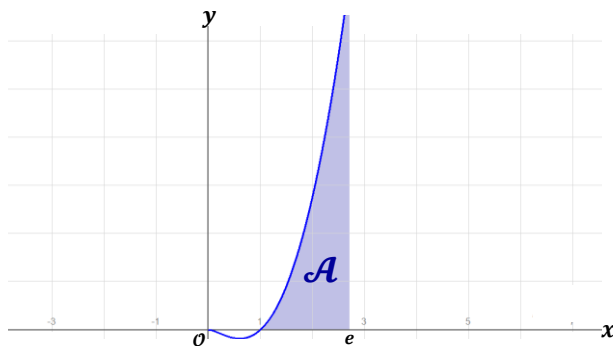
La Question : 3) d)

f et g sont deux bijections de A dans A .
l'une est l'inverse de l'autre.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)}_u dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u' dx \\ &= \left[\frac{x^3 \ln x}{3} \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$



La Question : 1) b)

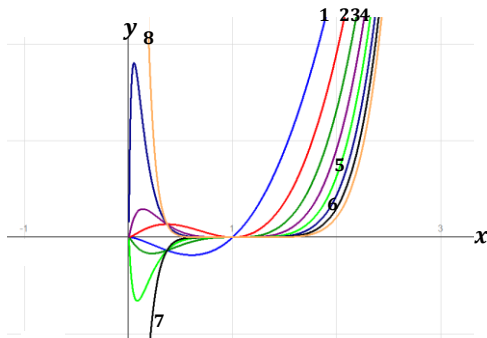
$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)^{p+1}}_u dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u' dx \\ &= \left[\frac{x^3 (\ln x)^{p+1}}{3} \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right) \left(\frac{(p+1)(\ln x)^p}{x} \right) dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3} \right) \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3} \right) I_p \end{aligned}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{1+1}{3}\right) I_1 & I_3 &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2+1}{3}\right) I_2 \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}\right) & &= \frac{e^3}{3} - \frac{5e^3}{27} + \frac{2}{27} \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} & &= \frac{4e^3 + 2}{27} \\
&= \frac{5e^3 - 2}{27}
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
1 \leq x \leq e &\Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq (\ln x)^p \leq 1 ; p \geq 1 \\
&\Rightarrow (\ln x)^p (\ln x - 1) \leq 0 \\
&\Rightarrow (\ln x)^{p+1} - (\ln x)^p \leq 0 \\
&\Rightarrow (\ln x)^{p+1} \leq (\ln x)^p \\
&\Rightarrow x^2 (\ln x)^{p+1} \leq x^2 (\ln x)^p \\
&\Rightarrow \int_1^e x^2 (\ln x)^{p+1} dx \leq \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx \\
\text{car } 1 < e \text{ et la continuité de } x^2 (\ln x)^p \text{ est vérifiée} \\
&\Rightarrow I_{p+1} \leq I_p ; p \geq 0 \\
&\Rightarrow \text{la suite } (I_p)_{p \geq 1} \text{ est décroissante}
\end{aligned}$$



La Question : 2) b)

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \text{ un élément de } [1, e] &\Rightarrow 1 \leq x \leq e \\
&\Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \\
&\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} (\ln x)^p = 0
\end{aligned}$$

car c est une suite géométrique (q^n)
dont la raison q est inférieure strictement
à 1 en valeur absolue $|\ln x| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} x^2 (\ln x)^p = 0$$

On a aussi les fonctions $x^2 (\ln x)^p$ sont toutes continues. et cette suite de fonctions converge vers la fonction continue 0 donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx &= \int_1^e \left(\lim_{p \rightarrow \infty} x^2 (\ln x)^p \right) dx \\
C - \text{à} - d : \lim_{p \rightarrow \infty} (I_p) &= \int_1^e 0 dx = 0
\end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)) \\
&= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=x+1}} \left(1 + \underbrace{(t-1)^2}_{t \rightarrow 0^+} - 2(t-1) \underbrace{t \ln t}_{t \rightarrow 0^+} \right) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} + 1 - 2 \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0} + 1 \right) \underbrace{\ln(1+x)}_{+\infty} \right) \\
&= (+\infty)(0 + 1 - 2(0 + 1)(+\infty)) \\
&= (+\infty)(-\infty) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

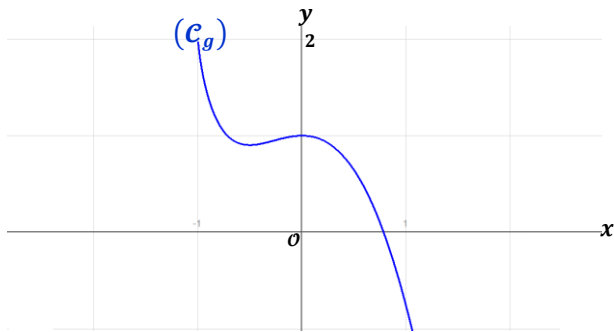
La Question : I) 2)

La fonction g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme étant une composition de sommes et produits de fonctions usuelles dérivables sur $]-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x - ((2x + 2x^2) \ln(1+x))' \\
&= 2x - \left((4x + 2) \ln(1+x) + \frac{2x(1+x)}{(1+x)} \right) \\
&= -(4x + 2) \ln(1+x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\Leftrightarrow -(4x + 2) \ln(1+x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (4x + 2) = 0 \text{ ou bien } \ln(1+x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou bien } x = 0
\end{aligned}$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$4x+2$	-	0	+	+
$\ln(1+x)$	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	-
g				



La Question : I) 3)

La fonction g est une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans son image $g(]0, +\infty[)$ car g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Selon le tableau ci-dessus On a :

$$g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; g(0) \right[=]-\infty, 1[$$

Ainsi g est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, 1[$.
c-à-d : $\forall y \in]-\infty, 1[; \exists ! x \in]0, +\infty[: g(x) = y$

Comme 0 est un élément de $]-\infty, 1[$.
Alors il existe un seul antécédent α dans $]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. A l'aide d'un petit calcul,
On aura : $g(1) \approx -0,77$ et $g(\frac{1}{2}) \approx 0,64$.

Et on remarque que $-0,77 < 0 < 0,64$.
Donc $g^{-1}(0,64) < g^{-1}(0) < g^{-1}(-0,77)$.
car g et g^{-1} sont toutes décroissantes.
Alors $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right) \\
 &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t=x+1}} (\ln t) \left(\frac{1}{t^2 - 2t + 2} \right) \\
 &= (-\infty) \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right) \\
 &= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=x+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2 - 2t + 2} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right) \left(\frac{1}{t - 2 + \frac{2}{t}} \right) \\
 &= 0 \times \left(\frac{1}{+\infty} \right) \\
 &= 0 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(1+x^2) \left(\frac{1}{1+x} \right) - 2x \ln(1+x)}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1+x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}
 \end{aligned}$$

Etant donné que $(1+x^2)^2 > 0$ toujours,
et $(1+x) > 0$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Donc : $\text{signe}(f'(x)) \equiv \text{signe}(g(x)) ; \forall x \in]-1, +\infty[$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
$g(x)$	+	+	1	+	0	-	-
$f'(x)$			+		0	-	
f							

La Question : II) 2) b)

Je sais que $g(\alpha) = 0$.

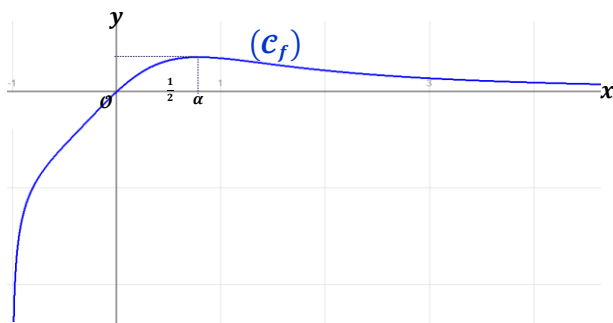
donc : $1 + \alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha) \ln(1+\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha^2 = 2\alpha(1+\alpha) \ln(1+\alpha) \quad (\odot)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi : } f(\alpha) &= \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \frac{\ln(1+\alpha)}{2\alpha(1+\alpha) \ln(1+\alpha)} \\
 &= \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}
 \end{aligned}$$

La réduction par α est légale,
car $\ln(1+\alpha) \neq 0$. (ie $\alpha \neq 0$)

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Pour calculer cette intégrale on aura besoin de la formule trigonométrique suivante :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

Par un procédé de changement de variables on pose : $t = \frac{\pi}{4} - x$

$$\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} & \Leftrightarrow t = 0 \\ dt = -dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ln(1 + \tan x) &= \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan t}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan t}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \tan t + 1 - \tan t}{1 + \tan t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) \\ &= \ln 2 - \ln(1 + \tan t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\ln 2 - \ln(1 + \tan t)) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan t)) dt \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\right) \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\right) \ln 2 - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } I &= \frac{\pi \ln 2}{4} - I \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi \ln 2}{4} \\ &\Leftrightarrow I = \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

La Question : III) 2)

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ du Domaine demandé à l'aide de l'intégrale ci-dessous :

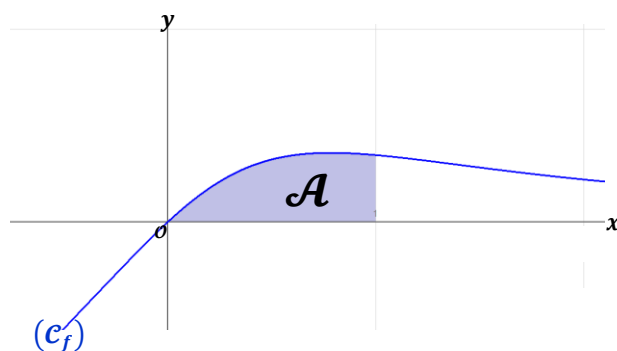
$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left| \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right| dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right) dx$$

On pose $t = \arctan x \Leftrightarrow \tan t = x$

$$\text{Alors : } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow dx = (1+x^2)dt$$

$$\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \mathcal{A} &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \right) (1+\tan^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt \\ &= \left(\frac{\pi \ln 2}{8}\right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \left(\frac{\pi \ln 2}{8}\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



NEVER GIVE UP!



2^{ème} BAC - SM

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION ORDINAIRE : JUIN 2018
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE**

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Il est clair que E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x, y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $\theta = M(0, 0)$. Soient $M(x, y)$ et $M(x', y')$ deux matrices de E .

$$\begin{aligned} M(x, y) - M(x', y') &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x' + 2y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - x' & -2(y - y') \\ y - y' & (x - x') + 2(y - y') \end{pmatrix} \\ &= M(x - x'; y - y') \in E \end{aligned}$$

Car $(x - x')$ et $(y - y')$ sont deux nombres réels.

conclusion, $(E, +)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel d'après le cours. Étant donné α un réel et $M(x, y)$ et $M(x', y')$ deux matrices de E .

$$\begin{aligned} \alpha \cdot M(x, y) + M(x', y') &= \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x' + 2y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2(\alpha y + y') \\ \alpha y + y' & (\alpha x + x') + 2(\alpha y + y') \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + x'; \alpha y + y') \in E \end{aligned}$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

La Question : 2) b)

Soit $M(x, y)$ un élément de E .

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot M(1, 0) + y \cdot M(0, 1) \\ &= x \cdot I + y \cdot J \end{aligned}$$

Autrement dit, la famille (I, J) engendre l'espace $(E, +, \cdot)$. Si de plus elle est libre, ce serait une base à cet espace. Pour que la famille (I, J) soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\alpha \cdot I + \beta \cdot J = \theta$$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{et } \alpha = 0 \\ \text{et } \beta = 0 \end{cases}$$

Conclusion : (I, J) est libre Donc c'est une base de E .

Pause Méditation :

« The strong man is not the good wrestler. The strongest among you is the one who controls his anger »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall M, N \in E ; M \times N \in E$

$$\begin{aligned}
M \times N &= M(x, y) \times M(x', y') \\
&= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xx' - 2yy' & -2(x'y + y'x + 2yy') \\ x'y + y'x + 2yy' & xx' - 2yy' + 2(x'y + y'x + 2yy') \end{pmatrix} \\
&= M(xx' - 2yy' ; x'y + y'x + 2yy') \in E
\end{aligned}$$

Car $(xx' - 2yy') \in \mathbb{R}$ et $(x'y + y'x + 2yy') \in \mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $\times$ est associative dans E.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E.
- $\times$ est commutative dans E.

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, on se donne trois matrices dans E. On utilisera éventuellement le résultat déjà prouvé suivant :

$$M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - 2yy' ; x'y + y'x + 2yy')$$

D'une part On a :

$$\begin{aligned}
&M(x, y) \times (M(x', y') \times M(x'', y'')) \\
&= M(x, y) \times M(x'x'' - 2y'y'' ; xy' + y'x'' + 2y'y'') \\
&= M(xx'x'' - 2xy'y'' \\
&\quad - 2y(xy' + y'x'' + 2y'y'') ; x(xy' + y'x'' \\
&\quad + 2y'y'') + y(x'x'' - 2y'y'') \\
&\quad + 2y(xy' + y'x'' + 2y'y''))
\end{aligned}$$

D'autre part On retrouve le même résultat en calculant $(M(x, y) \times M(x', y')) \times M(x'', y'')$.

On peut même déduire l'associativité de $\times$ du fait que E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$

Pour la troisième assertion, On se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x, y) + M(x', y') = M(x + x' ; y + y') \\ M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - 2yy' ; x'y + y'x + 2yy') \end{cases}$$

D'une part :

$$\begin{aligned}
&M(x, y) \times (M(x', y') + M(x'', y'')) \\
&= M(x, y) \times M(x' + x'' ; y' + y'') \\
&= M(x(x' + x'') - 2y(y' + y'') ; x(y' + y'') + y(x' + x'') \\
&\quad + 2y(y' + y'')) \\
&= M(xx' + xx'' - 2yy' - 2yy'' ; xy' + xy'' + yx' + yx'' \\
&\quad + 2yy' + 2yy'')
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&M(x, y) \times M(x', y') + M(x, y) \times M(x'', y'') \\
&= M(xx' - 2yy' ; xy' + yx' + 2yy') \\
&\quad + M(xx'' - 2yy'' ; xy'' + yx'' + 2yy'') \\
&= M(xx' + xx'' - 2yy' - 2yy'' ; xy' + xy'' + yx' + yx'' \\
&\quad + 2yy' + 2yy'')
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&M(x, y) \times (M(x', y') + M(x'', y'')) \\
&= M(x, y) \times M(x', y') + M(x, y) \times M(x'', y'')
\end{aligned}$$

c-à-d que la loi $\times$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$. De la même façon on montre la distributivité à droite.

Pour la 4^{ème} assertion on se donne deux éléments $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de E :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \times M(x', y') &= M(xx' - 2yy' ; xy' + x'y + 2yy') \\
&= M(x'x - 2y'y ; y'x + yx' + 2y'y) \\
&= M(x', y') \times M(x, y)
\end{aligned}$$

D'où $\times$ est commutative dans E.

Finalement : $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

La Question : 4) a)

Soit l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}
\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (E, \times) \\
(x + iy) &\mapsto \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix} = M(x + y ; -y)
\end{aligned}$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\begin{aligned}
\varphi(z \times z') &= \varphi((x + iy)(x' + iy')) \\
&= \varphi((xx' - yy') + i(xy' + x'y)) \\
&= \begin{pmatrix} xx' - yy' + xy' + x'y & 2(xy' + x'y) \\ -xy' - x'y & xx' - yy' - xy' - x'y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \varphi(z) \times \varphi(z') &= \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' + y' & 2y' \\ -y' & x' - y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xx' - yy' + xy' + x'y & 2xy' + 2x'y \\ -xy' - x'y & xx' - yy' - xy' - x'y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* ; \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$

c-à-d que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

La Question : 4) b)

Étant donnée $M(a, b)$ une matrice de E^* . Résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a, b)$.

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a, b) &\Leftrightarrow \varphi(x + iy) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a + 2b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b ; \text{ qui est unique dans } \mathbb{R} \\ y = -b ; \text{ qui est unique dans } \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = (a + b) - ib ; \text{ qui est unique dans } \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :

$\forall M(a, b) \in E^* ; \exists ! z = (a + b) - ib \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = M(a, b)$

D'où φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

L'élément $M(0, 0)$ est exclu parce qu'il n'est pas inversible par $\times$ dans E . On a pu montrer que φ est un homomorphisme bijectif (isomorphisme)

Alors : $\varphi(\mathbb{C}^*, \times) = (\varphi(\mathbb{C}^*), \times) = (E^*, \times)$

La Question : 4) c)

D'après les questions 4)a) et 4)b) on peut ainsi réclamer que les propriétés du groupe $(E^*, \times)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*, \times)$ via l'isomorphisme φ .

Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1 + i0)$ et tout élément $(x + iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Alors $(E^*, \times)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1 + 0i) = M(1, 0) = I$ et tout élément $M(x, y) = \varphi(x + y - iy)$ de E^* admet un symétrique $Sym(M(x, y))$ dans $(E^*, \times)$ avec :

$$\begin{aligned} Sym(M(x, y)) &= Sym(\varphi(x + y - iy)) \\ &= \varphi(Sym(x + y - iy)) \\ &= \varphi\left(\frac{x + y}{(x + y)^2 + y^2} + i\left(\frac{y}{(x + y)^2 + y^2}\right)\right) \\ &= M\left(\frac{x + 2y}{(x + y)^2 + y^2} ; \frac{-y}{(x + y)^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

La Question : 5)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps, à savoir, il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien
- $(E^*, \times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Pour la première assertion, c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de $+$ dans E résulte de celle de $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion, c'est déjà fait aussi dans la question 4)c).

Pour la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ résulte de la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$

En conclusion : $(E, +, \times)$ est un corps. et comme $\times$ est commutatif dans E . Alors finalement $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 1[p] &\Rightarrow (x^2)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}[p] ; \text{ car } (2k-1) \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p] \\ &\Rightarrow x^{(4k+3)-5} \equiv 1[p] \\ &\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1[p] \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} x^{p-5} \equiv 1[p] &\Rightarrow p/(x^{p-5} - 1) \\ &\Rightarrow (x^{p-5} - 1) = kp ; \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow x^{p-5} - kp = 1 \\ &\Rightarrow x \cdot (x^{p-6}) + p \cdot (-k) = 1 \\ &\Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z} ; ux + vp = 1 ; \text{ avec } \begin{cases} u = x^{p-6} \in \mathbb{Z} \\ v = -k \in \mathbb{Z} \\ p \geq 7 \end{cases} \\ &\Rightarrow x \wedge p = 1 ; \text{ D'après Bezout} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} x^{p-5} \equiv 1[p] &\Rightarrow x \wedge p = 1 ; \text{ d'après 2)a)} \\ &\Rightarrow x^{p-1} \equiv 1[p] ; \text{ d'après Fermat} \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Trop facile, il suffirait de remplacer $p = 4k + 3$ puis conclure.

La Question : 2) d)

$$\begin{aligned}
x^{p-5} \equiv 1[p] &\Rightarrow (x^{p-5})^k \equiv 1^k[p] ; k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow x^{k(p-5)} \equiv 1[p] ; k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p] ; k \in \mathbb{N}^* \\
&\Rightarrow \boxed{x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]} : (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{p-5} \equiv 1[p] &\Rightarrow x^{p-1} \equiv 1[p] ; \text{ selon 2)b)} \\
&\Rightarrow (x^{p-1})^{k-1} \equiv 1^{k-1}[p] ; \text{ avec } k-1 \geq 0 \\
&\Rightarrow x^{(p-1)(k-1)} \equiv 1[p] ; \text{ avec } k-1 \geq 0 \\
&\Rightarrow \boxed{x^2 \cdot x^{(p-1)(k-1)} \equiv x^2[p]} : (2)
\end{aligned}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow x^2 \equiv 1[p]$$

Finalement : $\boxed{\begin{array}{l} x^{p-5} \equiv 1[p] \\ p = 4k + 3 \\ k \in \mathbb{N}^* \end{array}} \Leftrightarrow x^2 \equiv 1[p]$

La Question : 3)

Pour résoudre l'équation $x^{62} \equiv 1[67]$
on utilise l'équivalence ainsi trouvée :
 $x^{p-5} \equiv 1[p] \Leftrightarrow x^2 \equiv 1[p]$

$$\begin{aligned}
x^{62} \equiv 1[67] &\Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67] \\
&\Leftrightarrow x^2 \equiv 1[67] \\
&\Leftrightarrow 67/(x^2 - 1) \\
&\Leftrightarrow 67/(x-1)(x+1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } 67/(x-1) \\ \text{oubien } 67/(x+1) \end{cases} ; \text{ car } 67 \in \mathbb{P} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } x-1 = 67k ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{oubien } x+1 = 67k ; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } x = 67k + 1 ; k \in \mathbb{Z} \\ \text{oubien } x = 67k - 1 ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le Troisième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (im + 2)^2 - 4(im + 2 - m) \\
&= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
&= (im)^2 + 4m - 4 \\
&= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2 \\
&= (im - 2i)^2
\end{aligned}$$

La Question : I) 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(im + 2) - (im - 2i)}{2} = (1 - m)i - 1 \\ z_2 = \frac{-(im + 2) + (im - 2i)}{2} = -(1 + i) \end{cases}$$

Remarque : Si $\Delta = 0$ Alors $z_1 = z_2 = -(1 + i)$

La Question : I) 2)

$$\begin{aligned}
z_2 &= -(1 + i) \\
&= -\left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right) \\
&= -2 \cos\left(\frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} \\
&= -2 \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= -\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= (-\sqrt{2}) \left(-e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \boxed{\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1 - i\sqrt{2})i - 1 \\
&= (i - 1) + \sqrt{2} \\
&= \left(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{i0}\right) + \sqrt{2} \\
&= 2i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2}\right)} + \sqrt{2} \\
&= 2i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2} \\
&= 2i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}i \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2} \left(1 + ie^{\frac{i\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2} \left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2} \left(e^{i0} + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2} \left(2 \cos\left(\frac{0 - \frac{3\pi}{4}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0 + \frac{3\pi}{4}}{2}\right)}\right) \\
&= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)} \\
&= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}
\end{aligned}$$

$$\text{Or ; } \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} ; \text{ car } 0 < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(m) &\mapsto M'(-im - 1 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(M) = M' &\Leftrightarrow (z_{M'} - z_{\Omega}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_M - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow -im - 1 + i - z_{\Omega} = -i(m - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow -im - 1 + i = -im + i z_{\Omega} + z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow -im - 1 + i + im = (i + 1)z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow (-1 + i) = (i + 1)z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1 + i}{i + 1}\right) = z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1 + i}{i + 1}\right)\left(\frac{i - 1}{i - 1}\right) = z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow \frac{-1 + i + i + 1}{2} = z_{\Omega} \\ &\Leftrightarrow \boxed{i = z_{\Omega} = \omega} \end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B) = A &\Leftrightarrow (z_A - z_{\Omega}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B - z_{\Omega}) \\ &\Leftrightarrow -1 - i - i = -i(b - i) \\ &\Leftrightarrow 1 + 2i = ib + 1 \\ &\Leftrightarrow b = 2 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned} \text{D'un côté on a : } \frac{(\omega - a)(m - b)}{(\omega - b)} &= \frac{(i + 1 + i)(m - 2)}{i - 2} \\ &= \frac{(2i + 1)(m - 2)(i + 2)}{(i - 2)(i + 2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{[(i + 2)(2i + 1)](m - 2)}{i^2 - 2^2} = \frac{(5i)(m - 2)}{-5}$$

$$= \boxed{2i - im}$$

$$\begin{aligned} \text{Or ; On a : } m' - a &= -im - 1 + i + 1 + i \\ &= \boxed{2i - im} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{(\omega - a)(m - b)}{(\omega - b)} = (m' - a)}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned} A, B, \Omega, \text{ et } M \text{ sont cocycliques} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_M - z_B}{z_{\Omega} - z_B}\right) \times \left(\frac{z_{\Omega} - z_A}{z_M - z_A}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_{\Omega} - z_A}\right) \times \left(\frac{z_{\Omega} - z_A}{z_M - z_A}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow A, M, \text{ et } M' \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

notez que d'après 2)a) on a eu :

$$\boxed{\left(\frac{z_M - z_B}{z_{\Omega} - z_B}\right) = \left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_{\Omega} - z_A}\right)}$$

La Question : II) 2) c)

$$\begin{aligned} A, M, \text{ et } M' \text{ sont colinéaires} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-im + 2i}{m + i + 1}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{-i(x + iy) + 2i}{x + iy + i + 1} \in \mathbb{R} ; m = x + iy \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y + i(2 - x)}{(x + 1) + i(y + 1)} \in \mathbb{R} ; \text{ Après organisation}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y + i(2 - x))(x + 1 - i(y + 1))}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}\left(\frac{(y + i(2 - x))(x + 1 - i(y + 1))}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -y(y + 1) + (x + 1)(2 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 - y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + y^2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{C}\left(I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{t}{1+t} \right) dt &= \int_0^x \left(\frac{1+t-1}{1+t} \right) dt \\&= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\&= \int_0^x 1 dt - \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} \right) dt \\&= [t]_0^x - [\ln|1+t|]_0^x \\&= x - \ln|1+x| \\&= x - \ln(1+x) \quad ; \quad \text{car } 1+x > 1 > 0\end{aligned}$$

La Question : I) 1) b)

Soient $x > 0$ et $0 \leq t \leq x$

On pose $u = t^2$ Alors $t = \sqrt{u}$

$$\text{Aussi : } \begin{cases} t=0 & \Leftrightarrow u=0 \\ t=x & \Leftrightarrow u=x^2 \end{cases}$$

$$\text{Encore : } \frac{du}{dt} = 2t = 2\sqrt{u} \Leftrightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du$$

$$\begin{aligned}\text{Alors : } \int_0^x \left(\frac{t}{1+t} \right) dt &= \int_0^{x^2} \left(\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \right) du \\&= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}} \right) du\end{aligned}$$

La Question : I) 1) c)

Soit u une variable muette
choisi a priori dans $[0, x^2]$ avec $x > 0$

$$u \in [0, x^2] \Rightarrow 0 \leq u \leq x^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{u} \leq x$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{u} \leq 1 + x$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{1 + \sqrt{u}} \geq \frac{1}{1 + x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{x^2} 1 du \geq \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{u}} \right) du \geq \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1 + x} \right) du$$

J'ai introduit $\frac{1}{2} \int_0^{x^2} du$ car la continuité est vérifiée

Et parce que $0 < x^2$ comme $0 < x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [u]_0^{x^2} \geq \int_0^x \left(\frac{t}{1+t} \right) dt \geq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \geq x - \ln(1+x) \geq \frac{x^2}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \geq \frac{1}{2(x+1)} \quad ; \quad \text{car } x^2 > 0$$

La Question : I) 2)

$$\text{Comme : } \frac{1}{2(x+1)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $x \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad x \rightarrow 0^+$
 $\boxed{\frac{1}{2}} \quad \quad \quad \boxed{\frac{1}{2}}$

Alors,

en vertu du critère de comparaison on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x) \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

$$\text{parce que } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$$

$$\begin{aligned}\text{Et : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} \right) \\&= (\ln(1+x))'_{x=0} = \frac{1}{1+0} = 1\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$C - \grave{a} - d$ que f est continue à droite en 0

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x) - 1}{x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1) \ln(1+x) - x}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \ln(1+x) + \ln(x+1) - x}{x^2} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \right) \\&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'_d(0) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La Question : II) 1) c)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) \\ &= (1+0) \times (+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2} \right) \ln(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln \left(x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \left(\ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}_{\rightarrow 0} = 0\end{aligned}$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OX) au voisinage de $+\infty$.

La Question : II) 2) a)

La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant une fraction (quotient) bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0, +\infty[$, (sur $\mathbb{R}$ tout entier même). Et le dénominateur est non nul.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0, +\infty[$.

Alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant un produit bien défini de deux fonction toutes les deux dérivables sur $]0, +\infty[$. Soit x un élément de $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{x} \right) \ln(1+x) \right)' \\ &= \left(\frac{x+1}{x} \right)' \ln(1+x) + \left(\frac{x+1}{x} \right) (\ln(1+x))' \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} \right) \ln(1+x) + \left(\frac{x+1}{x} \right) \left(\frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned}\text{Soit } x > 0 &\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \leq f'(x) \\ &\Rightarrow f'(x) \geq \frac{1}{2(x+1)} > 0 \\ &\Rightarrow f'(x) > 0\end{aligned}$$

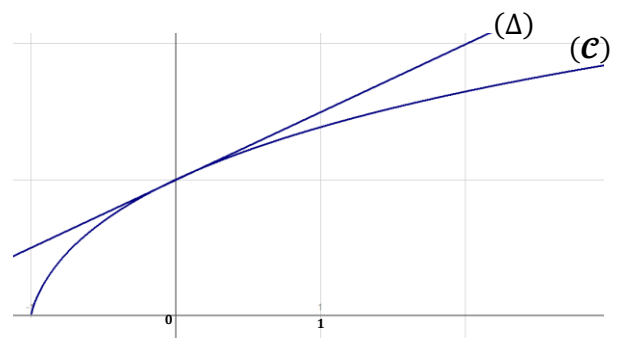
$\Rightarrow f$ est une fonction strictement $\nearrow$ sur $]0, +\infty[$

La Question : II) 2) c)

La continuité et la croissance de f nous assure l'écriture suivante :

$$f([0, +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[$$

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

$$\begin{aligned}\text{Soit } x > 0 &\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} ; \text{ car } \frac{1}{2(x+1)} > 0\end{aligned}$$

La Question : III) 1) b)

La fonction g est d'abord une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant une différence de deux fonctions dérivables. $g'(x) = f'(x) - 1$; $\forall x > 0$

$$\text{Comme } f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors } f'(x) - 1 \leq \frac{-1}{2} < 0$$

$$C - \grave{a} - d : g'(x) < 0 ; \forall x > 0$$

D'où g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et en vertu de cette décroissance et de la continuité de g sur $]0, +\infty[$ On écrit :

$$g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[=]-\infty, 1[$$

Calculs :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) \\ &= (+\infty)(0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - x = f(0) - 0 = 1$$

La Question : III) 1) c)

La fonction g est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $] -\infty, 1[$ car continue est strictement décroissante . Alors :

$$\begin{aligned} (\forall y \in]-\infty, 1[) (\exists! x \in]0, +\infty[) : g(x) &= y \\ (\text{pour } 0 \in]-\infty, 1[) (\exists! \alpha \in]0, +\infty[) : g(\alpha) &= 0 \\ C - \text{à} - d ; \exists! \alpha \in]0, +\infty[: f(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

On raisonne par récurrence sur l'entier naturel n que la propriété $P(n): u_n > 0$ est toujours vraie $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$; $u_0 = \alpha \in]0, +\infty[$ Donc l'instance $P(0)$ est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n > 0 \\ &\Rightarrow f(u_n) > f(0) ; \text{ car } f \nearrow \text{ sur }]0, +\infty[\\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 ; \text{ car } 1 > 0 \\ &\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \text{l'instance } P(0) \text{ est vraie} \\ \text{l'instance } P(n) \text{ implique } P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où l'on conclut la véracité de $P(n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$$

Pause Méditation :

« God enjoins you to treat women well, for they are your mothers, daughters, aunts »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : III) 2) b)

La fonction f est une fonction continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle inclus dans $]0, +\infty[$. Soit l'intervalle $[u_n, \alpha]$. avec $[u_n, \alpha] \subset]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f \text{ cont } [u_n, \alpha] \\ f \text{ dériv }]u_n, \alpha[\end{cases} &\Rightarrow \exists c \in]u_n, \alpha[; \left(\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right) = f'(c) \\ &\Rightarrow \left(\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right) = f'(c) \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{|f(u_n) - f(\alpha)|}{|u_n - \alpha|} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \\ &\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| ; \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La Question : III) 2) c)

$$\text{Soit } Q(n) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |a - \alpha|$$

$$\text{Pour } n = 0 ; |u_0 - \alpha| = |a - \alpha|$$

Donc $Q(0)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $Q(n)$ est vraie

$$\begin{aligned} Q(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |a - \alpha| \\ &\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} |a - \alpha| \\ &\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} |a - \alpha| \\ &\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} Q(0) \text{ est vraie} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; Q(n) \text{ est vraie}}$$

Pause Méditation :

« Say : My Lord be merciful to them as they brought me up in my childhood »

To Parents

La Question : III) 2) d)

Je réclame que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Car il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ strictement comprise entre -1 et 1 . En vertu du théorème sur les critères de convergence on en déduit la situation suivante :

$$|u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|}_{n \rightarrow \infty}$$

[0]

Ou encore :

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|}_{n \rightarrow \infty} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|}_{n \rightarrow \infty}$$

[0]

D'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$

Ou encore : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On remarque que la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant une composition bien définie de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors cette fonction admet une seule primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt ; F(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} ; F'(x) = e^{x^2} \end{cases}$$

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F'(x) = e^{x^2} ; \forall x \in \mathbb{R}$. Rappelez-vous :

La dérivabilité implique la continuité.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{x^2} > 0$.

C-à-d : $F'(x) > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : 2) a)

Soit $x \in]0, +\infty[$ et soit t une variable muette dans l'intervalle $[0, x]$.

$$\begin{aligned} t > 0 &\Rightarrow t^2 > 0 \Rightarrow e^{t^2} > e^0 \\ &\Rightarrow e^{t^2} > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{t^2} dt > \int_0^x 1 dt$$

$$\Rightarrow F(x) \geq x ; \forall x > 0$$

$$\Rightarrow F(x) \geq x$$

$x \rightarrow +\infty$ [$+\infty$]

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

La Question : 2) b)

$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$; Domaine symétrique

$\forall x \in \mathbb{R} ; -x \in \mathbb{R}$

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$$

$$= \int_0^{-x} (e^{u^2}) (-du) ; t = -u$$

$$= - \int_0^x (e^{u^2}) du = -F(x)$$

$\Rightarrow F$ est une fonction impaire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(-(-x))$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x}} F(-t)$$

$$= -\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = -\infty$$

La Question : 2) c)

F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$ car c'est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec :

$$F(\mathbb{R}) = F(]-\infty ; +\infty[)$$

$$=]\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)[$$

$$=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

La Question : 2) d)

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $F'(x) = e^{x^2} ; \forall x \in \mathbb{R}$. Alors G la fonction réciproque est aussi dérivable et on a :

$$G'(x) = \frac{1}{F'(G(x))} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$G'(0) = \frac{1}{F'(G(0))} = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{e^0} = 1$$

2^{ème} BAC - SM

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2018 □
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE**

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord, E est évidemment une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'il s'agit de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x, y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta$

En fait, On peut exhiber dans ce cas simple beaucoup d'éléments puisque la condition sur x et y est large et abondante. Il suffit que x et y soient dans $\mathbb{R}$.

Par suite, On utilise la caractérisation des sous groupes. On se donne deux éléments $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de E , et On souhaite montrer que : $M(x, y) - M(x', y')$ est un élément de E .

$$\begin{aligned} M(x, y) - M(x', y') &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - x' & y - y' \\ 0 & x - x' \end{pmatrix} = M(x - x' ; y - y') \in E \end{aligned}$$

Parce que $(x - x')$ et $(y - y')$ sont deux nombres réels. Le résultat demandé est établi.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel d'après le cours. Etant donné α un réel et $M(x, y)$ et $M(x', y')$ deux matrices de E .

$$\begin{aligned} \alpha \cdot M(x, y) + M(x', y') &= \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & \alpha y + y' \\ 0 & \alpha x + x' \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + x' ; \alpha y + y') \in E \end{aligned}$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que E est sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

La Question : 2) b)

Soit $M(x, y)$ un élément de E . On remarque que :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot M(1, 0) + y \cdot M(0, 1) \end{aligned}$$

Autrement dit : la famille $(M(1, 0) ; M(0, 1))$ engendre l'espace E . Si de plus elle est libre, elle serait une base à cette espace et par suite $\dim E$ serait 2.

Pour que la famille $(M(1, 0) ; M(0, 1))$ soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle θ est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot M(1, 0) + \beta \cdot M(0, 1) &= \theta \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot M(1, 0) + \beta \cdot M(0, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } \alpha = 0 \\ \text{Et bien } \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, $(M(1, 0) ; M(0, 1))$ est une base de E et $\dim E = 2$.

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall A, B \in E ; A \times B \in E$

Soient $A = M(x, y)$ et $B = M(x', y')$ deux matrices de E .

$$\begin{aligned}
A \times B &= M(x, y) \times M(x', y') \\
&= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xx' & xy' + x'y \\ 0 & xx' \end{pmatrix} = M(xx' ; xy' + x'y) \in E
\end{aligned}$$

Parce que xx' et $(xy' + x'y)$ sont deux nombres réels. Donc La stabilité de E par rapport à $\times$ est vérifiée.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $\times$ est associative dans E .
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E
- $\times$ est commutative dans E

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, On se donne trois matrices dans E . On utilisera éventuellement le résultat (déjà prouvé) suivant :

$$M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' ; xy' + x'y) .$$

D'une part on commence par :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \times (M(x', y') \times M(x'', y'')) \\
&= M(x, y) \times M(x'x'' ; x'y'' + y'x'') \\
&= M(xx'x'' ; x(x'y'' + y'x'') + yx'x'') \\
&= M(xx'x'' ; xx'y'' + xx'y' + x'x''y)
\end{aligned}$$

Et d'autre part on remarque que :

$$\begin{aligned}
(M(x, y) \times M(x', y')) \times M(x'', y'') \\
&= M(xx' ; xy' + yx') \times M(x'', y'') \\
&= M(xx'x'' ; xx'y'' + x'(xy' + yx')) \\
&= M(xx'x'' ; xx'y'' + x'xy' + x'x''y)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'associativité de la loi $\times$ dans E

Pour la troisième assertion, on se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x, y) + M(x', y') = M(x + x' ; y + y') \\ M(x, y) + M(x', y') = M(xx' ; xy' + yx') \end{cases}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \times (M(x', y') + M(x'', y'')) \\
&= M(x, y) \times M(x' + x'' ; y' + y'') \\
&= M(x(x' + x'') ; x(y' + y'') + y(x' + x'')) \\
&= M(xx' + xx'' ; xy' + xy'' + x'y + x''y)
\end{aligned}$$

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \times M(x', y') + M(x, y) \times M(x'', y'') \\
&= M(xx' ; xy' + x'y) + M(xx'' ; xy'' + x''y) \\
&= M(xx' + xx'' ; xy' + x'y + xy'' + x''y)
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans E .

Pour la 4^{ème} assertion, On se donne deux éléments $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de E :

$$\begin{aligned}
M(x, y) \times M(x', y') &= M(xx' ; xy' + x'y) \\
&= M(x'x ; yx' + y'x) \\
&= M(x', y') \times M(x, y)
\end{aligned}$$

Donc $\times$ est commutative dans E .

Finalement : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif

La Question : 4) a)

Pour montrer la stabilité de E par rapport à T , On se donne deux éléments $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de E . et on utilisera éventuellement les formules :

$$\begin{cases} M(x, y) - M(x', y') = M(x - x' ; y - y') \\ M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' ; xy' + x'y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
M(x, y) \top M(x', y') \\
&= M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0) \\
&= M(xx' ; xy' + x'y) - M(yy', 0) \\
&= M(xx' + yy' ; xy' + x'y) \in E
\end{aligned}$$

$$\text{car : } \begin{cases} (xx' + yy') \in \mathbb{R} \\ (xy' + x'y) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc T est une loi de composition interne dans l'ensemble E .

Avertissement : Le fait que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et T est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ceci n'implique jamais que T sera une loi de composition interne dans E .

La Question : 4) b)

Soit φ l'application défini par :

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\mapsto (E, \top) \\ (x + iy) &\mapsto M(x, y)\end{aligned}$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\varphi((x + iy) \times (x' + iy')) = \varphi(xx' - yy' + i(xy' + x'y))$$

Signalons que les nombres réels $(xx' - yy')$ et $(xy' + x'y)$ sont non nuls et cela à partir du moment que au moins x ou y le soit. et aussi pour x' et y' .

ainsi :

$$\varphi((xx' - yy') + i(xy' + x'y)) = M(xx' - yy' ; xy' + x'y)$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } \varphi(z) \top \varphi(z') &= M(x, y) \top M(x', y') \\ &= M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0) \\ &= M(xx' ; xy' + x'y) - M(yy', 0) \\ &= M(xx' - yy' ; xy' + x'y) \\ &= \varphi(z \times z')\end{aligned}$$

En conclusion : φ est un homomorphisme.

La Question : 4) c)

Etant donnée $M(a, b)$ une matrice de E^* . Résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a, b)$

$$\begin{aligned}\varphi(z) = M(a, b) &\Leftrightarrow \varphi(x + iy) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow M(x, y) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = a + ib\end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :

$$\forall M(a, b) \in E^*, \exists ! z = a + ib \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = M(a, b)$$

D'où φ est bijective de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \top)$.

l'élément $M(0, 0)$ est exclu pour φ car il n'est pas inversible par la loi $\top$.

Ainsi, les propriétés du groupe $(E^*, \top)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*, \times)$ via l'isomorphisme de groupes φ .

Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1 + 0i)$ et comme tout élément $(x + iy)$ de $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

Alors $(E^*, \top)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1 + i0) = M(1, 0)$ et tout élément $M(x, y)$ de E^* admet un symétrique $M\left(\frac{x}{x^2+y^2} ; \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(E^*, \top)$.

La Question : 5) a)

On se donne trois matrices de E et On utilise éventuellement les formules :

$$\begin{cases} M(x, y) + M(x', y') = M(x + x' ; y + y') \\ M(x, y) \top M(x', y') = M(xx' - yy' ; xy' + x'y)\end{cases}$$

D'une part , On commence par calculer :

$$\begin{aligned}&M(x, y) \top (M(x', y') + M(x'', y'')) \\ &= M(x, y) \top M(x' + x'' ; y' + y'') \\ &= M(x(x' + x'') - y(y' + y'') ; x(y' + y'') + y(x' + x'')) \\ &= M(xx' + xx'' - yy' - yy'' ; xy' + xy'' + yx' + yx'')\end{aligned}$$

Et d'autre part on poursuit le calcul par :

$$\begin{aligned}&M(x, y) \top M(x', y') + M(x, y) \top M(x'', y'') \\ &= M(xx' - yy' ; xy' + x'y) \\ &\quad + M(xx'' - yy'' ; xy'' + x''y) \\ &= M(xx' + xx'' - yy' - yy'' ; xy' + xy'' + yx' + yx'')\end{aligned}$$

D'où l'on conclut que $\top$ est distributive à gauche par rapport à $+$. On fera pareil pour la distributivité à droite puis on conclura.

La Question : 5) b)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps. à savoir il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien
- $(E^*, \top)$ est un groupe
- $\top$ est distributive par rapport à $+$ dans E

Pour la première assertion c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de $+$ dans E résulte de celle de $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ parce que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion c'est déjà réalisée aussi dans la question 4)c)

Pour la distributivité de $\top$ par rapport à $+$, elle est récemment établie dans la question 5)a)

On vient de prouver que $(E, +, \top)$ est un corps. Et comme $\top$ est commutative dans E d'après 4)c). Alors on dira finalement que $(E, +, \top)$ est un corps commutatif.

Pause Méditation :

« The Prophet Mohamed (PBUH) was asked :
" which charity is best ? »

He replied : " That which you give while you fear poverty " »

The Prophet Mohamed PBUH

Le Deuxième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
 h(z) = z &\Leftrightarrow i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = z \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = \frac{z}{i} \\
 &\Leftrightarrow i(z-2i) = z(z-i) ; \text{ notez } z \neq i \\
 &\Leftrightarrow iz + 2 = z^2 - iz ; \text{ Développement} \\
 &\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0 ; \text{ Réorganisation}
 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

$$(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(-2i) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = i - 1 = b \\ z_2 = \frac{-(-2i) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = i + 1 = a \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
 \frac{h(z) - a}{h(z) - b} &= \frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - b} = \frac{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) + ia}{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) + ib} \\
 &= \frac{\left(\frac{z-2i + i(1+i)(z-i)}{z-i}\right)}{\left(\frac{z-2i + i(-1+i)(z-i)}{z-i}\right)} \\
 &= \frac{z-2i + (i-1)(z-i)}{z-2i - (i+1)(z-i)} \\
 &= \frac{z-2i + iz + 1 - z + i}{z-2i - iz - 1 - z + i} \\
 &= \frac{iz - i + 1}{-iz - i - 1} \\
 &= \frac{i\left(z + \left(\frac{1-i}{i}\right)\right)}{-i\left(z + \left(\frac{i+1}{i}\right)\right)} \\
 &= -\left(\frac{z + \left(\frac{1-i}{i}\right)}{z + \left(\frac{i+1}{i}\right)}\right) = -\left(\frac{z + (-i-1)}{z + (1-i)}\right) \\
 &= -\left(\frac{z - (i+1)}{z - (-1+i)}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)
 \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$A(a) ; B(b) ; M(z) ; M'(h(z))$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) &= -\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \\
 \Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) &\equiv \arg\left(-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right) [2\pi] \\
 \Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) &\equiv \arg(-1) + \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) [2\pi] \\
 \Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M'}-z_B}\right) &\equiv \pi + \arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right) [2\pi] \\
 \Rightarrow \arg\left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right) &\equiv \pi + \arg\left(\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}\right) [2\pi] \\
 \Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) &\equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) [2\pi]
 \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

$$A, B \text{ et } M \text{ sont colinéaires} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0 [2\pi] \\ \text{Oubien } \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \pi [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv (\pi + 0) [2\pi] \\ \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv (\pi + \pi) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi [2\pi] \\ \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 2\pi [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi [2\pi] \\ \text{Oubien } \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Rightarrow A, B \text{ et } M' \text{ sont colinéaires}$$

$$\Rightarrow A, B, M \text{ et } M' \text{ sont colinéaires}$$

La Question : 3) b)

On suppose maintenant que les points A, B et M ne sont pas colinéaires.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) &= -\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \\
 \Rightarrow \left(\frac{a-h(z)}{b-h(z)}\right) \times \left(\frac{b-z}{a-z}\right) &= -1 \in \mathbb{R} \\
 \Rightarrow \left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right) \times \left(\frac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right) &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont cocycliques} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ils sont cocycliques car on a supposé} \\ \text{que } A, B, \text{ et } M \text{ ne sont pas colinéaires} \end{cases}$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Pour le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée et non truquée, l'univers des possibilités est $\Omega' = \{P, F\}$

L'expérience en question consiste à répéter le lancer 10 fois. Le résultat (d'obtenir Pile) est représenté par une variable aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre $p(\text{Pile})=p(\text{Face})=1/2$

La variable aléatoire X en question associe à chaque événement la fréquence d'apparition de Pile dans une série de 10 lancers.

Ainsi les valeurs possibles de X sont $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{10}{10}$

Autrement dit $X(\Omega') = \left\{ \frac{i}{10} ; 0 \leq i \leq 10 \right\}$

Les Questions : 1) b) et 2)

L'événement, $\left[X = \frac{1}{2}\right]$ ou plutôt $\left[X = \frac{5}{10}\right]$, donne une information sur l'obtention de (Pile) exactement 5 fois dans une épreuve de 10 lancers indépendants. Alors la probabilité de vérification de l'événement $\left[X = \frac{5}{10}\right]$ se calcule ainsi :

$$p\left[X = \frac{5}{10}\right] = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} = \frac{63}{256}$$

$$p\left[X \geq \frac{9}{10}\right] = p\left[X = \frac{9}{10}\right] \text{ ou } p\left[X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= p\left[X = \frac{9}{10}\right] + p\left[X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= C_{10}^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-10}$$

$$= \frac{11}{1024}$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} (\ln x)^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot 4 \cdot \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} (t \ln t)^2 = 16 \times 0^2 = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à droite en 0.

La Question : 1) b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2}$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times 0^2 = 0$$

D'où f admet une branche parabolique suivant l'axe (OX).

La Question : 2) a)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} \left(\frac{4 \ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} 16 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times (-\infty)^2$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 0. L'axe (OY) est une asymptote verticale au voisinage de 0.

La Question : 2) b)

En utilisant les théorèmes généraux de dérivabilités, on dira que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant le produit de fonctions toutes dérivables sur $]0, +\infty[$ à savoir $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$. soit $x > 0$:

$$f'(x) = (\sqrt{x} (\ln x)^2)'$$

$$= (\sqrt{x})' (\ln x)^2 + ((\ln x)^2)' \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$$

$$= \frac{(4 + \ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

Pause Méditation :

« Acquire knowledge, it enables its possessor to distinguish right from wrong, it lights the way to heaven, it is our friend in the desert, our society in solitude, our companion when friendless, it guides us to happiness, it sustains us in misery »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 2) c)

$$\forall x > 0 ; f'(x) = \frac{(4 + \ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-4} \text{ ou } x = 1$$

x	0	e^{-4}	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$4 + \ln x$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
f	0	$\left(\frac{4}{e}\right)^2$	$f(1)$	$+\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que f est continue et est strictement croissante sur $[0, e^{-4}]$.
Donc $f : [0, e^{-4}] \mapsto f[0, e^{-4}]$ est une bijection.

C-à-d que $f : [0, e^{-4}] \mapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

C-à-d $\forall y \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] ; \exists ! x \in [0, e^{-4}] : f(x) = y$

Autrement dit : $\forall x \in [0, e^{-4}] : f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$ (*)

de même pour la bijection $f : [e^{-4}, 1] \mapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

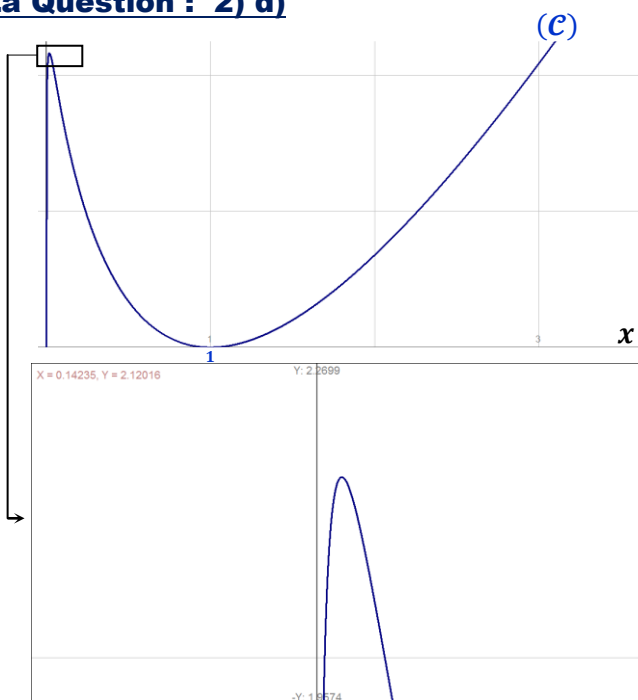
Autrement dit : $\forall x \in [e^{-4}, 1] : f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$ (**)

Finalement, en combinant les résultats (*) et (**)

On conclut que : $\forall x \in [0, 1] ; f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

Ou encore : $\forall x \in [0, 1] ; 0 \leq f(x) \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

La Question : 2) d)



La Question : 3) a)

On sait déjà que f est continue sur $[0, +\infty[$ et puisque $1 \in [0, +\infty[$ Alors elle admet une seule primitive φ sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, +\infty[: \varphi(x) = \int_1^x f(t) dt ; \varphi(0) = 0 \\ \forall x \in [0, +\infty[: \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } F(x) = \int_x^1 f(t) dt = - \int_1^x f(t) dt = -\varphi(x)$$

Comme φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ Alors F l'est aussi et On a : $F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -\sqrt{x}(\ln x)^2$

La Question : 3) b)

On a : $\forall x \in [0, +\infty[: F'(x) = -\sqrt{x}(\ln x)^2 < 0$.
Donc F est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \sqrt{t} \cdot \ln t dt &= \int_x^1 \underbrace{t^{1/2}}_{u(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)} dt \\ &= \left[\left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \right) t^{(\frac{1}{2} + 1)} \cdot \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t \right]_x^1 - \frac{2}{3} \int_x^1 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t \right]_x^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_x^1 \\ &= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x} \end{aligned}$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 \sqrt{t} (\ln t)^2 dt \\ &= \int_x^1 \underbrace{\sqrt{t}}_{u(t)} \underbrace{(\ln t)^2}_{v(t)} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} (\ln t)^2 \right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2 \ln t}{t} \right) dt \\ &= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3} \int_x^1 \left(t^{\frac{1}{2}} \cdot \ln t \right) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x} \right)$$

$$= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

Remarque : $x^{1/2} = \sqrt{x}$ et $x^{3/2} = x\sqrt{x}$

La Question : 4) c)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^1 f(t) dt ; \text{ car } f(x) \geq 0 ; \forall x \geq 0$$

$$= F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

$$= \frac{16}{27}$$

La Question : 5) a)

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$n \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow F(0) \geq F\left(\frac{1}{n}\right) \geq F(1) ; \text{ car } \left. \begin{array}{l} F \text{ est } \searrow \text{ sur } [0, +\infty[\\ \text{et } 0; \frac{1}{n}; 1 \in [0, +\infty[\end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{27} \geq u_n \geq 0 ; \text{ car } F(0) = \frac{16}{27} \text{ et } F(1) = 0$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est bornée}$$

$$n \geq 0 \Rightarrow n+1 > n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} ; \text{ passage à l'inverse}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{n+1}\right) > F\left(\frac{1}{n}\right) ; \text{ car } F \text{ est } \searrow \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n ; \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite croissante}$$

La Question : 5) b)

On a déjà montré que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante et est majorée par $\frac{16}{27}$; car $\frac{16}{27} \geq u_n \geq 0$
Donc elle est convergente vers une limite réelle.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) = F(0) = \frac{16}{27}$$



**2^{ème} BAC - SM
MAROC**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2017
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mercredi 05 juillet 2017**

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord E est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à valeurs réelles, elle est non vide car : $I = M(1,0) \in E$.

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E et α un nombre réel.

$$\begin{aligned}\alpha M(a,b) + M(c,d) &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + c & -3(\alpha b + d) \\ \alpha b + d & \alpha a + c \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha a + c ; \alpha b + d) \in E\end{aligned}$$

Parce que $(\alpha a + c)$ et $(\alpha b + d)$ sont deux nombres réels. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Soit $M(x,y)$ une matrice de E .

$$\begin{aligned}M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xI + yJ\end{aligned}$$

Donc (I,J) est une famille génératrice de E .

Soient α et β deux nombres réels,

$$\begin{aligned}\alpha I + \beta J = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{Et bien } \alpha = 0 \\ \text{Et bien } \beta = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc la famille (I,J) est libre. Alors c'est une base de E et on a $\dim E$ est le nombre d'éléments de (I,J) et c'est 2. $\boxed{\dim E = 2}$

La Question : 2) a)

On remarque au prime abord que E est une partie non vide de $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E :

$$\begin{aligned}M(a,b) + M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - 3bd & -3ad - 3bc \\ bc + ad & -3bd + ac \end{pmatrix} \\ &= M(ac - 3bd ; ad + bc) \in E\end{aligned}$$

Car $(ac - 3bd)$ et $(ad + bc)$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}) ; \times)$.

La Question : 2) b)

Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $\times$ est une loi associative.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E .
- $\times$ admet un élément neutre.
- $\times$ est commutative sur E .

La première assertion résulte du fait que $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel.

Les assertions 2^{ème} et 3^{ème} résultent du fait que E est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

La 4^{ème} assertion est vérifiée car $I = M(1,0)$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans E .

Pour la dernière assertion, c'est très simple, il suffirait de prendre deux matrices $M(a,b)$ et $M(c,d)$ et de voir est-ce bien : $M(a,b) \times M(c,d) = M(c,d) \times M(a,b)$

Je vous laisse le soin de réaliser ce petit calcul.

La Question : 3) a)

Soient (a, b) et (c, d) deux couples de $\mathbb{R}_*^2$:

$$\begin{aligned}\varphi((a + ib) \times (c + id)) &= \varphi((ac - bd) + i(ad + bc)) \\ &= M\left(ac - bd ; \frac{ad + bc}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a + ib) \times \varphi(a + ib) &= M\left(a ; \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \times M\left(c ; \frac{d}{\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(ac - 3 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} ; a \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot c\right) \\ &= M\left(ac - bd ; \frac{ad + bc}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$

Soit $M(a, b) \in E^*$:

$$\begin{aligned}\varphi(x + iy) = M(a, b) &\Leftrightarrow M\left(x ; \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a, b) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'équation $\varphi(x + iy) = M(a, b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$. Ou encore : $\forall M(a, b) \in E^* ; \exists ! z = a + ib\sqrt{3} \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = M(a, b)$

C'est-à-dire que l'application φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

Finalement : φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

La Question : 3) b)

Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe abélien et φ est un isomorphisme. Alors $\varphi(\mathbb{C}^*, \times) = (E^*, \times)$ est un groupe abélien aussi.

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned}J^{2017} &= (M(0, 1))^{2017} \\ &= \left(M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\ &= (\varphi(0 + i\sqrt{3}))^{2017} \\ &= (\varphi(i\sqrt{3}))^{2017} \\ &= \varphi(i\sqrt{3}) \times \varphi(i\sqrt{3}) \times \dots \times \varphi(i\sqrt{3}) \\ &= \varphi(i\sqrt{3} \times i\sqrt{3} \times \dots \times i\sqrt{3}) ; 2017 \text{ fois} \\ &= \varphi(i^{2017} \times (\sqrt{3})^{2017}) \\ &= \varphi(i \times \sqrt{3} \times ((\sqrt{3})^2)^{1008}) \\ &= \boxed{\varphi(i\sqrt{3} \cdot 3^{1008})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(J^{2017})^{-1} &= \text{sym}(J^{2017}) \\ &= \text{sym}(\varphi(i \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{1008})) \\ &= \varphi(\text{sym}(i \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{1008})) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{i \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{1008}}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{-i}{\sqrt{3} \cdot 3^{1008}}\right) \\ &= \varphi\left(0 - \frac{i}{\sqrt{3} \cdot 3^{1008}}\right) \\ &= M\left(0 ; \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{1008}}\right) \\ &= \boxed{M\left(0 ; \frac{-1}{3^{1009}}\right)}\end{aligned}$$

Finalement :

$$(J^{2017})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3^{1008}} \\ \frac{-1}{3^{1009}} & 0 \end{pmatrix}$$

La Question : 4)

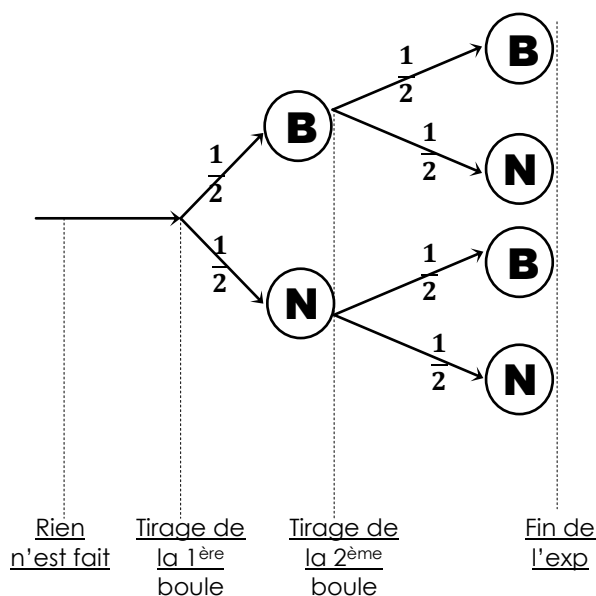
Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif, on vérifie aisément les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $(E^*, \times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.
- $\times$ est commutatif sur E .

Je vous laisse encore le soin de la vérification car on les a déjà montrées.

Le Deuxième Exercice

L'arborescence ci-dessous résume l'expérience aléatoire en question :



La Question : 1)

$$p\left(\begin{smallmatrix} \text{gain de} \\ 20 \text{ pts} \end{smallmatrix}\right) = p(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\left(\begin{smallmatrix} \text{perte de} \\ 20 \text{ pts} \end{smallmatrix}\right) = p(N \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\left(\begin{smallmatrix} \text{Gain} \\ \text{nul} \end{smallmatrix}\right) = p(BN \text{ ou } NB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} p\left(\begin{smallmatrix} \text{gain de} \\ 100 \text{ pts} \end{smallmatrix}\right) &= p\left(\begin{smallmatrix} \text{gain de} \\ 20 \text{ pts} \\ 5 \text{ fois} \end{smallmatrix}\right) \\ &= C_5^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-5} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} p\left(\begin{smallmatrix} \text{gain de} \\ 40 \text{ pts} \end{smallmatrix}\right) &= p\left(\begin{smallmatrix} \text{gain de} \\ 20 \text{ pts} \\ 2 \text{ fois} \end{smallmatrix}\right) \\ &= C_5^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{270}{1024} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

$$X(\Omega) = \{-20; 0; +20\}$$

$$p(X = -20) = p(N \cap N) = \frac{1}{4}$$

$$p(X = 0) = p(BN \text{ ou } NB) = \frac{1}{2}$$

$$p(X = +20) = p(B \cap B) = \frac{1}{4}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'application P_X définie ainsi :

$$P_X : X(\Omega) \mapsto [0,1]$$

-20	$\mapsto$	1/4
0	$\mapsto$	1/2
+20	$\mapsto$	1/4

La Question : 3) b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_k k \cdot p(X = k) \\ &= -20 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1)

$$M = M' \Leftrightarrow z' = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } z = 1 \\ \text{ou bien } z = -1 \end{cases}$$

La Question : 2)

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}$$

$$= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2}$$

$$= \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z + 1}$$

$$= \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2}$$

$$= \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$$

La Question : 3)

Rappel: La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points qui se situent à égale distance des deux extrémités du segment.

$$\text{On a : } \frac{BM'}{AM'} = \left| \frac{z' + 1}{z' - 1} \right| = \left| \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2} \right| = \left(\frac{BM}{AM} \right)^2$$

$$M \in \text{Médiatrice}[AB] \Rightarrow AM = BM$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BM}{AM}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BM'}{AM'} = 1$$

$$\Rightarrow AM' = BM'$$

$$\Rightarrow M' \in \text{Médiatrice}[AB]$$

La Question : 4)

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma) &\Rightarrow AMB \text{ est rectangle en } M \\
&\Rightarrow (AM) \perp (BM) \\
&\Rightarrow \left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \right) \in i\mathbb{R} \\
&\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \in i\mathbb{R} \\
&\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \left(\frac{z'+1}{z'-1} \right) \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_{M'} - z_A} \right) \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow (BM') \parallel (AM') \\
&\Rightarrow \boxed{M' \in (AB)}
\end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, est continue comme étant quotient de deux fonctions continues sur l'intervalle $]0, +\infty[$ avec le dénominateur est $\neq 0$.

Étudions maintenant la continuité à droite en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan } x}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\text{Arctan } x - \text{Arctan } 0}{x - 0} \right) \\
&= (\text{Arctan } x)'_{/x=0} \\
&= \left(\frac{1}{1+x^2} \right)_{/x=0} \\
&= \frac{1}{1+0^2} = 1 = f(0)
\end{aligned}$$

Donc f est continue à droite en 0.

Finalement : f est continue sur I .

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned}
t \in [0, x] &\Rightarrow 0 \leq t \leq x \\
&\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2 \quad ; \text{ passage au carré} \\
&\Rightarrow 1 \leq t^2 + 1 \leq x^2 + 1 \quad ; \text{ Ajout de 1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1 \quad ; \text{ passage à l'inverse}
\end{aligned}$$

La Question : I) 2) b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 + 1} &\leq \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1 \\
&\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \leq \int_0^x 1 dt
\end{aligned}$$

Introduction de $\int_0^x dt$ car $0 < x$ et la continuité est vérifiée.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\frac{t}{x^2 + 1} \right]_0^x \leq [\text{Arctan } t]_0^x \leq [t]_0^x \\
&\Rightarrow \boxed{\frac{x}{x^2 + 1} \leq \text{Arctan } x \leq x}
\end{aligned}$$

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2 + 1} &\leq \text{Arctan } x \leq x \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{\text{Arctan } x}{x} \leq 1 \quad ; \quad x > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} - 1 \leq \frac{\text{Arctan } x}{x} - 1 \leq 0 \quad ; \quad x > 0 \\
&\Rightarrow \frac{-x}{x^2 + 1} \leq \frac{\text{Arctan } x - 1}{x} \leq 0 \quad ; \quad x > 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right) \leq \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \leq 0 \\
&\quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
&\quad \boxed{0} \quad \quad \quad \boxed{0} \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ \text{et } f'_d(0) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La Question : I) 3) a)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \right)' \\
 &= \frac{x \left(\frac{1}{1+x^2} \right) - \operatorname{Arctan} x}{x^2} \\
 &= \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}
 \end{aligned}$$

La Question : I) 3) b)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Signe}(f'(x)) &\equiv \operatorname{Signe} \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x \right) \equiv (-) \\
 \Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[; f'(x) &\leq 0 \\
 \Rightarrow f \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[
 \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soient x et t deux éléments de $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad \frac{t}{t^2+1} &\leq \operatorname{Arctan} t \leq t \\
 \Rightarrow \frac{1}{t^2+1} &\leq \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \leq 1 ; t > 0 \\
 \Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{t^2+1} \right) dt &\leq \int_0^x \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right) dt \leq \int_0^x 1 dt \\
 \Rightarrow [\operatorname{Arctan} t]_0^x &\leq \int_0^x f(t) dt \leq [t]_0^x \\
 \Rightarrow \operatorname{Arctan} x &\leq \int_0^x f(t) dt \leq x \\
 \Rightarrow \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} &\leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1 ; x > 0 \\
 \Rightarrow f(x) &\leq g(x) \leq 1 ; x > 0
 \end{aligned}$$

Pour $x = 0$ On remarque que : $1 \leq 1 \leq 1$
 C-à-d : $\boxed{f(0) \leq g(0) \leq 1}$ valable aussi.

Finalement : $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[; f(x) \leq g(x) \leq 1}$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad f(x) &\leq g(x) \leq 1 \\
 \Rightarrow f(x) - 1 &\leq g(x) - 1 \leq 0 \\
 \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x} &\leq \frac{g(x) - 1}{x} \leq 0 ; x > 0 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \leq 0 \\
 \Rightarrow f'_d(0) &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \leq 0 \\
 \Rightarrow 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) \leq 0 \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} g \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ g'_d(0) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

Rappel :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont sur } I \\ a \in I \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} \exists ! \text{ primitive } \varphi \text{ sur } I \\ \forall x \in I ; \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \\ \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I ; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

On a f est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$
 Donc $\exists !$ primitive φ sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \geq 0 ; \varphi(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ et } \varphi(0) = 0 \\ \forall x \geq 0 : \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\text{On a : } g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$$

Les fonctions $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$. Donc g est dérivable aussi.

$$\begin{aligned}
 \forall x > 0 ; g'(x) &= \left(\frac{\varphi(x)}{x} \right)' \\
 &= \frac{x \varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} \\
 &= \frac{x f(x) - \varphi(x)}{x^2} \\
 &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} \left(\frac{\varphi(x)}{x} \right) \\
 &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} (g(x)) = \frac{1}{x} (f(x) - g(x))
 \end{aligned}$$

La Question : II) 3)

$$x > 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x) ; \text{ selon } \boxed{II} \boxed{1} \boxed{a}$$

$$\Rightarrow (f(x) - g(x)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}(f(x) - g(x)) \leq 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow g \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[$$

La Question : II) 4) a)

Soient $x > 1$ et $1 \leq t \leq x$.

$$0 < \operatorname{Arctan} t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} < \frac{\pi}{2t}$$

$$\Rightarrow 0 < \int_1^x \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \right) dt < \frac{\pi}{2} [\ln|t|]_1^x$$

$$\Rightarrow 0 < \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi \ln x}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi}{2} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \underset{x \rightarrow +\infty}{\underbrace{0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi}{2} \left(\frac{\ln x}{x} \right)}}_{\boxed{0}} \quad \underset{x \rightarrow +\infty}{\underbrace{\phantom{0 < \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt < \frac{\pi}{2} \left(\frac{\ln x}{x} \right)}}}_{\boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0}$$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(t) \leq f(0) ; \text{ car } f \searrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \underset{x \rightarrow +\infty}{\underbrace{\left[\frac{\pi}{4x} \right] \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \left[\frac{1}{x} \right]}}_{\boxed{0}} \quad \underset{x \rightarrow +\infty}{\underbrace{\phantom{\left[\frac{\pi}{4x} \right] \leq \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \leq \left[\frac{1}{x} \right]}}}_{\boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \right)$$

$$= 0 + 0 = \boxed{0}$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

La fonction $\varphi(x) = g(x) - x$ est continue sur $[0,1]$.

$$\begin{cases} \varphi(0) = g(0) - 0 = 1 > 0 \\ \varphi(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t) dt - 1 < 0 \end{cases}$$

Ainsi : $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$

Donc d'après le **TVI** : $\exists \alpha \in [0,1] ; \varphi(\alpha) = 0$

Ou encore : $\exists \alpha \in [0,1] ; g(\alpha) = \alpha$

α est unique car φ est strictement décroissante sur $[0,1]$. c'est très facile à démontrer.

La Question : III) 2) a)

$$\text{soit } x \in [0, +\infty[\Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \leq \operatorname{Arctan} x \leq x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{-\operatorname{Arctan} x}{x} \leq \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \leq 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

La Question : III) 2) b)

$$\blacksquare \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow -1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arctan} x \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \leq \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{g(x) - f(x)}{x} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{g(x) - f(x)}{x} \right) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{car } (x-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$$

La Question : III) 3) a)

g est une fonction continue et dérivable sur $[\alpha; u_n]$
donc, d'après le TAF, On conclut que :

$$\left(\frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} \right) = g'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

La Question : III) 3) b)

Soit $(P_n) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Pour $n = 0$. D'où (P_0) est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et tel que (P_n) soit vraie.

$$(P_n) \text{ est vraie} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (P_0) \text{ vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}$$

$$\blacksquare |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{n \rightarrow \infty} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

$$\Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } \alpha$$



**2^{ème} BAC - SM
MAROC**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION ORDINAIRE : JUIN 2019
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mardi 18 juin 2019**

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

La commutativité :

La commutativité de la loi $*$ sur $\mathbb{C}$ résulte de celle des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = a + ib$ deux complexes

$$\begin{aligned} z * z' &= (x + iy) * (a + ib) \\ &= xa + i(x^2b + a^2y) \\ &= ax + i(a^2y + x^2b) \\ &= (a + ib) * (x + iy) = z' * z \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 ; z * z' = z' * z$

C-à-d : $*$ est une LCI sur $\mathbb{C}$.

La Question : 1) b)

Soient $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = a + ib \\ z'' = m + in \end{cases}$ trois nombres complexes.

Dans un premier temps, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * (z' * z'') &= (x + iy) * ((a + ib) * (m + in)) \\ &= (x + iy) * (am + i(a^2n + m^2b)) \\ &= xam + i(x^2(a^2n + m^2b) + a^2m^2y) \\ &= \boxed{max + i(na^2x^2 + bx^2m^2 + ya^2m^2)} \quad (*) \end{aligned}$$

Dans un second temps, on a :

$$\begin{aligned} (z * z') * z'' &= ((x + iy) * (a + ib)) * (m + in) \\ &= (xa + i(x^2b + a^2y)) * (m + in) \\ &= xam + i(x^2a^2n + m^2(x^2b + a^2y)) \\ &= \boxed{max + i(na^2x^2 + bx^2m^2 + ya^2m^2)} \quad (**) \end{aligned}$$

Celui qui jettera un coup d'œil sur $(*)$ et $(**)$ pourrait facilement se rendre compte que l'associativité de la loi $*$ sur $\mathbb{C}$ est évidemment vérifiée :

$$\boxed{\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 ; z * (z' * z'') = (z * z') * z''}$$

La Question : 1) c)

L'élément neutre :

Soit e l'élément neutre (s'il existe) pour la loi $*$ sur l'ensemble $\mathbb{C}$. Alors : $\forall z \in \mathbb{C} ; z * e = e * z = z$

Vous aviez prévu de traiter les deux égalités, mais je me suis restreint à une seule parce que tout simplement la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

Soient $z = x + iy$ et $e = a + ib$ deux complexes :

$$\begin{aligned} z * e = z &\Leftrightarrow (x + iy) * (a + ib) = (x + iy) \\ &\Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x + iy \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } xa = x \\ \text{Et bien } x^2b + a^2y = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } a = 1 ; \text{ avec } x \neq 0 \\ \text{Et bien } x^2b + y = y \text{ car } a = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } a = 1 \in \mathbb{R} ; \text{ avec } x \neq 0 \\ \text{Et bien } b = 0 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \text{ est l'élément neutre} \\ \text{pour la loi } * \text{ sur } \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $(iy) \in i\mathbb{R}$, On vérifie que :

$$\begin{aligned} iy * 1 &= (0 + iy) * (1 + i0) \\ &= 0 + i(0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot y) \\ &= iy \end{aligned}$$

Donc $e = 1$ est aussi l'élément neutre pour la loi $*$ sur la droite imaginaire.

Finalement : La loi $*$ admet un élément neutre sur $\mathbb{C}$ et c'est le nombre entier naturel 1.

Avertissement : Dans cet exercice la lettre e n'est pas le nombre d'Euler
 $e = 2,718281828459045 \dots$
 C-à-d la base du logarithme naturel.
 e c'est juste pour dire élément neutre.

La Question : 1) d)

La symétrie :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
 et soit $z' = a + ib$ son symétrique (s'il existe) pour la loi $*$ sur $\mathbb{C}$. Alors : $z * z' = z' * z = 1$.

A cause de la symétrie, On démontrera le travail à une seule égalité.

$$\begin{aligned} z * z' = 1 &\Leftrightarrow (x + iy) * (a + ib) = 1 \\ &\Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = 1 + i0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } xa = 1 \\ \text{Et bien } x^2b + a^2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } a = \frac{1}{x} ; \text{ avec } x \neq 0 \\ \text{Et bien } x^2b + \frac{y}{x^2} = 0 ; \text{ avec } x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } a = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} ; \text{ avec } x \neq 0 \\ \text{Et bien } b = -\frac{y}{x^4} \in \mathbb{R} ; \text{ avec } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$z' = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ est le seule symétrique de $z = x + iy$ de la loi $*$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. C-à-d sur $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$.

Autrement dit :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} ; \exists ! z' \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} : \begin{cases} z * z' = 1 \\ z' * z = 1 \end{cases}$$

La Question : 2) a)

La stabilité de E par la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

$$E = \{ x + iy / x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } y \in \mathbb{R} \}$$

D'abord, il est clair et évident que E est trivialement une partie de $\mathbb{C}$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = a + ib$ deux nombres complexes de l'ensemble E .

Alors : $(a, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(b, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} z * z' &= (x + iy) * (a + ib) \\ &= xa + i(x^2b + a^2y) \end{aligned}$$

Comme $a > 0$ et $x > 0$.

Alors : $ax > 0$. Ainsi : $ax \in \mathbb{R}_+^*$.

De même, Comme $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4$

Alors : $(x^2b + a^2y) \in \mathbb{R}$ car $+$ et $\times$ sont 2 LCI sur $\mathbb{R}$.

La conclusion : $\boxed{\forall z, z' \in E ; z * z' \in E}$

C-à-d : que E est stable par $*$ dans $\mathbb{C}$.

La Question : 2) b)

Il suffirait de montrer que $(E, *)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}, *)$. Et pour cela, On devrait évaluer la véracité des 3 assertions ainsi proposées :

$$\begin{cases} (1) : (\mathbb{C}, *) \text{ est un groupe abélien} \\ (2) : E \subseteq \mathbb{C} \text{ et } E \neq \emptyset \\ (3) : \forall (z, t) \in E^2 ; z * \text{sym}(t) \in E \end{cases}$$

La première assertion résulte des 4 précédentes.

$$\text{C-à-d : } \begin{cases} * \text{ est associative et commutative sur } \mathbb{C} \\ * \text{ admet un élément neutre } 1 \\ \text{les éléments de } \mathbb{C} \text{ sont symétriques pour } * \end{cases}$$

Pour la 2^{ème} assertion, On remarque que E est une partie non vide de $\mathbb{C}$ puisqu'il s'agit de nombres complexes dont la partie réelle est strictement positives, et dont on peut trivialement exhiber beaucoup d'éléments de E , à savoir $(1 + 0i)$... $(4 + 3i)$

Pour la 3^{ème} assertion,

On se donne deux nombres complexes
 $(z = x + iy)$ et $(t = a + ib)$ avec $x > 0$ et $a > 0$

$$z * \text{sym}(t) = (x + iy) * \text{sym}(a + ib)$$

$$= (x + iy) * \left(\frac{1}{a} - i \frac{b}{a^4} \right)$$

$$= \frac{x}{a} + i \left(x^2 \cdot \left(\frac{-b}{a^4} \right) + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot y \right)$$

$$= \frac{x}{a} + i \left(\frac{-bx^2}{a^4} + \frac{y}{a^2} \right) \in E$$

$$\text{parce que } \left(\frac{-bx^2}{a^4} + \frac{y}{a^2} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Et que } \frac{x}{a} > 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

La Question : 3)

$$\begin{cases} E = \{x + iy ; x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \\ G = \{1 + iy ; y \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

D'abord, G est immédiatement une partie non vide de E car :

$$\begin{aligned} z \in G &\Rightarrow z = 1 + iy ; y \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow z = 1 + iy ; \begin{cases} 1 \in \mathbb{R}_+^* \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Rightarrow z \in E \end{aligned}$$

Elle est non vide puisqu'on peut exhiber au moins un élément et c'est $1 = 1 + i0 \in G \subset E \subset \mathbb{C}$

Soient maintenant $z = 1 + iy$ et $h = 1 + it$ deux nombres complexes de l'ensemble G .

$$\begin{aligned} z * \text{sym}(h) &= (1 + iy) * \left(\frac{1}{1} - i \frac{t}{1^4}\right) \\ &= (1 + iy) * (1 - it) \\ &= 1 + i(1^2(-t) + 1^2y) \\ &= 1 + i(y - t) \in G ; \text{ car } (y - t) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, on a pu prouver les postulats suivants :

$$\begin{cases} (1) : (E, *) \text{ est un groupe abélien déjà} \\ (2) : G \subseteq E \text{ et } G \neq \emptyset \\ (3) : \forall (z, h) \in G^2 ; z * \text{sym}(h) \in G \end{cases}$$

D'où $(G, *)$ est bien un sous-groupe abélien du groupe abélien $(E, *)$ et ceci selon la caractérisation des sous-groupe vue dans le cours.

La Question : 4) a)

D'abord, F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels explicitées dans l'énoncé de F .

On se donne deux matrices $M(x, y)$ et $M(a, b)$ de l'ensemble F .

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(a, b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F \end{aligned}$$

$$\text{parce que : } \begin{cases} xa > 0 ; \text{ car } a > 0 \text{ et } x > 0 \\ (xb + ya) \in \mathbb{R} \text{ triviale} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\forall M(x, y), M(a, b) \in F ; M(x, y) \times M(a, b) \in F}$$

C-à-d F est une partie stable pour la multiplication matricielle $\times$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} \varphi : (E, *) &\mapsto (F, \times) \\ (x + iy) &\mapsto M(x^2, y) \end{aligned}$$

Montrons que φ est un homomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

Soient $(x + iy)$ et $(a + ib)$ deux nombres complexes de E . Dans un premier temps on a :

$$\begin{aligned} \varphi((x + iy) * (a + ib)) &= \varphi(xa + i(x^2b + a^2y)) \\ &= M((xa)^2 ; x^2b + a^2y) \end{aligned}$$

Et dans un second temps on ait :

$$\begin{aligned} \varphi(x + iy) \times \varphi(a + ib) &= M(x^2, y) \times M(a^2, b) \\ &= \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2a^2 & x^2b + ya^2 \\ 0 & x^2a^2 \end{pmatrix} \\ &= M((xa)^2 ; x^2b + a^2y) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C} ; \varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')}$$

C-à-d : φ est 1 homomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

Pour Montrer la bijectivité de φ , ou bien on montre l'injectivité et la surjectivité de φ , ou bien on utilise la définition d'une application bijective. À savoir :

$$\begin{aligned} f : E &\mapsto F \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ bijective} \Leftrightarrow (\forall y \in F), (\exists ! x \in E) : f(x) = y}$$

Je propose l'usage de cette 2^{ème} Méthode :

$$\begin{aligned} \varphi : (E, *) &\mapsto (F, \times) \\ (x + iy) &\mapsto M(x^2, y) = \varphi(x + iy) \end{aligned}$$

Étant donnée $M(a^2, b)$ une matrice de F , existe-t-il un antécédent dans E pour cette matrice ou bien il en existe plusieurs via l'application φ . Résolvons alors l'équation $\varphi(x + iy) = M(a^2, b)$ d'inconnu le nombre complexe $x + iy$.

$$\varphi(x + iy) = M(a^2, b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a^2, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } x^2 = a^2 \\ \text{Et bien } y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x = -a \text{ et } y = b) \\ \text{ou bien } (x = a \text{ et } y = b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } x = a \\ \text{Et bien } y = b \end{cases} ; \text{ car } \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x + iy) = a + ib \text{ unique dans } E$$

La conclusion :

$$(\forall M(a^2, b) \in F), (\exists! z = a + ib \in E) ; \varphi(z) = M(a^2, b)$$

C-à-d que φ est bien une bijection de E vers F .

Ainsi : φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

La Question : 4) c)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G, *)$ vers un ensemble (F, T) , Alors l'image du groupe $(G, *)$ par f est le nouveau groupe $(f(G), T)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(f(G), T)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(G, *)$ via l'application f .

Comme $(E, *)$ est un groupe abélien d'élément neutre le nombre complexe $(1 + i0)$ et que tout nombre complexe $(x + iy)$ admet un seul symétrique $(\frac{1}{x}, -\frac{i}{x^4})$ pour la loi $*$ sur E .

Alors $(F, \times)$ est un groupe abélien aussi d'élément neutre la matrice $M(1^2, 0) = I$ et que toute matrice $M(x, y)$ de F admet une matrice symétrique $\text{sym}(M(x, y))$ pour la loi $\times$ sur F .

$$\begin{aligned} \text{sym}(M(x, y)) &= \text{sym}\left(M\left((\sqrt{x})^2, y\right)\right) \\ &= \text{sym}\left(\varphi(\sqrt{x} + iy)\right) \\ &= \varphi\left(\text{sym}(\sqrt{x} + iy)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - i \frac{y}{x^2}\right) \\ &= M\left(\frac{1}{x} ; \frac{-y}{x^2}\right) \in F \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{1}{x} > 0 \text{ et } \frac{-y}{x^2} \in \mathbb{R}$$

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + i)^2(1 + m)^2 - 4(2im) \\ &= (2i)(1 + m)^2 - 2i(4m) \\ &= (2i)((1 + m)^2 - 4m) \\ &= (2i)(m^2 + 2m + 1 - 4m) \\ &= (2i)(m^2 - 2m + 1) \\ &= (1 + i)^2(m - 1)^2 \\ &= ((1 + i)(m - 1))^2 \end{aligned}$$

$$\Delta \neq 0 \text{ car } m \notin \mathbb{R} \text{ donc } m \neq 1.$$

La Question : I) 1) b)

$$z_1 = \frac{(1 + i)(1 + m) - (1 + i)(m - 1)}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{(1 + i)(1 + m) + (1 + i)(m - 1)}{2} = m(1 + i)$$

La Question : I) 2) a)

$$\text{Rappel : } e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x + y}{2}\right)}$$

Soit $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + i) + m(1 + i) \\ &= (1 + i)(1 + m) \\ &= \left(e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)(e^{i0} + e^{i\theta}) \\ &= \left(e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)(e^{i0} + e^{i\theta}) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2}\right)e^{i\left(\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{0 - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{0 + \theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \\ \arg(z_1 + z_2) \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [2\pi] \end{cases}$$

Signalons enfin que la quantité $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est positive car si $0 < \theta < \pi$. alors : $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

D'où : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

La Question : I) 2) b)

On a : $z_1 z_2 = m(1+i)(1+i) = 2im$

Soit $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \in \mathbb{R} &\Rightarrow 2im \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 2\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)(e^{i\theta}) \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv 0 [\pi] \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv 0 [2\pi] \\ \text{ou bien } \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \pi [\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \theta \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou bien } \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} ; \text{ car } 0 < \theta < \pi \\ &\Rightarrow m = e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i \\ &\Rightarrow z_1 + z_2 = (1+i) + m(1+i) \\ &\quad = (1+i) + i(1+i) \\ &\quad = 1+i+i-1 \\ &\quad = 2i ; \text{ c'est gagné} \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soit r la rotation définie ainsi :

$$\begin{aligned} r\left(\mathcal{O}, \frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(B) = D &\Leftrightarrow (z_D - z_O) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_O) \\ &\Leftrightarrow (z_D - 0) = i((1+i)m - 0) \\ &\Leftrightarrow z_D = (i-1)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega \equiv \text{milieu}[CD] &\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} \\ &\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{(1-i) + (i-1)m}{2} \\ &\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2} = \omega \end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{b-a}{\omega}\right) &= \frac{(1+i)m - (1+i)}{(1-i)(1-m)} \times 2 \\ &= \frac{2(1+i)(m-1)}{(i-1)(m-1)} \\ &= \frac{2(1+i)}{(i-1)} \\ &= \frac{2(1+i)(i+1)}{(i-1)(i+1)} \\ &= \frac{2(2i)}{(-2)} = \boxed{-2i} \end{aligned}$$

La Question : II) 1) c)

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{\omega} = -2i &\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_O} = -2i \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_O}\right) \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \boxed{(AB) \perp (O\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{\omega} = -2i &\Rightarrow \left|\frac{z_B - z_A}{z_\Omega - z_O}\right| = |-2i| \\ &\Rightarrow \frac{|z_B - z_A|}{|z_\Omega - z_O|} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{AB}{O\Omega} = 2 \\ &\Rightarrow \boxed{AB = 2 O\Omega} \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned} (O\Omega) \text{ coupe } (AB) \text{ en } H &\Rightarrow A, B, H \text{ sont colinéaires} \\ &\Rightarrow \left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \boxed{\left(\frac{h-a}{b-a}\right) \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}\Omega) \perp (AB) &\Rightarrow (\mathcal{O}H) \perp (AB) ; \text{ car } H \in (\mathcal{O}\Omega) \\
&\Rightarrow \left(\frac{z_H - z_O}{z_B - z_A} \right) \in i\mathbb{R} \\
&\Rightarrow \boxed{\left(\frac{h}{b-a} \right) \in i\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \left(\frac{h-a}{b-a} \right) \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{h}{b-a} \right) \in i\mathbb{R} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\frac{h-a}{b-a} \right)} = \left(\frac{h-a}{b-a} \right) \\ \overline{\left(\frac{h}{b-a} \right)} = -\left(\frac{h}{b-a} \right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\frac{h}{b-a} \right)} - \overline{\left(\frac{a}{b-a} \right)} = \left(\frac{h-a}{b-a} \right) \\ \overline{\left(\frac{h}{b-a} \right)} = -\left(\frac{h}{b-a} \right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{h}{b-a} \right) - \overline{\left(\frac{a}{b-a} \right)} = \left(\frac{h-a}{b-a} \right) \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{h}{b-a} \right) - \overline{\left(\frac{1}{m-1} \right)} = \left(\frac{h-a}{b-a} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{h}{a-b} \right) + \left(\frac{h-a}{a-b} \right) = \left(\frac{1}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{2h-a}{a-b} = \frac{1}{\overline{m}-1} \\
&\Leftrightarrow 2h-a = \frac{a-b}{\overline{m}-1} \\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a-b}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)(\overline{m}-1)}{\overline{m}-1} + \frac{(1+i)(1-m)}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)(\overline{m}-m)}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2} (1+i) \left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow h = \frac{(1+i)}{2} \left(\frac{-2i \Im(m)}{\overline{m}-1} \right) \\
&\Leftrightarrow \boxed{h = (i-1) \left(\frac{\Im(m)}{1-\overline{m}} \right)}
\end{aligned}$$

$\Im(m)$ signifie la partie imaginaire de m

Pour la vérification vous ne seriez jamais amené à le faire, Mais pour me rassurer j'ai vérifié la fiabilité de ces résultats en faisant des calculs pénibles de fourmilles dans mon brouillon et j'ai pu réfuter mes doutes en trouvant bien les résultats attendues :

$$\begin{cases} \left(\frac{h-a}{b-a} \right) = \left(\frac{1 - \Re(m)}{|m|^2 - 2\Re(m) + 1} \right) \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{h}{b-a} \right) = \left(\frac{-\Im(m)}{|m|^2 - 2\Re(m) + 1} \right) i \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

Et saviez-vous la récompense que vous auriez obtenir comme gain en faisant tout ce vacarme ?!!!!

C'est 0,25 point. !!!!!

C'est génial non !!!!! ☸ ☸ ☸ !!!!!

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2969 \wedge n = 1 ; \text{ car } 2969 \in \mathbb{P} \\
&\Rightarrow \exists (v, u) \in \mathbb{Z}^2 ; 2969v + nu = 1 ; \text{ Bezout} \\
&\Rightarrow 2969v = (1 - nu) \\
&\Rightarrow 2969 \text{ divise } (1 - nu) \\
&\Rightarrow nu \equiv 1[2969]
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

D'abord, comme $(nu) = 1[2969]$

Alors : $\boxed{(nu)^8 = 1[2969]}$ (1)

Et comme : $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

Alors : $n^8 \equiv -m^8 [2969]$

D'où : $n^8 \times u^8 \equiv -m^8 \times u^8 [2969]$

C-à-d : $\boxed{(nu)^8 \equiv -(mu)^8 [2969]}$ (2)

Comme le relation modulo ($\equiv$) est transitive alors, d'après (1) et (2) on tire : $-(mu)^8 \equiv 1 [2969]$.

C-à-d : $\boxed{(mu)^8 \equiv -1 [2969]}$

D'où l'on tire aussi : $((mu)^8)^{371} \equiv (-1)^{371} [2969]$

Ou encore : $\boxed{(mu)^{2968} \equiv -1 [2969]}$

La Question : 1) c)

On raisonne par l'absurde que le nombre 2969 ne divise pas le produit (mu) .

On suppose que 2969 divise (mu) .

Alors : $(mu) \equiv 0 [2969]$

D'où : $(mu)^{2968} \equiv 0 [2969]$

Mais : $(mu)^{2968} \equiv -1 [2969]$

Alors on ait : $-1 \equiv 0 [2969]$

C-à-d : 2969 divise 1.

C'est totalement ridicule et absurde.

Ce qu'on a supposé est donc faux.

C-à-d : 2969 ne divise pas (mu) .

La Question : 1) d)

Comme 2969 est un nombre premier qui ne divise pas (mu) . Alors : $2969 \wedge mu = 1$

Résumons , On a : $\begin{cases} 2969 \text{ est un nbr premier} \\ 2969 \wedge mu = 1 \end{cases}$

Alors, selon Monsieur **FERMAT**, on en déduit la chose suivante : $(mu)^{2969-1} \equiv 1 [2969]$

C-à-d : $(mu)^{2968} \equiv 1 [2969]$

La Question : 2) a)

On procède via un raisonnement par l'absurde que le nombre 2969 divise n .

On suppose que 2969 ne divise pas n . Alors d'après l'analyse faite précédemment dans les questions **1 a b c d**, On conclut que :

$$\begin{cases} \text{Et bien } (mu)^{2968} \equiv -1 [2969] \\ \text{Et bien } (mu)^{2968} \equiv 1 [2969] \end{cases}$$

Sachant que la relation modulo est transitive donc on en déduit que $1 \equiv -1 [2969]$

Ou encore 2969 divise 2.

Mais c'est grossièrement ridicule, absurde et insensé. Ce qu'on avait supposé est par la suite faux. C-à-d que 2969 divise n .

La Question : 2) b)

Pour l'implication directe :

$$(n^8 + m^8) \equiv 0 [2969]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et bien } 2969 \text{ divise } n ; \text{ déjà vu} \\ \text{Et bien } 2969 \text{ divise } m ; \text{ valable} \end{cases}$$

Ces deux déclarations sont toutes les deux valables puisque m et n joueraient les mêmes rôles dans cet exercice tout entier.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Et bien } n \equiv 0 [2969] \\ \text{Et bien } m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

Pour l'implication réciproque, elle est trivialement vérifiable. D'où l'on conclut l'équivalence demandée :

$$(n^8 + m^8) \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } n \equiv 0 [2969] \\ \text{Et bien } m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

Autrement dit, les solutions de $(n^8 + m^8) \equiv 0 [2969]$ dans $\mathbb{N}^2$ sont les couples de multiples de 2969.

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2) \left(\frac{1}{xe^x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \\ &\rightarrow (+\infty) \left(\frac{1}{0^-} + \frac{1}{2} - \frac{1}{-\infty} \right) \\ &\rightarrow (+\infty) \left(-\infty + \frac{1}{2} + 0 \right) \\ &\rightarrow (-\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right) \\ &\rightarrow (+\infty)(0^+ + \infty - 1) \\ &\rightarrow (+\infty) \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant le produit de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$: La première est la fonction affine $x \mapsto 4x$ et la deuxième est une somme de deux autres fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$

Soit x un nombre réel,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (4x)' \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right) + 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)' \\
 &= 4 \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right) + 4x \left(-e^{-x} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 4(e^{-x} - 1) + 2x - 4x e^{-x} + 2x \\
 &= 4(e^{-x} - 1) + 4x - 4x e^{-x} \\
 &= 4(e^{-x} - 1) - 4x(e^{-x} - 1) \\
 &= (4 - 4x)(e^{-x} - 1) \\
 &= \boxed{4(1-x)(e^{-x} - 1)}
 \end{aligned}$$

La Question : I) 2) b)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	-	
$e^{-x} - 1$	+	-	-	
$f'(x)$	+	-	+	
f	$-\infty$	0	$f(1)$	$+\infty$

La Question : I) 2) c)

Rappel : TVI

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ y \in [f(a); f(b)] \end{array} \right. \Rightarrow \exists x \in [a, b] ; f(x) = y$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } f\left(\frac{3}{2}\right) &= 4 \times \frac{3}{2} \times \left(e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - 1 \right) \\
 &= 6 \left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{4} \right) < 0 ; \text{ car } 4,5 > 4
 \end{aligned}$$

$$\text{On a aussi : } f(2) = 8(e^{-2} + 1 - 1) = \frac{8}{e^2} > 0$$

$$\text{Ainsi : } f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \text{ et } f(2) > 0$$

$$\text{C - à - d : } f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) < 0$$

$$\text{Ou encore : } 0 \in \left[f\left(\frac{3}{2}\right) ; f(2) \right]$$

$$\text{Résumons : } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } \left[\frac{3}{2} ; 2 \right] \\ 0 \in \left[f\left(\frac{3}{2}\right) ; f(2) \right] \end{array} \right.$$

Alors d'après le TVI on déduit :

$$\boxed{\exists \alpha \in \left[\frac{3}{2} ; 2 \right] ; f(\alpha) = 0}$$

Et comme f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Alors le α est unique dans $\left[\frac{3}{2} ; 2 \right]$

$$\text{Finalement : } \boxed{\exists! \alpha \in \left[\frac{3}{2} ; 2 \right] ; f(\alpha) = 0}$$

La Question : I) 2) d)

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 4\alpha \left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0 ; \text{ car } \alpha \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

La Question : I) 3) a)

Rappel : Théorème de ROLLE

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right. \Rightarrow \exists c \in]a, b[; f'(c) = 0$$

$$\text{On vérifie aisément que : } \left\{ \begin{array}{l} f' \text{ est continue sur } [0, 1] \\ f' \text{ est dérivable sur }]0, 1[\\ f'(0) = f'(1) = 0 \end{array} \right.$$

Donc d'après le Théorème de **ROLLE**, On conclut :

$$\boxed{\exists x_0 \in]0, 1[; f''(x_0) = 0}$$

La Question : I) 3) b)

Rappel : TAF (Théorème des accroissements finis)

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ cont } [a, b] \\ f \text{ déri }]a, b[\end{array} \right. \Rightarrow \exists c \in]a, b[; \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = f'(c)$$

Calculons d'abord $f'''(x)$. c'est très facile de montrer l'existence à travers les théorèmes généraux. Je passe directement au calcul :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4e^{-x} - 4 - 4xe^{-x} + 4x \\
 \Rightarrow f''(x) &= -4e^{-x} - 4e^{-x} + 4xe^{-x} + 4 \\
 \Rightarrow f'''(x) &= 4e^{-x} + 4e^{-x} + 4e^{-x} - 4xe^{-x} \\
 &= 12e^{-x} - 4xe^{-x} \\
 &= \boxed{4e^{-x}(3-x)}
 \end{aligned}$$

Soit x un élément de l'intervalle $[0, 1]$ différent de x_0 . On considère l'intervalle $[x_0, x]$ (éventuellement $[x, x_0]$).

La fonction f'' est trivialement continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$ car c'est une somme de fonctions continues et dérivables. Alors d'après le **TAF**, appliqué à f'' sur $[x_0, x]$ on déduit que :

$$\exists c \in]x_0, x[; \left(\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} \right) = f'''(c)$$

$$C - \text{à} - d : \exists c \in]x_0, x[; \left(\frac{f''(x) - 0}{x - x_0} \right) = 4 e^{-c} (3 - c)$$

On a : $c \in]x_0, x[\subset]0, 1[$. Donc $c < 1$

Ainsi : $(3 - c) > 0$

D'où : $4 e^{-c} (3 - c) > 0$; car $e^{-c} > 0$

Finalement : $\forall x \neq x_0 : \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

La Question : I) 3) c)

Le point I d'abscisse x_0 est bien un point d'inflexion de la courbe (C) puisque f'' s'annule en x_0 (c-à-d $f''(x_0) = 0$) et change de signe au voisinage de x_0 .

$$C - \text{à} - d : \begin{cases} \forall x \geq x_0 ; f''(x) \geq 0 \\ \forall x \leq x_0 ; f''(x) \leq 0 \end{cases}$$

Parce que la quantité $\left(\frac{f''(x)}{x - x_0} \right)$ devrait toujours être positive sur $]0, 1[$.

La Question : I) 4) a)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x \left(\frac{1}{xe^x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) \\ &\rightarrow (-\infty) \left(\frac{1}{0^-} + \frac{1}{2} - \frac{1}{-\infty} \right) \\ &\rightarrow (-\infty) \left(-\infty + \frac{1}{2} + 0 \right) \\ &\rightarrow (+\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

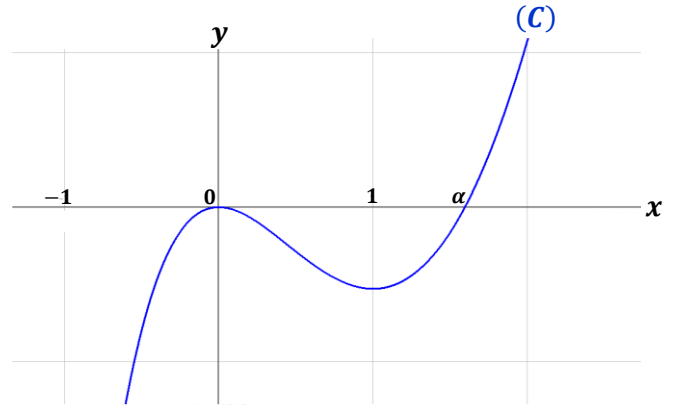
Alors (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY) au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{On a aussi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) \\ &\rightarrow 4(e^{-\infty} + \infty - 1) \\ &\rightarrow 4(0 + \infty - 1) \\ &\rightarrow (+\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

Alors (C) admet une 2^{ème} branche parabolique suivant l'axe (OY) au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 4) b)



La Question : I) 5) a)

$$x \in]-\infty, \alpha] \Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } x \in]-\infty, 0] \\ \text{oubien } x \in [0, 1] \\ \text{oubien } x \in [1, \alpha] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } x \leq 0 \\ \text{oubien } x \geq 0 \\ \text{oubien } x \leq \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } f(x) \leq f(0); f \nearrow \text{ sur }]-\infty, 0] \\ \text{oubien } f(x) \leq f(0); f \searrow \text{ sur } [0, 1] \\ \text{oubien } f(x) \leq f(\alpha); f \nearrow \text{ sur } [1, \alpha] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } f(x) \leq 0 \\ \text{oubien } f(x) \leq 0 \\ \text{oubien } f(x) \leq 0 \end{cases} ; \text{ avec } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty, \alpha]}$$

La Question : I) 5) b)

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) dx &= 4 \int_0^\alpha x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= 4 \left(\int_0^\alpha x e^{-x} dx \right) + 2 \left(\int_0^\alpha x^2 dx \right) - 4 \left(\int_0^\alpha x dx \right) \end{aligned}$$

Reste à évaluer chacune de ces intégrales :

$$\begin{aligned} \blacksquare \int_0^\alpha \underbrace{x}_u \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx &= [-x e^{-x}]_0^\alpha - \int_0^\alpha -e^{-x} dx \\ &= [-x e^{-x}]_0^\alpha + [-e^{-x}]_0^\alpha \\ &= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 \\ &= -e^{-\alpha} (1 + \alpha) + 1 \\ &= -\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (1 + \alpha) + 1 ; \text{ selon } \boxed{2} \boxed{d} \\ &= \boxed{\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \int_0^\alpha x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \boxed{\frac{\alpha^3}{3}} \quad \blacksquare \int_0^\alpha x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha = \boxed{\frac{\alpha^2}{2}}$$

Finalemment : $\int_0^{\alpha} f(x) dx$

$$= 4 \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + 2 \left(\frac{\alpha^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)$$

$$= \frac{4\alpha^2}{2} - 2\alpha + \frac{2\alpha^3}{3} - \frac{4\alpha^2}{2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} \alpha (\alpha^2 - 3)}$$

$$x \in [0, \alpha] \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} f(x) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \alpha (\alpha^2 - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha(\alpha - \sqrt{3})(\alpha + \sqrt{3})}{3} \leq 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - \sqrt{3}) \leq 0 ; \text{ car } \frac{2\alpha(\alpha + \sqrt{3})}{3} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \sqrt{3}} ; \text{ selon } \boxed{2} \boxed{c}$$

La Question : I) 5) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine planaire mentionné dans l'énoncé.

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^{\alpha} |f(x)| dx \right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= \left(\int_0^{\alpha} -f(x) dx \right) \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

car : $|f(x)| = -f(x)$ sur $[0, \alpha]$

$$= - \left(\int_0^{\alpha} f(x) dx \right) cm^2$$

$$= \boxed{\frac{2\alpha(3 - \alpha^2)}{3} cm^2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soit $P(n)$ la déclaration suivante : $\boxed{P(n) : u_n < \alpha}$

Pour $n = 0$, On a d'après l'énoncé de la suite $u_0 < \alpha$. Donc la proposition $P(0)$ est vraie.
Soit n un entier naturel fixé et on suppose que $P(n)$ soit vraie.

On a d'après $\boxed{1} \boxed{5} \boxed{a}$:

$$\boxed{x \leq \alpha \Rightarrow f(x) < 0} \quad (*)$$

Pour $x = u_n$ on ait $f(u_n) < 0$

$$P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n < \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n < \alpha \\ f(u_n) < 0 ; \text{ d'après } (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n + f(u_n) < \alpha$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \alpha$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'où d'après la machine récurrence on déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n < \alpha}$$

La Question : II) 1) b)

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n < \alpha$$

$$\Rightarrow f(u_n) \leq 0 ; \text{ selon } \boxed{1} \boxed{5} \boxed{a}$$

$$\Rightarrow u_n + f(u_n) \leq u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante}$$

La Question : II) 2) a)

$$g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2} = \frac{1 - 2e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$0,09$	$+\infty$

D'après ce beau tableau sans expliciter les cas $]-\infty, \ln 2]$ et $[\ln 2, +\infty[$. On constate que :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \geq 0,09 > 0$$

$$C - \text{à} - d : \boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) \geq 0}$$

La Question : II) 2) b)

Soit le prédicat $Q(n)$ défini ainsi : $Q(n) : u_n \geq 0$

Pour $n = 0$; $u_0 \geq 0$ Donc $Q(0)$ est vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $Q(n)$ soit vrai

$$\begin{aligned}
Q(n) \text{ est vrai} &\Rightarrow u_n \geq 0 \\
&\Rightarrow g(u_n) > 0 ; \text{ selon } \boxed{\text{II}} \boxed{2} \boxed{a} \\
&\Rightarrow \begin{cases} g(u_n) > 0 \\ u_n \geq 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow 4 \cdot u_n \cdot g(u_n) \geq 0 \\
&\Rightarrow f(u_n) + u_n \geq 0 \\
&\Rightarrow u_{n+1} \geq 0 \\
&\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vrai}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} \text{le prédicat } Q(0) \text{ est vrai} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0}$

La Question : II) 2) c)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente parce qu'elle est décroissante et minorée par zéro.

La Question : II) 2) d)

$$u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4 \cdot u_n \cdot g(u_n)$$

avec φ est continue sur $\mathbb{R}$. $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
 $x \mapsto 4x g(x)$

comme $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ alors $l = \lim(u_n)$ vérifie $\varphi(l) = l$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4 \cdot l \cdot g(l) = l \\
&\Leftrightarrow l(4g(l) - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } l = 0 \\ \text{soit } 4g(l) - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } l = 0 \\ \text{soit } g(l) = \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } l = 0 \\ \text{soit } \left(e^{-l} + \frac{l}{2} - 1\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } l = 0 \\ \text{soit } 4l\left(e^{-l} + \frac{l}{2} - 1\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } l = 0 \\ \text{soit } f(l) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La Question : II) 3) a)

$$\begin{aligned}
(u_n)_n \text{ est } \searrow &\Rightarrow u_n \leq u_0 < 0 \\
&\Rightarrow f(u_n) \leq f(u_0) ; \text{ car } f \nearrow \text{ sur }]-\infty, 0] \\
&\Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)}
\end{aligned}$$

La Question : II) 3) b)

Soit : $P(n) : u_n \leq u_0 + n f(u_0)$

Pour $n = 0$; $\boxed{u_n \leq u_0}$ vérifiée car $(u_n)_n$ est $\searrow$
soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n \leq u_0 + n f(u_0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} u_n \leq u_0 + n f(u_0) \\ f(u_n) \leq f(u_0) ; \text{ car } f \nearrow \text{ sur }]-\infty, 0] \end{cases} \\
&\Rightarrow u_n + f(u_n) \leq u_0 + n f(u_0) + f(u_0) \\
&\Rightarrow u_{n+1} \leq u_0 + (n+1) f(u_0) \\
&\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} \text{la proposition } P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Alors d'après le principe de récurrence on conclut : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_0 + n f(u_0)}$

La Question : II) 3) c)

$$\begin{aligned}
u_0 < 0 &\Rightarrow f(u_0) < f(0) ; f \searrow]-\infty, 0] \\
&\Rightarrow f(u_0) < 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n f(u_0)) = -\infty \\
&\Rightarrow u_n \leq \underbrace{u_0 + n f(u_0)}_{\searrow \boxed{-\infty}} \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = -\infty \\
&\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente.}
\end{aligned}$$

La conclusion : $\boxed{\begin{cases} u_0 \geq 0 \Rightarrow \lim(u_n) = 0 \\ u_0 < 0 \Rightarrow \lim(u_n) = -\infty \end{cases}}$

Partagez tous ce document avec vos amis
Professeur Badr Eddine EL FATIHI
Ouarzazate, le Mardi 18 juin 2019
En faveur des étudiants SM du MAROC.





**2^{ème} BAC - SM
MAROC**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION De RATTRAPAGE : JUILLET 2019
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mercredi 10 juillet 2019**

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-i\alpha\sqrt{3})^2 - 4(-\alpha^2) \\ &= -3\alpha^2 + 4\alpha^2 \\ &= \alpha^2\end{aligned}$$

La Question : I) 1) b)

$$\begin{aligned}\Delta = \alpha^2 &\Rightarrow z = \frac{i\alpha\sqrt{3} \pm \sqrt{\alpha^2}}{2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ z_2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \end{cases}\end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$\text{Soit } \alpha = |\alpha| e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)|\alpha| e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i2\pi}{3}} |\alpha| e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} ; \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)|\alpha| e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i\pi}{3}} |\alpha| e^{i\lambda} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} ; \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\text{Soient : } \Omega(\alpha) ; M_1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right) ; M_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$$

et la rotation définie ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z')\end{aligned}$$

$$\text{soit } M = \mathcal{R}(\Omega) \Leftrightarrow (z_M - z_0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_\Omega - z_0)$$

$$\Leftrightarrow (z_M - 0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(\alpha - 0)$$

$$\Leftrightarrow z_M = e^{\frac{i\pi}{3}}\alpha = |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_M = z_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_1 = \mathcal{R}(\Omega)}$$

$$\text{soit } M' = \mathcal{R}(M_1) \Leftrightarrow (z_{M'} - z_0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_{M_1} - z_0)$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = e^{\frac{i\pi}{3}}z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}|\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = z_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_2 = \mathcal{R}(M_1)}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Omega) = M_1 &\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } \Omega\widehat{OM_1} = 60^\circ \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{Le triangle } \Omega OM_1 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } \Omega\widehat{OM_1} = 60^\circ \end{cases} \\ &\Rightarrow M_1\widehat{\Omega O} = O\widehat{M_1}\Omega = 60^\circ \\ &\Rightarrow O\Omega M_1 \text{ est équilatéral} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(M_1) = M_2 &\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } (\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } M_1\widehat{OM_2} = 60^\circ \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{Le triangle } \Omega M_1 M_2 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } M_1\widehat{OM_2} = 60^\circ \end{cases} \\ &\Rightarrow O\widehat{M_1}M_2 = O\widehat{M_2}M_1 = 60^\circ \\ &\Rightarrow OM_1 M_2 \text{ est équilatéral} \end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

Rappel :
$$e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} - |\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= |\alpha| e^{i\lambda} \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i2\pi}{3}} \right) \\ &= |\alpha| e^{i\lambda} \left(2i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}}{2}\right)} \right) \\ &= |\alpha| e^{i\lambda} \left(2i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{2}} \right) \\ &= |\alpha| \cdot e^{i\lambda} \cdot \underbrace{(2i) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot (i)}_1 \\ &= |\alpha| \cdot e^{i\lambda} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

Rappel :
$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \in i\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_O} &= \frac{z_2 - \alpha}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} - \frac{\alpha}{z_1} \\ &= \frac{|\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)}}{|\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)}} - \frac{|\alpha| e^{i\lambda}}{|\alpha| e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)}} \\ &= e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{-i\pi}{3}} \\ &= 2i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= i\sqrt{3} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où :
$$(\Omega M_2) \perp (OM_1)$$

La Question : II) 2) c)

Rappel : un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

C-à-d qu'on pourrait montrer que le quadrilatère est un losange en montrant qu'il est d'abord un parallélogramme, Mais avec des diagonales qui soient perpendiculaires.

La deuxième méthode que je présume être recommandée est d'adopter un raisonnement basé sur la définition d'un losange. À savoir, un losange est un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur.

$$\begin{aligned} \begin{cases} O\Omega M_1 \text{ équilatéral} \\ OM_1 M_2 \text{ équilatéral} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = \Omega M_1 \\ OM_1 = OM_2 = M_1 M_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow O\Omega = OM_1 = M_1 M_2 = OM_2 \\ &\Rightarrow \boxed{O\Omega M_1 M_2 \text{ est un losange}} \end{aligned}$$

La Question : II) 3)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(C) = \mathcal{C}(O, |\alpha|)$.

Soit $M(|\alpha|e^{i\theta}) \in (P)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} O\Omega M_1 \text{ équilatéral} \\ OM_1 M_2 \text{ équilatéral} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = |\alpha| \\ OM_1 = OM_2 = |\alpha| \end{cases} \\ &\Rightarrow O\Omega = OM_1 = OM_2 = |\alpha| \\ &\Rightarrow \{\Omega; M_1; M_2\} \in (C) \end{aligned}$$

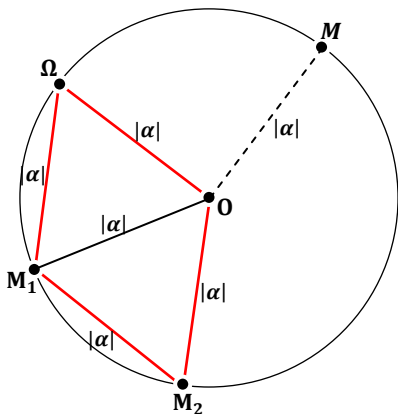
$$\Rightarrow \{ \Omega ; M_1 ; M_2 ; M \} \in (C) ; \text{ car } |z_M| = |\alpha|$$

$$\Rightarrow \{ \Omega ; M_1 ; M_2 ; M \} \text{ sont cocycliques}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_{M_2} - z_{\Omega}}{z_{M_1} - z_{\Omega}} \right) \times \left(\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_2} - z_M} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_{M_2} - z_{\Omega}}{z_{M_1} - z_{\Omega}} \right) \div \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \right) \div \left(\frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}} \right) \in \mathbb{R}$$



Le Deuxième Exercice

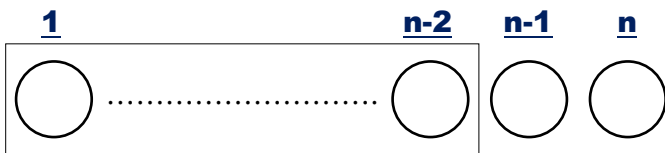
La Question : 1)

D'abord, je signale que, dans cette expérience aléatoire, l'hypothèse d'équiprobabilité est bien évidemment vérifiée car les boules sont identiques et indiscernables au toucher.

Quand on tire n boules, l'une après l'autre, d'une urne contenant n boules au total, alors le nombre de résultats possibles correspond exactement au nombre de combinaisons de n éléments.

Autrement-dit : $\text{card}(\Omega) = n!$

Avec Ω est l'ensemble de toutes les éventualités possibles.



Vous avez ici $\boxed{n-2}$ emplacements

On a $(n-2)$ éventualités possibles pour qu'on ait la première boule étant la boule numéro 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la deuxième boule étant la boule numéro 2 qui suit la boule N° 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la troisième boule étant la boule numéro 3 qui va suivre la boule numéro 2.

Donc le nombre d'éventualités possibles correspondant à l'obtention des boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ dans cet ordre consécutif est $(n-2) \times 1 \times 1$

Ainsi :

$$p \left(\begin{array}{c} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ \text{consécutif} \\ \text{cet ordre} \end{array} \right) = \frac{\text{card} \left(\begin{array}{c} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ \text{consécutif} \end{array} \right)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n-2}{n!}$$

La Question : 2)

On s'intéresse maintenant à l'ordre de sortie qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$, Mais peu importe la manière, consécutivement ou pas. Cet ordre précis nous permet de déterminer le nombre total d'éventualités possibles pour ce cas, ce nombre est C_n^3 . Je n'ai pas adopté les arrangements A_n^3 parce que j'ai affaire à un seul ordre qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$. C'est comme on a tiré trois boules parmi n autres. Les arrangements A_n^3 prend en considération tous les ordres possibles, à savoir : 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ainsi :

$$p \left(\begin{array}{c} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ \text{cet ordre} \\ \text{consécutif ou non} \end{array} \right) = \frac{C_n^3}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6(n-3)!}$$

La Question : 3)

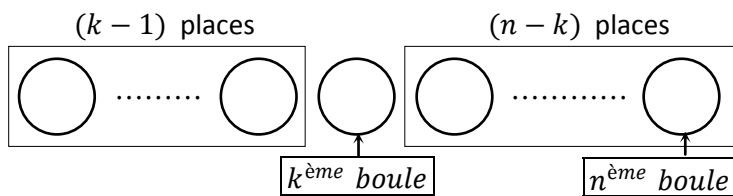
Soit X_n la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirage nécessaires pour obtenir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$.

On remarque que la valeur minimale de X_n est évidemment 3 c'est-à-dire qu'on peut obtenir les trois boules au cours des trois premiers tirages. Et la valeur maximale est n . c'est-à-dire qu'on pourrait avoir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ au cours des trois derniers tirages de notre expérience aléatoire. Donc les valeurs possibles de X_n sont 3, 4, ..., n . ou encore : $X_n(\Omega) = \{3, 4, \dots, n\}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_n est l'application P_{X_n} définie ainsi :

$$\begin{aligned} P_{X_n} : X_n(\Omega) &\mapsto [0,1] \\ k &\mapsto P_{X_n}(k) = p[X_n = k] \end{aligned}$$

On considère le schéma suivant qui renseigne sur la forme générale de chaque résultat de la variable aléatoire X_n défini dans l'énoncé.



Il y a 3 éventualités possibles valables pour l'emplacement numéro k . car cette place devrait recevoir ou bien la boule [1], la boule [2], ou bien la boule [3].

Après avoir remplir l'emplacement numéro k , il nous reste deux boules parmi [1][2][3] pour les $(k-1)$ emplacement sur la figure. Et la distribution de deux boules sur $(k-1)$ emplacements, en prenant en considération l'ordre, s'effectue selon A_{k-1}^2 différentes manières possibles.

Après avoir servir les boules [1][2][3], il nous reste à distribuer les $(n-3)$ boules sur $(n-3)$ places vides. Et pour se faire, il existe $(n-3)!$ façons possibles.

Alors, d'après le principe multiplicatif, on dénombre facilement les cas possibles correspondant à la vérification de l'événement $(X_n = k)$:

Soit : $\text{card}(X_n = k) = 3 \cdot A_{k-1}^2 \cdot (n-3)!$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } P_{X_n}(k) &= P[X_n = k] = \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{3(n-3)! \cdot A_{k-1}^2}{n!} \\ &= \frac{3(n-3)!}{n!} \times \frac{(k-1)!}{(k-3)!} \\ &= \frac{3(n-3)! \cdot (k-1)(k-2) \cdot (k-3)!}{n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)! \cdot (k-3)!} \\ &= \boxed{\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}} \end{aligned}$$

Finalement, la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n est l'application P_{X_n} définie ainsi :

$$\begin{aligned} P_{X_n} : \{3, 4, \dots, n\} &\mapsto [0, 1] \\ k &\mapsto P_{X_n}(k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

À titre de vérification :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n P_{X_n}(k) &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^n (k^2 - 3k + 2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} [(i+3)^2 - 3(i+3) + 2] \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} (i^2 + 3i + 2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + \frac{3(n-3)(n-2)}{2} + 2(n-2) \right) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{(n-3)(n-2)(2n-5) + 9(n-3)(n-2) + 12(n-2)}{6} \right) \\ &= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{2n^2 - 11n + 15 + 9n - 27 + 12}{6} \right) \\ &= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{2n^2 - 2n}{6} \right) \\ &= \frac{3(n-2) \cdot 2n(n-1)}{6n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{6n(n-1)(n-2)}{6n(n-1)(n-2)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\sum_{k=3}^n P_{X_n}(k) = 1}$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Rappel : dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est une base si et si et seulement si $\det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$.

$$\text{On a : } \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0$$

Donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de v_2 .

La Question : 1) b)

Par la suite je vais adopter l'écriture $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ au lieu de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ juste pour simplifier les écritures et être à l'aise dans la rédaction.

$$\text{Ainsi : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

La Question : 1) c)

Soient (X, Y, X', Y') un quadrilatère dans $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2) * (X' \vec{e}_1 + Y' \vec{e}_2) &= \\ &= \left(X \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) * \left(X' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + Y' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{X-Y}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{X'+Y'}{2} \\ \frac{X'-Y'}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(X+Y)(X'+Y') + (X-Y)(X'-Y')}{4} \\ \frac{(X+Y)(X'-Y') + (X-Y)(X'+Y')}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{XX' + YY'}{2} \\ \frac{XX' - YY'}{2} \end{pmatrix} \\ &= XX' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + YY' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{XX' \vec{e}_1 + YY' \vec{e}_2} \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de v_2 .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'x + y'y \\ y'x + x'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C'est trop facile car la commutativité de la loi $*$ dans v_2 résulte de celle de la loi $+$ dans $\mathbb{R}$.

La Question : 2) b)

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ trois éléments de v_2 .

Dans un premier temps, On a :

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x''(xx' + yy') + y''(xy' + yx') \\ y''(xx' + yy') + x''(xy' + yx') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'y'y'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et dans un second temps, On ait :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'x'' + y'y'' \\ x'y'' + y'x'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(x'x'' + y'y'') + y(x'y'' + y'x'') \\ x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' + y'y'') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'y'y'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $*$ est une loi associative sur v_2 .

La Question : 2) c) Soit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ l'élément neutre

Alors : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in v_2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

À cause de la commutativité de la loi $*$, on se restreint à une seule égalité.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} xu + yv \\ xv + yu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } xu + yv = x \\ \text{Et bien } xv + yu = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Et bien } x(u - 1) + yv = 0 \\ \text{Et bien } xv + y(u - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x(u - 1) + yv = xv + y(u - 1) \\ &\Leftrightarrow x(u - 1) - y(u - 1) + yv - xv = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(u - 1) - v(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(u - v - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } x = y \\ \text{ou bien } u = v + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On remplace u par la quantité $(v + 1)$ dans l'une des équations précédentes on obtient :

$$\begin{aligned} x(v + 1) + yv = x &\Leftrightarrow xv + x + yv = x \\ &\Leftrightarrow v(x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } v = 0 \\ \text{ou bien } x = -y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \boxed{v=0} \\ \text{ou bien } x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \boxed{v=0} \\ \text{ou bien } x=-y \end{cases} \Rightarrow \boxed{u=1}$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la loi $*$ sur v_2 .

La Question : 2) d)

$(v_2, +, *)$ est bien-évidemment un anneau commutatif car les assertions suivantes sont vérifiées :

- $(v_2, +)$ est un groupe abélien.
- $*$ est associative sur v_2 .
- $*$ est distributive par rapport à $+$ sur v_2 .
- $*$ est commutative sur v_2 .

La première assertion est pratiquement vérifiable car $+$ est une loi de composition interne dans v_2 qui est associative, commutative, admet un élément neutre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que tout élément $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de v_2 admet un seul symétrique $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dans v_2 .

Pour la 2^{ème} et la 4^{ème} assertions, c'est déjà fait dans $\boxed{2a}$ et $\boxed{2b}$.

Pour la 3^{ème} assertion, on se donne trois éléments $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ dans v_2 :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(c+e) + b(d+f) \\ a(d+f) + b(c+e) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + ae + bd + bf \\ ad + af + bc + be \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac + bd \\ ad + bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae + bf \\ af + be \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac + ae + bd + bf \\ ad + af + bc + be \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C - \text{à} - d : \boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}$$

Ou encore, On dira que $*$ est distributive par rapport à $+$ à gauche. Même travail pour la distributivité à droite pour conclure finalement que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $+$

La Question : 3) a)

On remarque, au prime abord, que $E_{\vec{u}}$ est une partie non vide de v_2 .

car : si $\vec{x} \in E_{\vec{u}}$ alors $\vec{x} = \lambda \vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc : $\vec{x} \in v_2$ car $(v_2, +, \cdot)$ est un esp vectoriel.

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$, Alors ils existent λ et θ de $\mathbb{R}$ tels que : $\vec{x} = \lambda \vec{u}$ et $\vec{y} = \theta \vec{u}$.

On a : $\vec{x} - \vec{y} = \lambda \vec{u} - \theta \vec{u} = (\lambda - \theta) \vec{u} \in E_{\vec{u}}$ car $(\lambda - \theta) \in \mathbb{R}$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} E_{\vec{u}} \subseteq v_2 & \text{et } E_{\vec{u}} \neq \emptyset \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_{\vec{u}} ; & x + \text{sym}(\vec{y}) \in E_{\vec{u}} \end{cases}$$

Donc, d'après la caractérisation des sous-groupes, on conclut que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe de $(v_2, +)$.

La Question : 3) b)

$$\text{Rappel : } \left. \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ est un sev} \\ \text{de l'esp}(E, +, \cdot) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x, y \in \mathcal{F}) : \\ (\alpha x + y) \in \mathcal{F} \end{array} \right|$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}} \subseteq v_2$.

$$\alpha \vec{x} + \vec{y} = \alpha(\lambda_1 \vec{u}) + \lambda_2 \vec{u} = (\alpha \lambda_1 + \lambda_2) \vec{u} \in E_{\vec{u}}$$

Car $(\alpha \lambda_1 + \lambda_2)$ est un nombre réel.

Ainsi : $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(v_2, +, \cdot)$. Et ceci d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels mentionnée au début.

La Question : 3) c)

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in v_2 \setminus \{\vec{0}\}$.

Soient $\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}$; $\vec{y} = \lambda_2 \vec{u}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

$$\text{On a : } \vec{u} * \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ 2ab \end{pmatrix}$$

$$E_{\vec{u}} \text{ est stable pour } * \Rightarrow \vec{x} * \vec{y} \in E_{\vec{u}}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} = \lambda \vec{u}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 a \\ \lambda_1 b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_2 a \\ \lambda_2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 a^2 + \lambda_1 \lambda_2 b^2 \\ \lambda_1 \lambda_2 ab + \lambda_1 \lambda_2 ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ 2ab \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 (\vec{u} * \vec{u}) = \lambda \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} * \vec{u} = \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} * \vec{u} = \tilde{\lambda} \vec{u} ; \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{u} * \vec{u} \text{ sont liés}$$

Inversement : Si $\vec{u} * \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont liés,
Alors : $\exists \alpha \in \mathbb{R} ; \vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$

$$C - \text{à} - d : \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right) = \alpha \vec{u}$$

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{x} * \vec{y} &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \alpha \vec{u} \\ &= \ell \vec{u} \in E_{\vec{u}} \end{aligned}$$

Donc $E_{\vec{u}}$ est stable pour la loi $*$.

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \varphi : (\mathbb{R}^*, \times) &\mapsto (E_{\vec{u}}, *) \\ x &\mapsto \frac{x}{\alpha} \vec{u} \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$$

Rappel : d'après le calcul fait précédemment
on a eu : $\lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} = \lambda_1 \lambda_2 (\vec{u} * \vec{u})$

Soient a et b deux nombres réel non nuls.

$$\begin{aligned} \varphi(a) * \varphi(b) &= \left(\frac{a}{\alpha} \vec{u} \right) * \left(\frac{b}{\alpha} \vec{u} \right) \\ &= \left(\frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\alpha} \right) \vec{u} * \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha^2} \right) \vec{u} * \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha^2} \right) \cdot \alpha \vec{u} \\ &= \left(\frac{ab}{\alpha} \right) \cdot \vec{u} \\ &= \varphi(a \times b) \end{aligned}$$

Donc : φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$

En plus, φ est bijective car elle est injective et surjective :

$$\begin{aligned} \text{Injective car : } \varphi(x) = \varphi(y) &\Rightarrow \frac{x}{\alpha} \vec{u} = \frac{y}{\alpha} \vec{u} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Surjective car : $(\forall (\lambda \vec{u}) \in E_{\vec{u}}) (\exists x = \lambda \alpha \in \mathbb{R}^*) ; \varphi(x) = \lambda \vec{u}$

Finalement : φ est un isomorphisme
(homomorphisme bijectif) de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$.

La Question : 4) b)

Pour montrer que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E_{\vec{u}}, +)$ est un groupe abélien.
- $(E_{\vec{u}} \setminus \{\vec{0}\}; *)$ est un groupe.
- $*$ est distributive par rapport à $+$.
- $*$ est commutative sur $E_{\vec{u}}$.

Pour la première assertion, c'est déjà fait, exactement dans la question 3) a) : $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe de $(V_2, +)$.

Pour la 2^{ème} assertion, On sait très bien que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe, Alors $\varphi(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe aussi. Car φ est un isomorphisme.

$$\text{Et on ait : } \varphi(\mathbb{R}^*, \times) = (\varphi(\mathbb{R}^*), *) = (E_{\vec{u}} \setminus \{\vec{0}\}; *).$$

Pour la distributivité de $*$ par rapport à $+$ c'est déjà fait aussi.

Pour la 4^{ème} assertion c'est déjà fait.

La conclusion : $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif et cela d'après la caractérisation des corps vue dans le cours ☺

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (1 + x^2 + 2x(1 + x) \ln(1 + x)) \\ &= 2 + 2 \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x(1 + x) \ln(1 + x) \\ &= 2 + 2 \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (t - 1) \cdot t \ln t \\ &= 2 + 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} (t - 1) \times \lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln t) \\ &\rightarrow 2 + 2 \times (-1) \times 0 \\ &\rightarrow \boxed{2} \end{aligned}$$

La Question : I) 1) b)

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + x^2 - 2x(1 + x) \ln(1 + x) \\ x &\mapsto \ln(1 + x) \text{ est dérivable sur }]-1; +\infty[. \\ x &\mapsto 2x(1 + x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}. \\ x &\mapsto (1 + x^2) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors g est dérivable sur $I =]-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\text{Soit } x \in I, \quad g'(x) &= 2x - 2(x(1+x)\ln(1+x))' \\ &= 2x - 2\left((1+x)\ln(1+x) + x\ln(1+x) + \frac{x(1+x)}{1+x}\right) \\ &= 2x - 2((1+2x)\ln(1+x) + x) \\ &= -2(1+2x)\ln(1+x)\end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

D'après ce beau tableau, On remarque que g est une fonction continue et est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc g est une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty, 1]$.

Ainsi : $(\forall y \in]-\infty, 1]) , (\exists! x \in [0, +\infty[) : g(x) = y$

C-à-d : $(\text{pour } 0 \in]-\infty, 1]) , (\exists! \alpha \in [0, +\infty[) : g(x) = 0$

La Question : I) 2) b)

On a : $g(1) = 1 + 1^2 - 2 \times 2 \ln 2 \approx -0,77 < 0$.

Ainsi : $g(1) < 0$.

D'où : $g(1) < g(\alpha)$.

C-à-d : $\boxed{1 > \alpha}$ car g est décroissante et bijective.

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned}x \in]-1, \alpha[&\Rightarrow x < \alpha \\ &\Rightarrow g(x) > g(\alpha) ; \text{ car } g \searrow [0, +\infty[\\ &\Rightarrow \boxed{g(x) > 0} ; \text{ car } g(\alpha) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \in]\alpha, +\infty[&\Rightarrow x > \alpha \\ &\Rightarrow g(x) < g(\alpha) ; \text{ car } g \searrow [0, +\infty[\\ &\Rightarrow \boxed{g(x) < 0} ; \text{ car } g(\alpha) = 0\end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(1+x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{1+x^2} \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{1+x^2} \right) \\ &\rightarrow (-\infty) \times \left(\frac{1}{2} \right) = \boxed{-\infty}\end{aligned}$$

Donc l'axe $\boxed{x = -1}$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) \times \left(\frac{1+x}{1+x^2} \right) \\ &= \left(\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t=x+1}} \frac{\ln t}{t} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2} \right) \\ &\rightarrow 0^+ \times 0^+ \rightarrow \boxed{0^+}\end{aligned}$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables : La première est la fonction $x \mapsto \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$. La deuxième est $x \mapsto 1+x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et comme $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1+x^2 \neq 0$.

Alors : $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$

comme étant un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.

Soit : $x \in I =]-1, +\infty[$;

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{(1+x^2)(\ln(1+x))' - (1+x^2)' \ln(1+x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1+x^2}{1+x} \right) - 2x \ln(1+x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \\ &= \boxed{\frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}}\end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\text{On a : } (\forall x \in I) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

Remarquons, au prime abord, que la quantité $(1+x^2)^2$ est toujours positive. Donc le signe de $f'(x)$ sur I dépend des signes des quantités $(1+x)$ et $g(x)$. Le tableau suivant résume le signe de $f'(x)$.

x	-1	α	$+\infty$
$1+x$	0	+	+
$g(x)$		+	0
$f'(x)$		+	0
f	$-\infty$	$\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$	0^+

La Question : II) 2) c)

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha(1 + \alpha) \ln(1 + \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + \alpha) = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha(1 + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1 + \alpha)}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)}$$

$$x \in I \Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } x \leq \alpha \\ \text{oubien } x \geq \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } f(x) \leq f(\alpha) \text{ car } f \nearrow]-1, \alpha] \\ \text{oubien } f(x) \leq f(\alpha) \text{ car } f \searrow [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(\alpha) ; \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1 + \alpha)} ; \quad \forall x \in I$$

La Question : II) 3) a)

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

$$(T) : y = (x - 0)f'(0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow (T) : y = x$$

La Question : II) 3) b)

Soient x et t deux nombres réels tels que $x > t > 0$

$$t \geq 0 \Leftrightarrow t + 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t+1} \leq 1 ; \quad t \neq -1$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} \right) dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\Rightarrow [\ln|1+t|]_0^x \leq [t]_0^x$$

$$\Rightarrow \ln|1+x| - 0 \leq x - 0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x$$

La Question : II) 3) c)

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$$

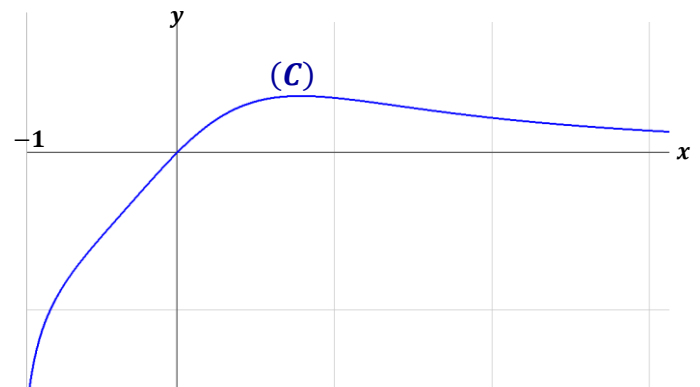
$$\Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 ; \text{ passage à l'inverse}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x^2 + 1} \leq x ; \text{ d'après [3] [b]}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \geq 0 ; f(x) \leq x}$$

La Question : II) 3) d)



La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

$$\blacksquare J = \int_0^1 f(x) dx$$

On pose $t = \frac{1-x}{1+x}$ Alors $x = \frac{1-t}{1+t}$; facile à démontrer

$$\begin{cases} x=0 & \Leftrightarrow t=1 \\ x=1 & \Leftrightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1-t)'(1+t) - (1+t)'(1-t)}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2}$$

$$\text{Alors : } dx = \frac{-2}{(1+t)^2} dt$$

$$f(x) = f\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1-t}{1+t}\right)}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}}$$

$$= \frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \times \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$$

$$\text{Ainsi : } f(x) = \frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \times \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad J &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_1^0 \frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \times \ln\left(\frac{2}{1+t}\right) \times \frac{-2}{(1+t)^2} dt \\
 &= - \int_1^0 \ln\left(\frac{2}{1+t}\right) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
 &= \int_0^1 (\ln(2) - \ln(1+t)) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\ln 2}{1+t^2}\right) dt - \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\right) dt \\
 &= \ln 2 \cdot [\text{Arctan } t]_0^1 - J \\
 &= \ln 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - J \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{4} - J
 \end{aligned}$$

Ainsi : $J = \frac{\pi \ln 2}{4} - J$

C - à - d : $J + J = \frac{\pi \ln 2}{4}$

Ou encore : $2J = \frac{\pi \ln 2}{4}$

Finalement : $J = \frac{\pi \ln 2}{8}$

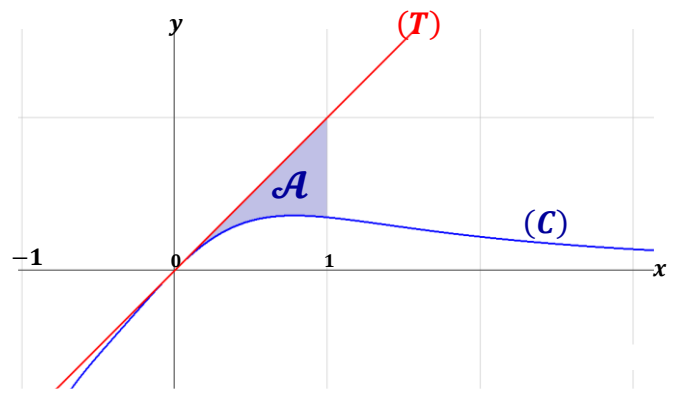
La Question : III) 1) b)

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine demandé dans cette question se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x) - x| dx \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
 &= \int_0^1 (x - f(x)) dx
 \end{aligned}$$

Car : $\boxed{\forall x \geq 0 ; f(x) \leq x}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{\pi \ln 2}{8} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{8} \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{8}\right) (4 \text{ cm}^2) \\
 &= \boxed{\left(2 - \frac{\pi \ln 2}{2}\right) \text{ cm}^2}
 \end{aligned}$$



La Question : III) 2)

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^1 \frac{(\text{Arctan } x)}{u(x)} \cdot \left(\frac{1}{v'(x)}\right) dx \\
 &= [\text{Arctan } x \cdot \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(1+x) dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{\pi}{8} \ln 2 \\
 &= \boxed{\frac{\pi \ln 2}{8}}
 \end{aligned}$$

La Question : III) 3)

On pose : $\theta = \tan x$; $\begin{cases} x=0 & \Leftrightarrow \theta=0 \\ x=\pi/4 & \Leftrightarrow \theta=1 \end{cases}$

$$\frac{d\theta}{dx} = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + \theta^2$$

Alors : $\boxed{dx = \left(\frac{1}{1+\theta^2}\right) d\theta}$

$$\begin{aligned}
 D' \text{ où : } L &= \int_0^1 \ln(1+\theta) \cdot \left(\frac{1}{1+\theta^2}\right) d\theta \\
 &= \int_0^1 \frac{\ln(1+\theta)}{1+\theta^2} d\theta = J \\
 &= \boxed{\frac{\pi \ln 2}{8}}
 \end{aligned}$$



**2^{ème} BAC - SM
MAROC**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION Normale : JUILLET 2020
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Dimanche 19 juillet 2020**

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

Première Méthode :

$$(x, y) \text{ est solution de } (D) \Leftrightarrow 7x^3 - 13y = 5$$

$$\text{soit } d = x \wedge 13 \begin{cases} \Rightarrow d/13 \\ \Rightarrow d \in \{1; 13\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } d = 13 & \begin{cases} \Rightarrow 13 = x \wedge 13 \\ \Rightarrow 13/x \\ \Rightarrow x = 13k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 7(13k)^3 - 13y = 5 \\ \Rightarrow 13 \left(\underbrace{7(13k)^2 - y}_{=k' \in \mathbb{Z}} \right) = 5 \\ \Rightarrow 13/5 \text{ contradiction} \\ \Rightarrow d \neq 13 \\ \Rightarrow \boxed{d = 1} \end{cases} \end{aligned}$$

Deuxième Méthode :

Les cas possibles du reste de la division euclidienne d'un entier naturel sur le nombre 5 sont : $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Il est clair que :

$$\text{Si } \begin{cases} x \equiv 0 [5] \\ y \equiv 0 [5] \end{cases} \quad \text{Alors } (7x^3 - 13y) \equiv 0 [5]$$

$$C - \text{à} - d : 5 \equiv 0 [5]$$

Donc ce cas est clairement plausible.

On suppose maintenant que $\begin{cases} x \equiv r [5] \\ y \equiv r' [5] \end{cases}$

avec r et r' appartiennent à $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 7x^3 \equiv 7r^3 [5] \quad \text{et} \quad -13y \equiv -13r' [5] \\ & \Rightarrow (7x^3 - 13y) \equiv (7r^3 - 13r') [5] \\ & \Rightarrow 5 \equiv (7r^3 - 13r') [5] \\ & \Rightarrow 7r^3 - 13r' = 0 \quad \text{ou} \quad 7r^3 - 13r' = 5 \\ & \Rightarrow \boxed{7r^3 = 13r'} \quad \text{ou} \quad \boxed{7r^3 = (5 + 13r')} \\ & \quad \text{Avec } r \in \{1; 2; 3; 4\} \quad \text{et} \quad r' \in \{1; 2; 3; 4\} \\ & \Rightarrow \text{contradiction (Absurde)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Car : Si } r' = 1 & \begin{cases} \Rightarrow 7r^3 = 13 \quad \text{ou} \quad 7r^3 = 18 \\ \Rightarrow r = 1,22 \quad \text{ou} \quad r = 1,36 \\ \Rightarrow r \notin \{1; 2; 3; 4\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r' = 2 & \begin{cases} \Rightarrow 7r^3 = 26 \quad \text{ou} \quad 7r^3 = 31 \\ \Rightarrow r = 1,54 \quad \text{ou} \quad r = 1,63 \\ \Rightarrow r \notin \{1; 2; 3; 4\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r' = 3 & \begin{cases} \Rightarrow 7r^3 = 39 \quad \text{ou} \quad 7r^3 = 44 \\ \Rightarrow r = 1,76 \quad \text{ou} \quad r = 1,83 \\ \Rightarrow r \notin \{1; 2; 3; 4\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } r' = 4 & \begin{cases} \Rightarrow 7r^3 = 52 \quad \text{ou} \quad 7r^3 = 57 \\ \Rightarrow r = 1,93 \quad \text{ou} \quad r = 1,99 \\ \Rightarrow r \notin \{1; 2; 3; 4\} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après ce raisonnement par l'absurde on en

déduit que l'hypothèse $\begin{cases} x \equiv r [5] \\ y \equiv r' [5] \end{cases} ; r, r' \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$

est fausse. Donc $x \equiv 0 [5]$ et $y \equiv 0 [5]$.

$$D'où : x = 5k \quad \text{et} \quad y = 5k' ; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 7x^3 - 13(5k') = 5$$

$$\Rightarrow x(7x^2) - 13(5k') = 5$$

$$\Rightarrow x(7 \cdot (5k')^2) - 13(5k') = 5$$

$$\Rightarrow x(7 \cdot 5 \cdot k'^2) + 13(-k') = 1$$

$$\Rightarrow xu + 13v = 1 ; \begin{cases} u = 7 \cdot 5 \cdot k'^2 \in \mathbb{Z} \\ v = -k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \wedge 13 = 1} ; \text{ selon Bezout}$$

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} 13 \text{ premier} \\ x \wedge 13 = 1 \end{array} \right. &\Rightarrow x^{13-1} \equiv 1 [13] \quad ; \text{ selon Fermat} \\ &\Rightarrow \boxed{x^{12} \equiv 1 [13]} \end{aligned}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned} 13 \equiv 0 [13] &\Rightarrow 13y \equiv 0 [13] \\ &\Rightarrow (7x^3 - 5) \equiv 0 [13] \\ &\Rightarrow \boxed{7x^3 \equiv 5 [13]} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \boxed{70 \equiv 5 [13]} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ et } (2) &\Rightarrow 7x^3 \equiv 70 [13] \\ &\Rightarrow 13/(7x^3 - 70) \\ &\Rightarrow 13/7(x^3 - 10) \\ &\Rightarrow 13/(x^3 - 10) \quad \text{car } 13 \wedge 7 = 1 \quad (\text{Gauss}) \\ &\Rightarrow \boxed{x^3 \equiv 10 [13]} \end{aligned}$$

La Question : 1) d)

$$\begin{aligned} x^3 \equiv 10 [13] &\Rightarrow x^3 \equiv -3 [13] \quad \text{car } 10 \equiv -3 [13] \\ &\Rightarrow (x^3)^4 \equiv (-3)^4 [13] \\ &\Rightarrow x^{12} \equiv 81 [13] \\ &\Rightarrow \boxed{x^{12} \equiv 3 [13]} \quad \text{car } 81 \equiv 3 [13] \end{aligned}$$

La Question : 2)

Par l'absurde on suppose que (D) est solvable dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \boxed{x^{12} \equiv 1 [13]} \quad \text{et} \quad \boxed{x^{12} \equiv 3 [13]}$$

Et ce d'après les résultats précédents.

$$\Rightarrow \boxed{3 \equiv 1 [13]} \quad \text{transitivité de la relation } (\equiv)$$

$$\Rightarrow \boxed{13 \text{ divise } 2} \quad \text{absurde et contradiction}$$

Donc (D) n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$

Remarque :

L'équation (D) : $7x^3 - 13y = 5$ peut être se ramener à l'équation (E) : $7a - 13b = 5$ à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ par la méthode classique.

$$\begin{array}{c|c} 13 & 7 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{13 \wedge 7 = 7 \wedge 6}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{7 \wedge 6 = 6 \wedge 1 = 1}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 1 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \Rightarrow \text{Stop} \\ \Rightarrow \text{PGCD}(13, 7) = 1$$

Comme 5 ne divise pas 1 Alors (E) n'est pas solvable dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (D) non plus $\odot$.

Le Deuxième Exercice

La Question : 1) a)

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$$

D'abord $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme indiquée ci-dessus.

Soient $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ deux matrices de E.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix} \in E$$

$$\text{Car } x' + xy' \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad yy' \in \mathbb{R}^* \quad \text{car } \begin{cases} y \in \mathbb{R}^* \\ y' \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

La conclusion :

$$\forall \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E : \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E$$

Donc $\times$ est une loi de composition interne sur E

Ainsi : E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$

La Question : 1) b)

Si $\times$ est commutative sur E, Alors On aurait :

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \in E : &\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le fait de prouver que $\times$ n'est pas commutative revient à exhiber un contre exemple.

$$\text{On a} : \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + xy' \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$$

L'expression yy' est commutative donc le contre exemple dépendra de l'expression $x' + xy'$, il suffirait de choisir $x \neq x'$ et y, y' n'importe lesquels.

$$\text{Soient } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ deux éléments de } E$$

$$\text{On a} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{et On a} : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\times$ n'est pas commutative sur E.

Attention à ne pas dire :

Comme $\times$ n'est pas commutative sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Alors $\times$ n'est pas commutative sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est faux $\otimes$ car ils existent des sous ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ là où la multiplication serait commutative.

La Question : 1) c)

Juste un simple calcul matriciel.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = I$$

La Question : 2)

Vous avez le choix entre deux méthodes, la première consiste à démontrer via la définition d'un groupe que :

- $\times$ est une LCI sur E. (Stabilité)
- $\times$ est une loi associative sur E (stabilité de E dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$)
- $\times$ admet un élément neutre I (à travers la stabilité et $I \in E$)
- Les éléments de E sont symétrisables par rapport à $\times$. (déjà prouvé)
- $\times$ n'est pas commutative sur E, déjà prouvé, juste pour justifier la qualification groupe non commutatif.

Deuxième Méthode :

Cette deuxième méthode adopte la notion d'un sous groupe et consiste à prouver que :

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe (d'après le cours)
- $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ C'est trivial.
- $\forall A, B \in E ; A \times \text{sym}(B) \in E$
- $\times$ est non commutative sur E (déjà vu).

Pour la troisième assertion, elle est très simple :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \text{sym} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{x}{b} - \frac{a}{b}\right) \\ 0 & \frac{y}{b} \end{pmatrix} \in E ; \quad \text{car} \quad \begin{vmatrix} \frac{x-a}{b} \\ y \neq 0 ; b \neq 0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$

La Question : 3) a)

$$\text{Soit } F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$\text{Soit } \varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \mapsto (F, \times)$$
$$x \mapsto M(x)$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{2*}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) \times \varphi(y) &= M(x) \times M(y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \\ &= M(xy) \in E \quad \text{car } xy \in \mathbb{R}^* \\ &= \varphi(xy) \end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme.

La Question : 3) b)

On montre d'abord que φ est bijective.

Soit $M(a)$ une matrice donnée dans F, On va résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation d'inconnue x suivante : $\varphi(x) = M(a) \Leftrightarrow M(x) = M(a)$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x = a$$

d'où $\forall M(a) \in E ; \exists ! x = a \in \mathbb{R}^* : \varphi(x) = M(a)$

C-à-d que φ est un isomorphisme.

D'où $\varphi(\mathbb{R}^*, \times) = (F, \times)$

Comme $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et comme φ est un isomorphisme alors $\varphi(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif c-à-d $(F, \times)$.

Les caractéristiques de $(F, \times)$ sont héritées de l'ensemble $(\mathbb{R}^*, \times)$ via l'application φ .

Pour le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ on a :

- $\times$ est commutative sur $\mathbb{R}^*$
- $\times$ est associative sur $\mathbb{R}^*$
- 1 est l'élément neutre dans $\mathbb{R}^*$
- $\frac{1}{x} = \text{symétrique}(x)$ dans $\mathbb{R}^*$

Alors pour le groupe $(F, \times)$ on a :

- $\times$ est commutative sur F
 - $\times$ est associative sur F
 - $\varphi(1) = M(1) = I$ est l'EN dans F
 - $\text{symétrique}(M(x)) = \text{symétrique}(\varphi(x))$
- $$\begin{aligned} &= \varphi(\text{symétrique}(x)) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Le Troisième Exercice

La partie une :

La Question : 1)

$$(E) : z^3 - 2m z^2 + 2m^2 z - m^3 = 0$$

En effectuant la division euclidienne du côté de gauche par le polynôme $(z - m)$ l'équation (E) devient : $(z - m)(z^2 - mz + m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow z - m = 0 \quad \text{et} \quad z^2 - mz + m^2 = 0 : (E')$$

$$\Delta_{(E')} = (-m)^2 - 4m^2 = (\sqrt{3} i m)^2$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{m - \sqrt{3} i m}{2} ; & z_2 &= \frac{m + \sqrt{3} i m}{2} \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{3} i}{2} \right) m & &= \left(\frac{1 + \sqrt{3} i}{2} \right) m \\ &= \boxed{m e^{-\frac{i\pi}{3}}} & &= \boxed{m e^{\frac{i\pi}{3}}} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est défini explicitement par ce qui suit :

$$S = \left\{ m ; m e^{\frac{i\pi}{3}} ; m e^{-\frac{i\pi}{3}} \right\}$$

La Question : 2) a)

Première Méthode :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$$

Car en général ; si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ Alors :

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

Deuxième Méthode :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} &= \left(m e^{\frac{i\pi}{3}} \right)^{-1} + \left(m e^{-\frac{i\pi}{3}} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{m} \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) e^{i0} \\ &= \frac{1}{m} \times 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} m &= 1 + e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &= 2 \cos\left(\frac{0 - \frac{\pi}{3}}{2}\right) e^{i\left(\frac{0 + \frac{\pi}{3}}{2}\right)} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{\frac{i\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } z_1 &= m e^{-\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}} = \boxed{\sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{6}}} \\ &= \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \\ &= \boxed{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} \end{aligned}$$

$$\text{Encore : } z_2 = m e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot e^{\frac{i\pi}{3}} = \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{2}} = \boxed{\sqrt{3} i}$$

La partie deux :

La Question : 1)

$$\text{On a : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{m e^{-\frac{i\pi}{3}}}{m e^{\frac{i\pi}{3}}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$$

Donc les points O ; A ; B ne sont pas alignés.

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} r_1(O) = A &\Leftrightarrow (z_A - z_P) = e^{\frac{i\pi}{2}} (z_O - z_P) \\ &\Leftrightarrow m e^{\frac{i\pi}{3}} - p = i(-p) \\ &\Leftrightarrow p(1 - i) = m e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow p \cdot \left(e^{i0} + e^{-\frac{i\pi}{2}} \right) = m e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow p \cdot \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) e^{-\frac{i\pi}{4}} = m e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow p \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-\frac{i\pi}{4}} = m e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow p = \frac{m e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{2}} e^{\frac{i7\pi}{12}} = \boxed{\frac{m\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i7\pi}{12}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_3(B) = 0 & \Leftrightarrow (z_O - z_R) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - z_R) \\
& \Leftrightarrow -r = i \left(m e^{\frac{-i\pi}{3}} - r \right) \\
& \Leftrightarrow -r = i m e^{\frac{-i\pi}{3}} - ir \\
& \Leftrightarrow r(i - 1) = i m e^{\frac{-i\pi}{3}} \\
& \Leftrightarrow r \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi} \right) = e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot m \cdot e^{\frac{-i\pi}{3}} \\
& \Leftrightarrow r \cdot \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}} = m \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \\
& \Leftrightarrow r \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}} = m \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \\
& \Leftrightarrow r = \frac{m e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{\frac{i3\pi}{4}}} = \frac{m}{\sqrt{2}} e^{\frac{-i7\pi}{12}} = \boxed{\frac{m\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-i7\pi}{12}}}
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned}
r_2(A) = B & \Leftrightarrow (z_B - z_Q) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_A - z_Q) \\
& \Leftrightarrow m e^{\frac{-i\pi}{3}} - q = i \left(m e^{\frac{i\pi}{3}} - q \right) \\
& \Leftrightarrow m e^{\frac{-i\pi}{3}} - q = i m e^{\frac{i\pi}{3}} - iq \\
& \Leftrightarrow q(i - 1) = m \left(e^{\frac{i5\pi}{6}} - e^{\frac{-i\pi}{3}} \right) \\
& \Leftrightarrow q \times \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi} \right) = m \left(2i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{i\pi}{4}} \right) \\
& \Leftrightarrow q \times \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) e^{\frac{i3\pi}{4}} = m \left(2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) e^{\frac{i3\pi}{4}} \\
& \Leftrightarrow q = \frac{m \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{i3\pi}{4}}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}}} \\
& \Leftrightarrow \boxed{q = m \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}
\end{aligned}$$

Just think about it ☺

“ Normal people believe that if it ain't broke, don't fix it. Engineers believe that if it ain't broke, it doesn't have enough features yet. ”

La Question : 3)

$$\begin{aligned}
\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} &= \frac{\frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{-i7\pi}{12}} - \frac{m\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{i7\pi}{12}}}{m\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \\
&= \frac{m\sqrt{2}}{2m\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \left(e^{\frac{-i7\pi}{12}} - e^{\frac{i7\pi}{12}} \right) \\
&= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \left(2i \sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) e^{i0} \right) \\
&= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \left(-2i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) \\
&= \boxed{-i}
\end{aligned}$$

$$D'ou : \boxed{\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} = -i}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O} \right| = |-i| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O}\right) \equiv \arg(-i) [2\pi] \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} |z_R - z_P| = |z_Q - z_O| \\ \arg\left(\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_O}\right) \equiv \pi + \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} PR = OQ \\ (\overrightarrow{OQ}; \overrightarrow{PR}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} PR = OQ \\ (OQ) \perp (PR) \end{cases}
\end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1)

Soit $\varphi(t) = \ln t \Rightarrow \begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \\ \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists c \in]x; x+1[; \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{(x+1) - x} = \varphi'(c) \\
&\Rightarrow x < c < x+1 ; \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} ; \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c} \\
&\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}} ; x > 0
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

d'abord : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

On a : $\forall x > 0 ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} < x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x^2}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right) < \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) < (x)$$

$x \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad x \rightarrow 0^+ \quad \quad \quad \boxed{0} \quad \quad \quad \boxed{0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = 0 = f'_d(0)$$

$\Rightarrow f$ est dérivable à droite en zéro.

La Question : 2) b)

On a : $\forall x > 0 ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x+1} < x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x^3}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{x+1}\right) < f(x) < x^2$$

$x \rightarrow +\infty$

$\boxed{+\infty}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

Or $\left(\frac{x^2}{x+1}\right) < \frac{f(x)}{x} < x$

$x \rightarrow +\infty$

$\boxed{+\infty}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad (2)$$

D'après les résultats (1) et (2) on peut en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY) l'axe des ordonnées.

La Question : 3) a)

On a $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a aussi la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc la composition $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions dérivables. Finalement $x \mapsto x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \left(x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' ; \quad \forall x > 0$$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^3 \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right)$$

$$= 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x+1}$$

$$= 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right)$$

La Question : 3) b)

$$\text{On a : } \begin{cases} \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & ; \text{ selon (P)} \\ \frac{1}{3(x+1)} < \frac{1}{x+1} & \text{ car } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{3(x+1)} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 ; \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[}$$

La Question : 3) c)

x	$\boxed{0}$	$\boxed{+\infty}$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\boxed{0}$	$\boxed{+\infty}$

La Question : 4) a)

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x > 0 : g(x) &= \frac{f(x)}{x} \\
\Rightarrow g'(x) &= \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{x(f'(x) - f(x))}{x^2} \\
&= \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \\
&= 3x^2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{3(x+1)} \right) - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\
&= (3x - x) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x}{x+1} \\
&= 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x}{x+1} \\
&= \boxed{2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(x+1)} \right)}
\end{aligned}$$

De la même manière que dans la question 3)b) on montre facilement la chose suivante :

$$2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2(x+1)} \right) > 0$$

D'où g est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

La Question : 4) b)

La fonction $g :]0, +\infty[\mapsto g(]0, +\infty[)$ est une bijection car g est continue et étant strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
g(]0, +\infty[) &= \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[\\
&= \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right[\\
&=]0 ; +\infty[
\end{aligned}$$

comme $g :]0, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$ est bijective :

$$\forall y \in]0, +\infty[; \exists ! x \in]0, +\infty[: g(x) = y$$

$$\text{pour } 1 \in]0, +\infty[; \exists ! \alpha \in]0, +\infty[: g(\alpha) = 1$$

C-à-d l'équation $g(x) = 1$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$\text{Pourquoi } 1 < \alpha < 2 ?$$

$$\text{On a : } g(1) = f(1) = \ln 2 = 0,7$$

$$\text{On a : } g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{8 \ln \left(\frac{3}{2} \right)}{2} = 4 \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \boxed{1,6}$$

$$\text{On a : } 0,7 < 1 < 1,6 \Rightarrow g(1) < g(\alpha) < g(2)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(g(1)) < g^{-1}(g(\alpha)) < g^{-1}(g(2))$$

$$\Rightarrow \boxed{1 < \alpha < 2} \quad \text{CQFD}$$

La Question : 4) c)

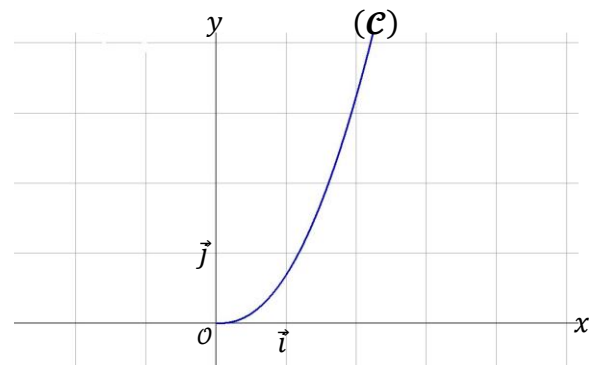
$$\text{Si } x = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ l'équation } f(x) = x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 1 \\
&\Leftrightarrow g(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \boxed{x = \alpha}
\end{aligned}$$

D'où l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions 0 et α .

La Question : 5) a)



La Question : 5) b)

$f : I \mapsto f(I)$ est une bijection car continue et étant strictement croissante :

$$f(I) = f([0, +\infty[) = [f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0, +\infty[= I$$

La partie deux :

La Question : 1)

Soit le prédicat $P(n) : 0 < u_n < \alpha$ à démontrer la véracité par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation : pour $n = 0$ on a : $0 < u_0 < \alpha$
Donc l'instance $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

$$P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow 0 < u_n < \alpha$$

$$\Rightarrow f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(\alpha) ; f \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \alpha$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où d'après le principe de récurrence on en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \alpha$.

La Question : 2) a)

La fonction g est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc l'image de n'importe quel intervalle inclus dans $]0, +\infty[$ est un intervalle.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } g(]0, \alpha[) &= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; g(\alpha) \right[\\ &= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) ; g(\alpha) \right[\\ &=]1, \alpha[\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

On a $g :]0, \alpha[\mapsto]0, 1[$ est une bijection car continue et étant strictement croissante. Donc :

$$(\forall y \in]0, 1[) (\exists ! x \in]0, \alpha[) : g(x) = y$$

$$\text{Autrement - dit } (\forall x \in]0, \alpha[) : g(x) \in]0, 1[$$

$$\text{Ou encore : } \boxed{(\forall x \in]0, \alpha[) : g(x) < 1} (*)$$

$$\text{Pour } x = u_n \in]0, \alpha[, \text{ on aurait } g(u_n) < 1$$

$$C - \text{à} - d \quad \forall n \in \mathbb{N} : \frac{f(u_n)}{u_n} < 1$$

$$C - \text{à} - d \quad \forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) < u_n$$

$$C - \text{à} - d \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_n < f^{-1}(u_n)$$

$$C - \text{à} - d \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_n < u_{n+1}$$

$$C - \text{à} - d \quad \text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement } \nearrow$$

La Question : 2) c)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente car croissante et étant majorée par α . (car $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < \alpha$)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.

On a aussi $u_0 \in [0, +\infty[$ et $f^{-1}([0, +\infty[) \subseteq [0, +\infty[$

Or la fonction f^{-1} est continue sur $[0, +\infty[$ et la suite $(u_n)_n$ est convergente vers un certain ℓ alors la limite ℓ vérifie l'équation $f^{-1}(\ell) = \ell$.

$$\Leftrightarrow f(\ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \ell \in \{0, \alpha\}$$

$$\Leftrightarrow \ell = \alpha \text{ car } (u_n)_n \nearrow \text{ et } \alpha > 0$$

La partie trois :

La Question : 1) a)

On a : $\forall x \geq 0 ; f(x) \geq 0$ déjà vu ☺

Et f est continue sur $[0, +\infty[$

$$\text{Si } x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_x^1 f(t) dt > 0$$

$$\text{Si } x > 1 \Rightarrow F(x) = \int_x^1 f(t) dt < 0$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$$

La Question : 1) b)

On a : $f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Donc f admet des primitives sur $[0, +\infty[$.

En particulier, f admet une primitive φ sur $[0, +\infty[$ définie ainsi :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \int_1^t f(t) dt & ; \quad 1 \in [0, +\infty[\\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(t) = f(t) & ; \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } F(x) = \int_x^1 f(t) dt = - \int_1^x f(t) dt = -\varphi(x)$$

Donc F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \geq 0 ; F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

La Question : 1) c)

$$\forall x \geq 0 ; F'(x) = -f(x) \leq 0$$

$$\text{Car : } \forall x \geq 0 ; f(x) \geq 0$$

Donc F est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

La Question : 2) a)

Soit $x \geq 1$ et $t \geq 1$.

$$\begin{aligned} t \geq 1 & \Rightarrow f(t) \geq f(1) & ; \text{ car } f \nearrow \\ & \Rightarrow \int_x^1 f(t) dt \geq \int_x^1 \ln 2 dt & ; \quad x \geq 1 \\ & \Rightarrow \boxed{F(x) \leq (1-x) \ln 2} & ; \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{array}{c} F(x) \leq \underbrace{(1-x) \ln 2} \\ \searrow x \rightarrow +\infty \\ \boxed{-\infty} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty}$$

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^1 \underbrace{t^3}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}_{v(t)} dt \\
&= \left[\frac{t^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4} \left(\frac{-1}{t^2} \right) dt \\
&= \frac{1}{4} \ln 2 - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \left(\frac{t^3}{1+t} \right) dt
\end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \left(\frac{t^3}{1+t} \right) dt &= \int_x^1 (t^2 - t + 1) dt - \int_x^1 \left(\frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_x^1 - [\ln|t+1|]_x^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) - (\ln 2 - \ln(x+1)) \\
&= \boxed{\frac{5}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \ln\left(\frac{2}{x+1}\right)}
\end{aligned}$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1} \right) dt \\
&= \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \ln 2 + \ln(x+1) \right) \\
&= -\frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{\ln(x+1)}{4}
\end{aligned}$$

La Question : 3) d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{5}{24} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\
&= \frac{5}{24} - \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\
&= \frac{5}{24} - \frac{1}{4} \times (0) = \boxed{\frac{5}{24}}
\end{aligned}$$

Mais pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$?

parce que c'est $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^4 + x^3) \right) \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = (1 + \frac{1}{x})}} \frac{\ln t}{t} \right) \\
&= 0 \times 0 = \boxed{0}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{5}{24}$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 f(t) dt = \frac{5}{24}$

C - à - d : $\boxed{\int_0^1 f(t) dt = \frac{5}{24}}$

La Question : 4) a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$

D'abord : $\left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{2k}{2n} \right) = \frac{1}{2n} > 0$

D'où : $\boxed{\frac{2k+1}{2n} > \frac{k}{n}}$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } t \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{2k+1}{2n} \right] &\Rightarrow \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{2k+1}{2n} \\
&\Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\
&\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) dt \\
&\Rightarrow \left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^1 f(t) dt + \int_1^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) dt \\
&\leq \left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^1 f(t) dt - \int_{\frac{2k+1}{2n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\
&\Rightarrow \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad & \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) < f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) < \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

Ou encore ,en remplaçant k par $k+1$ à gauche

$$\Rightarrow \left[\frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right]$$

La Question : 4) c)

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{\frac{-1}{2} \int_0^1 f(t) dt}_{\text{Somme de Riemann}} \leq v_n \leq \underbrace{\frac{-1}{2} \int_0^1 f(t) dt}_{\text{Somme de Riemann}} \\ & \quad \quad \quad \left[\left(\frac{-1}{2} \right) \left(\frac{5}{24} \right) \right] \quad \quad \quad \left[\left(\frac{-1}{2} \right) \left(\frac{5}{24} \right) \right] \\ \Rightarrow \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-5}{48} \end{aligned}$$

J'ai le droit d'utiliser les sommes de Riemann car f est continue sur $[0, +\infty[\supseteq [0,1]$.



**2^{ème} BAC - SM
MAROC**

**MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2020
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
OUARZAZATE, le Mercredi 09 Août 2020**

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} \text{Soit } d = p \wedge 9 &\Rightarrow d/p \text{ et } d/9 \\ &\Rightarrow d \in \{1, p\} \text{ et } d \in \{1, 3, 9\} \\ &\Rightarrow d \in \{1, p\} \cap \{1, 3, 9\} \\ &\Rightarrow d \in \{1\} ; p \neq 3 \\ &\Rightarrow d = 1 \\ &\Rightarrow p \wedge 9 = 1 \end{aligned}$$

La Question : 1) b)

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ p \wedge 9 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{9^{p-1} \equiv 1 [p]}$$

$$\begin{aligned} \text{On a aussi : } 9^{p+q-1} &\equiv 1 [pq] \\ &\Rightarrow pq / (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) \\ &\Rightarrow (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) = kpq \\ &\Rightarrow (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) = k'p \text{ avec } k' = kq \\ &\Rightarrow p / (9^q \cdot 9^{p-1} - 1) \\ &\Rightarrow \boxed{9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 1 [p]} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Or } 9^{p-1} \equiv 1 [p] \Rightarrow \boxed{9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 9^q [p]} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \boxed{9^q \equiv 1 [p]}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} \text{Soit } d = (p-1) \wedge q & \\ &\Rightarrow d/q \text{ et } q \text{ est un nbr premier} \\ &\Rightarrow d \in \{1, q\} \end{aligned}$$

On suppose que $d = q$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (p-1) \wedge q &= q \\ &\Rightarrow q / (p-1) \\ &\Rightarrow \boxed{q < (p-1)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Or on a } \boxed{p < q} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ et } (2) &\Rightarrow p < q < p-1 \\ &\Rightarrow p < p-1 \\ &\Rightarrow \boxed{0 < -1} \text{ contradiction} \\ &\Rightarrow \text{l'hypothèse } (d = q) \text{ à rejeter} \\ &\Rightarrow \text{l'hypothèse } (d = 1) \text{ est retenue} \\ &\Rightarrow \boxed{(p-1) \wedge q = 1} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\text{On a : } \boxed{(p-1) \wedge q = 1}$$

$$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : aq - b(p-1) = 1 ; \text{ Bezout}$$

Car q et $(p-1) \in \mathbb{N}$ tels que $q > (p-1)$

$$\blacksquare \begin{cases} 9^q \equiv 1 [p] \\ 9^{(p-1)} \equiv 1 [p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (9^q)^a \equiv 1^a [p] \\ (9^{(p-1)})^b \equiv 1^b [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 [p] \\ 9^{(p-1)b} \equiv 1 [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 [p] \\ 9^{(p-1)b+1} \equiv 9 [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9^{aq} \equiv 1 [p] \\ 9^{aq} \equiv 9 [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9 \equiv 1 [p]$$

$$\Rightarrow p \text{ divise } 8$$

$$\Rightarrow p \in \{1, 2, 4, 8\}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 2} \text{ car } p \in \mathbb{P}$$

La Question : 2) c)

Dans le raisonnement proposé dans la question 1)a) On peut faire pareil pour montrer l'identité $q \wedge 9 = 1$.

$$\text{Ainsi : } \left| \begin{array}{l} q \in \mathbb{P} \\ q \wedge 9 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{9^{q-1} \equiv 1 [q]}$$

La Question : 2) d)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9^{(q-1)} \equiv 1 [q] \\ 9^{p+q-1} \equiv 1 [q] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 9^{(q-1)} \equiv 1 [q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1 [q] \end{cases} ; p=2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 9^2 [q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1 [q] \end{cases} \\ &\Rightarrow 9^2 \equiv 1 [q] \\ &\Rightarrow q \text{ divise } 80 \\ &\Rightarrow q \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\} \\ &\Rightarrow q \in \{2; 5\} \text{ car } q \in \mathbb{P} \\ &\Rightarrow q \in \{5\} \text{ car } q > p = 2 \\ &\Rightarrow \boxed{q=5} \end{aligned}$$

Le Deuxième Exercice

La partie une :

La Question : 1) a)

Rappel : (Caractérisation des SEV sur $\mathbb{R}$)

$$\boxed{F \text{ est un sev de } (E, +, \cdot)} \Leftrightarrow \boxed{(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x, y \in F) (\alpha x + y) \in F}$$

Soient A et B deux éléments de E.

Soit α un scalaire de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha A + B &= \alpha \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -(\alpha y + y') & -(\alpha y + y') \\ 0 & (\alpha z + z') & 0 \\ (\alpha y + y') & (\alpha x + x') - (\alpha z + z') & (\alpha x + x') \end{pmatrix} \\ &= M((\alpha x + x') ; (\alpha y + y') ; (\alpha z + z')) \in E \\ \text{Car } ((\alpha x + x') ; (\alpha y + y') ; (\alpha z + z')) &\in \mathbb{R}^3 \\ D' \text{ où : } (\forall \alpha \in \mathbb{R}), (\forall A, B \in E) : (\alpha A + B) &\in E \\ C - \text{à} - d : E \text{ est un sev de l'espace } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot) \end{aligned}$$

Just think about it ☺

“ scientists investigate that which already is ; engineers create that which has never been “

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -z & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_u + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_v + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_w \\ &= xu + yv + zw \end{aligned}$$

Donc (u, v, w) est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$.

Soit $(\alpha u + \beta v + \gamma w = \theta)$ une combinaison linéaire nulle des éléments u, v et w .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

Donc la seule combinaison linéaire de (u, v, w) qui soit nulle est celle pour laquelle on ait $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C-à-d (u, v, w) est une famille libre.

Finalement on déduit que (u, v, w) est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$ comme étant génératrice de E et étant libre. Et on aurait ainsi : $(\dim E = 3)$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \times M(x', y', z') &= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -(xy' + x'y) & -(xy' + x'y) \\ 0 & zz' & 0 \\ (xy' + x'y) & (xx' - yy') - zz' & (xx' - yy') \end{pmatrix} \\ &= M(xx' - yy' ; xy' + yx' ; zz') \in E \\ \text{Car : } (xx' - yy' ; xy' + yx' ; zz') &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Just think about it ☺

“ Science can amuse and fascinate us all, but it is engineering that changes the world “

La Question : 2) b)

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Alors : $(E, +)$ est un groupe commutatif

On a aussi : $\times$ est associative sur $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Car $\times$ est associative sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Comme $\times$ est distributive par rapport à $+$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E . Car $E \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La conclusion finale est que $(E, +, \times)$ est un anneau. En plus cet anneau est commutatif car la loi $\times$ est commutative sur E .

$$\begin{aligned}
M(x, y, z) \times M(x', y', z') &= M(xx' - yy' ; xy' + yx' ; zz') \\
&= M(x'x - y'y ; y'x + x'y ; z'z) \\
&= M(x', y', z') \times M(x, y, z)
\end{aligned}$$

La partie deux :

La Question : 1) a)

D'abord On a : $F \subseteq E$

Car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x, y, 0) \in E$

Aussi : F est non vide car $\theta \in F$

Soient $A = M(x, y, 0)$ et $B = M(x', y', 0)$
deux matrices de F , On a :

$$\begin{aligned}
A - B &= M(x, y, 0) - M(x', y', 0) \\
&= M(x - x' ; y - y' ; 0) \in F \\
\text{Car } (x - x') \in \mathbb{R} \text{ et } (y - y') \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que F est un sous-groupe du groupe commutatif du groupe $(E, +)$

La Question : 1) b)

$$\begin{aligned}
\varphi((x + iy) \times (x' + iy')) &= \varphi((xx' - yy') + i(xy' + yx')) \\
&= M(xx' - yy' ; xy' + yx' ; 0) \\
&= M(x, y, 0) \times M(x', y', 0) \\
&= \varphi(x + iy) \times \varphi(x' + iy')
\end{aligned}$$

Just think about it ☺

**“ You never change things by fighting
the existing reality. To change
something, build a new model that
makes the existing model obsolete “**

La Question : 1) c)

On montre d'abord que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ vers F^* . Soit $M(a, b, 0)$ une matrice donnée de F^* . Et soit à résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a, b, 0)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = M(a, b, 0) &\Leftrightarrow \varphi(x + iy) = M(a, b, 0) \\
&\Leftrightarrow M(x, y, 0) = M(a, b, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y & -y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -b' \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & a' \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \boxed{x = a} \text{ et } \boxed{y = b}
\end{aligned}$$

D'où la chose suivante :

$(\forall M(a, b, 0) \in F^*), (\exists ! z = a + ib \in \mathbb{C}^*) : \varphi(z) = M(a, b, 0)$

C-à-d que φ est bijective.

D'où φ est un isomorphisme.

Alors $\varphi(\mathbb{C}^*, \times) = (F^*, \times)$ est un groupe commutatif car $(\mathbb{C}^*, \times)$ l'est à priori. Comme $(1 + 0i)$ est l'élément neutre pour le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ Alors $\varphi(1 + 0i) = M(1, 0, 0)$ est l'élément neutre pour le groupe $(F^*, \times)$.

$$\text{Comme : } \text{Sym}_{\mathbb{C}^*}(x + iy) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{Alors : } \text{Sym}_{F^*}(M(x, y, 0)) = \text{Sym}_{F^*}(\varphi(x + iy))$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(\text{Sym}_{\mathbb{C}^*}(x + iy)) \\
&= \varphi\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}\right) \\
&= M\left(\frac{x}{x^2 + y^2} ; \frac{-y}{x^2 + y^2} ; 0\right)
\end{aligned}$$

La Question : 1) d)

$(F, +, \times)$ est un corps commutatif car :

$$\begin{cases}
(F, +) \text{ est un groupe abélien} \\
(F^*, \times) \text{ est un groupe} \\
\times \text{ est distributive prp à } + \text{ dans } F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\
\times \text{ est commutative sur } F \subset E
\end{cases}$$

L'unité du corps $(F, +, \times)$ sera l'élément neutre de la loi $\times$ dans F à savoir $M(1, 0, 0)$.

La Question : 2) a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La Question : 2) b)

On suppose l'existence d'un élément de F inversible pour la multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C-à-d : $M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1=0} \text{ contradiction}$$

Donc ce qu'on a supposé est faux.

C-à-d qu'aucun élément de F n'est guerre inversible pour la multiplication matricielle dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Le Troisième Exercice

La Question : I) 1)

$$(E) : z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = (2im)^2 ; \quad z = -1 \pm im$$

La Question : I) 2) a)

Soit ai un nombre imaginaire pure avec $a \neq 0$.

$ai \in \text{solution}(F)$

$$\Rightarrow (ai)^3 + 2(1-i)(ai) + (1+m^2-4i)ai - 2i(1+m^2) = 0$$

$$\Rightarrow (4a - 2a^2) + i(-a^3 + 2a^2 + a + im^2 - 2 - 2m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2a^2 = 0 \\ -a^3 + 2a^2 + a + im^2 - 2 - 2m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{oubien } a = 0 \\ \text{oubien } a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2} \text{ car } a \neq 0$$

Pour l'implication réciproque si on remplace $z = 2i$ dans l'équation (F) on obtient zéro.

$$-8i - 8 + 8i + 2i + 2im^2 + 8 - 2i - 2im^2 = 0$$

D'où la conclusion : (F) admet une solution imaginaire pure et c'est le nombre $2i$.

La Question : I) 2) b)

En effectuant la division euclidienne du poly $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2)$ sur le polynôme $(z-2i)$ l'équation (F) devient ainsi :

$$(z-2i)(z^2 + 2z + 1 + m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } z = 2i \\ \text{oubien } z = -1 + im \\ \text{oubien } z = -1 - im \end{cases}$$

La Question : II) 1)

$$\Omega = \text{milieu}[AB] \Leftrightarrow z_{\Omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = -1$$

$$r_1(A) = P \Leftrightarrow (z_P - z_{\Omega}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_A - z_{\Omega})$$

$$\Leftrightarrow p + 1 = -i(-1 + im + 1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p = m - 1}$$

$$A' = \text{milieu}[OB] \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{-1 - im}{2}$$

$$r_2(B) = Q \Leftrightarrow (z_Q - z_{A'}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B - z_{A'})$$

$$\Leftrightarrow \left(q + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right) = i\left(-1 - im + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow q = i - m - \frac{i}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{2}(i - m - 1 - im)$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{2}(-i(-1 - im) - 1 - im)$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{2}(1 - i)(-1 - im)$$

$$B' = \text{milieu}[OA] \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{-1 + im}{2}$$

$$r_3(O) = R \Leftrightarrow (z_R - z_{B'}) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_O - z_{B'})$$

$$\Leftrightarrow r + \frac{1}{2} - \frac{im}{2} = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} + \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(-i - m - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(i(-1 + im) - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(i + 1)(-1 + im)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(\overline{1-i})(\overline{-1-im}) = \bar{q}$$

La Question : II) 2) a)

D'abord $\Im m(q) = \frac{1-m}{2}$; facile à prouver

$$D'où : \boxed{q-r} = q - \bar{q} = 2i \Im m(q) = 2i \left(\frac{1-m}{2} \right) \\ = i - im = -i(-1+m) = \boxed{-ip}$$

La Question : II) 2) b)

$$\text{On a } \left(\frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O} \right) = \frac{q-r}{p} = \frac{-ip}{p} = -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \left| \frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_Q - z_R}{z_P - z_O} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} |z_P - z_O| = |z_Q - z_R| \\ \left(\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OQ} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} QR = OP \\ (OP) \perp (QR) \end{cases}$$

Le Quatrième Exercice

La partie une :

La Question : 1) a)

La fonction $u : [0,1] \mapsto [1,2]$ est dérivable sur $[0,1]$
 $x \mapsto (2-x)$

Car c'est un polynôme.

La fonction $v :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
D'après le cours. $x \mapsto \ln x$

On remarque que $u([0,1]) = [1,2] \subset]0, +\infty[$.

Donc la composition $v \circ u(x) = \ln(2-x)$ est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$.

D'où $x \mapsto x \ln(2-x)$ est dérivable sur $[0,1]$
comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

La Question : 1) b)

$$f'(x) = (x \ln(2-x))' \\ = x(\ln(2-x))' + \ln(2-x) \\ = \frac{-x}{2-x} + \ln(2-x) ; \quad \forall x \in [0,1]$$

La Question : 1) c)

La fonction $f'(x)$ est dérivable sur $[0,1]$
comme étant somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

$$f''(x) = \frac{-1}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2} \right) = \frac{x-4}{(2-x)^2}$$

On remarque que $\forall x \in [0,1] : f''(x) < 0$

Donc f' est strictement décroissante sur I .

La Question : 1) d)

On a f' est continue et strictement monotone sur l'intervalle I (décroissante).

Alors $f' : [0,1] \mapsto [-1, \ln 2]$ est une bijection.

C-à-d : $(\forall y \in [-1; \ln 2]) (\exists! x \in [0,1]) : f'(x) = y$

C-à-d : (pour $0 \in [-1; \ln 2]$) $(\exists! \alpha \in [0,1]) : f'(\alpha) = 0$

Comme : $f'(0) = \ln 2$ et $f'(1) = -1$.

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \ln(2-\alpha) - \frac{\alpha}{2-\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2-\alpha) = \frac{\alpha}{2-\alpha} \\ &\Leftrightarrow \alpha \ln(2-\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha} \\ &\Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}} \end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soit $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \geq \alpha &\Rightarrow f'(x) \leq f'(\alpha) \text{ car } f' \text{ est } \searrow I \\ &\Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ car } f'(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ est } \searrow \text{ sur } [\alpha, 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x \leq \alpha &\Rightarrow f'(x) \geq f'(\alpha) \text{ car } f' \text{ est } \searrow I \\ &\Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ car } f'(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, \alpha]. \end{aligned}$$

Ainsi on déduit le tableau suivant :

x	0	α	1
$f'(x)$	$\ln 2$	0	-1
f	0	$\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$	0

La Question : 2) b)

We have just found that the second derivative $f''(x)$ is always negative :

$$\forall x \in I ; f''(x) < 0$$

So the curve (C) is concave. How about that ☺

La Question : 2) c)

Soient x et t deux éléments de I tels que $x < t$

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [x, t] \subset [0, 1] \\ f \text{ est dérivable sur }]x, t[\subset [0, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]x, t[; \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(c)$$

$$c \in]x, t[\Rightarrow c \leq t$$

$$\Rightarrow f'(c) \geq f'(t) ; \text{ car } f' \text{ est } \searrow \text{ sur } I$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right) \geq f'(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq (x - t)f'(t) + f(t)} (*)$$

La Question : 2) d)

Pour $t = 0$ l'inégalité (*) devient :

$$f(x) \leq x f'(0) + f(0)$$

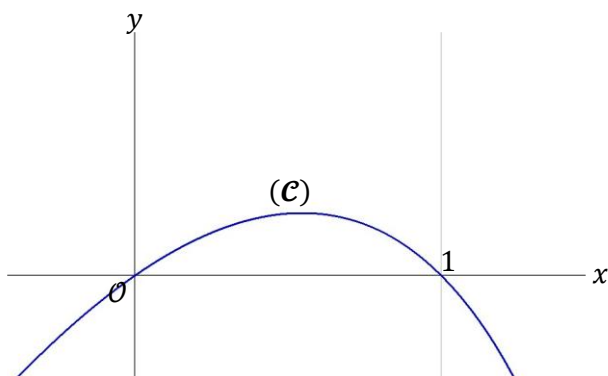
$$C - \text{à} - d : \boxed{f(x) \leq x \ln 2}$$

Pour $t = 1$ l'inégalité (*) devient :

$$f(x) \leq (x - 1) f'(1) + f(1)$$

$$C - \text{à} - d : \boxed{f(x) \leq 1 - x}$$

La Question : 3)



Just think about it ☺

**“ Science is about knowing ;
engineering is about doing “**

La Question : 4)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x)| dx \quad \| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \| \\ &= \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(2-x)}_v dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left(\frac{-1}{2-x} \right) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{-1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - [x]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(\frac{-1}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{-1}{4} - 1 - 2[\ln|2-x|]_0^1 \\ &= \frac{-1}{4} - 1 - 2(-\ln 2) \\ &= \left(\frac{8 \ln 2 - 5}{4} \right) \| \vec{i} \|^2 \\ &= \left(\frac{8 \ln 2 - 5}{4} \right) (4 \text{ cm}^2) \\ &= (8 \ln 2 - 5) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Remarque :

J'ai effectué dans mon brouillon, la division euclidienne de x^2 par $(2-x)$ pour justifier l'identité suivante :

$$\left(\frac{x^2}{2-x} \right) = \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x} \right)$$

La partie deux :

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 \leq x^n \leq 1 ; \forall n \geq 2 \\ \text{et bien } 1 \leq 2 - x \leq 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^n \leq 1 \\ 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(2-x) \leq \ln 2 \\ &\Rightarrow \boxed{f_n(x) \geq 0} \end{aligned}$$

$$\text{Et Encore : } \begin{cases} f_n(0) = 0^n \cdot \ln(2-0) = 0 \\ f_n(1) = 1^n \cdot \ln(2-1) = 0 \end{cases}$$

La Question : 1) b)

La fonction $f_n(x)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions continues et dérivables sur I .

Et on a $f_n(0) = f_n(1)$ donc d'après le théorème de Rolle : $\exists \alpha_n \in]0,1[: f'_n(\alpha_n) = 0$

La Question : 2) a)

La fonction f_n est dérivable sur l'intervalle I comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur I .

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (x^n \ln(2-x))' \\ &= n x^{n-1} \cdot \ln(2-x) - \frac{x^n}{2-x} \\ &= x^{n-1} \left(n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x} \right) \\ &= x^{n-1} \cdot g_n(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \frac{-n}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2} \right) \\ &= \frac{-n(2-x) - 2}{(2-x)^2} \\ &= nx - 2n - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in I &\Rightarrow x \leq 1 \\ &\Rightarrow nx \leq n \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq n - 2n - 2 \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq -(n+1) < 0 \\ &\Rightarrow nx - 2n - 2 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{nx - 2n - 2}{(2-x)^2} < 0 \\ &\Rightarrow g'_n(x) < 0 \\ &\Rightarrow g_n \text{ est } \searrow \text{ sur } I \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Comme g_n est continue et étant strictement décroissante alors $g_n : [0,1] \mapsto [-1; n \ln 2]$ est une bijection de $[0,1]$ vers son image $[-1; n \ln 2]$ avec $g_n([0,1]) = [-1; n \ln 2]$ d'où selon la définition de la bijection on écrit :

$$\begin{aligned} (\forall y \in [-1; n \ln 2]), \quad (\exists! x \in [0,1]) : g_n(x) &= y \\ (\text{pour } 0 \in [-1; n \ln 2]), (\exists! \alpha_n \in [0,1]) : g_n(\alpha_n) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha_n)^{n-1} \cdot g_n(\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'_n(\alpha_n) = 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned} f'_n(\alpha_n) = 0 &\Leftrightarrow g_n(\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(2 - \alpha_n) - \frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} = 0 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(2 - \alpha_n) = \frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} \\ &\Leftrightarrow \ln(2 - \alpha_n) = \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} \right) \\ &\Leftrightarrow (\alpha_n)^n \cdot \ln(2 - \alpha_n) = \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n} \right) \\ &\Leftrightarrow f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n} \right) \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$\alpha_n \in]0,1[; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 < \alpha_n < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha_{n+1} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < (2 - \alpha_n) < 2 \quad \text{et} \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - \alpha_n} < 1 \quad \text{et} \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{2 - \alpha_n} \right| < 1 \quad \text{et} \quad |\alpha_{n+1}| < 1 \\ &\Rightarrow \left| \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_n} \right| < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_n} \right| < \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow |f_n(\alpha_n)| < \left(\frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha_n) = 0} \end{aligned}$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 &\Leftrightarrow (n+1) \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{(n+1) \ln(2 - \alpha_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } g_n(\alpha_{n+1}) &= n \ln(2 - \alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2 - \alpha_{n+1}} \\ &= n \ln(2 - \alpha_{n+1}) - (n+1) \ln(2 - \alpha_{n+1}) \\ &= -\ln(2 - \alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

La Question : 3) d)

$$\begin{aligned} D'abord \quad g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) &= -\ln(2 - \alpha_{n+1}) - 0 \\ &= -\ln(2 - \alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1} \in]0,1[\Rightarrow \alpha_{n+1} < 1 \Rightarrow -\alpha_{n+1} > -1$$

$$\Rightarrow 2 - \alpha_{n+1} > 1$$

$$\Rightarrow \ln(2 - \alpha_{n+1}) > 0$$

$$\Rightarrow -\ln(2 - \alpha_{n+1}) < 0$$

$$\Rightarrow g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) < 0$$

$$\Rightarrow g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1})) < g_n^{-1}(g_n(\alpha_n))$$

Car g_n est une bijection décroissant sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow (\alpha_n)_{n \geq 2} \text{ est une suite croissante}$$

La Question : 3) e)

La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est une suite convergente car croissante et étant majorée par 1.

$$\text{car } 0 < \alpha_n < 1 \text{ soit ainsi } \lim(\alpha_n) = \ell$$

La Question : 3) f)

$$\text{On a : } 0 < \alpha_n < 1$$

$$\text{Alors par passage aux limites : } 0 < \ell < 1$$

Comme f_n est continue sur $[0,1]$.

$$\text{Alors : } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha_n) = f_n(\lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n)) = f_n(\ell) = 0$$

(c-à-d intervertir les signes $\lim$ et f_n)

$$\Leftrightarrow \ell^n \ln(2 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 - \ell) = 0 \quad \text{car } \ell \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = 1}$$

La partie trois :

La Question : 1)

$$x \in [0,1] \Rightarrow x \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 1 \leq (2-x) \leq 2 \\ \text{et bien } x \cdot x^n \leq x^n \text{ car } x^n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \\ \text{et bien } x^{n+1} \leq x^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \cdot \ln(2-x) \leq x^n \cdot \ln(2-x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} \cdot \ln(2-x) dx \leq \int_0^1 x^n \cdot \ln(2-x) dx$$

Car la continuité est vérifiée et $0 < 1$ garde le sens de l'inégalité inchangée.

$$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

La suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante en plus elle est minorée par 0 donc convergente.

La Question : 2)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{x^n}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(2-x)}_{u(x)} dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \left(\frac{-1}{2-x} \right) dx \\ &= 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 2-x > 1 \\ \text{et bien } x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 < \left(\frac{1}{2-x} \right) < 1 \\ \text{et bien } 0 < x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx \leq \int_0^1 1 dx$$

La continuité est vérifié et $0 < 1$.

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

La Question : 3) b)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \swarrow & 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{n+1} \right) \\ n_\infty & & \swarrow \\ 0 & & n_\infty \end{array} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) = 0}$$



التحضير الجيد للامتحان الوطني الموحد

Bac Publique
Bac Privé
Bac Libre

عرض خاص بشعبة العلوم الرياضية

الاعم عن بعد

تلاميذ جميع مدن المغرب من طنجة إلى الكويرة

- الاستفادة من خدمة تصحيح التمارين و الفروض و الامتحانات.
- الاستفادة من حصص مركزة مضمونها مراجعة شاملة للمقرر الدراسي.
- شهر أبريل خاص بمراجعة الدروس و التركيز على الخصائص المهمة فقط.
- شهر ماي خاص بإنجاز و تصحيح 12 امتحان تجريبي من هذا الكتاب.
- عدد الساعات المقررة لشهر أبريل هو 30 ساعة - فيديوهات للمراجعة.
- عدد الساعات المقررة لشهر ماي هو 36 ساعة - فيديوهات للتصحيح.
- سوف يتم التركيز على ما هو مهم للامتحان الوطني و المباريات فقط.



للتسجيل 06 - 60 - 34 - 41 - 36

أثمنة جد مناسبة للجميع

Professeur Badr Eddine EL FATIHI

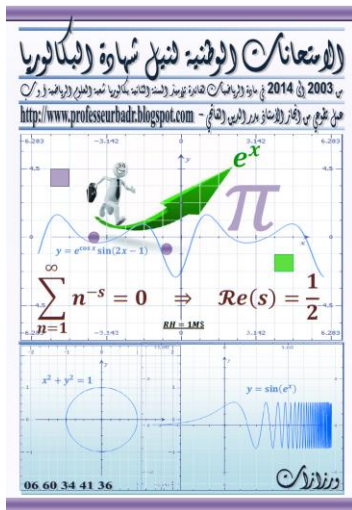
Ouarzazate 2020

Dimanche 20 Décembre 2020

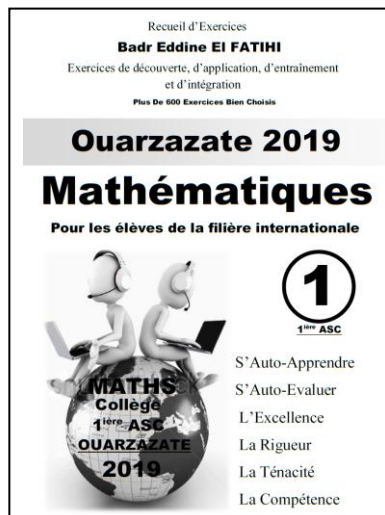


Mathématiques

Autres publications



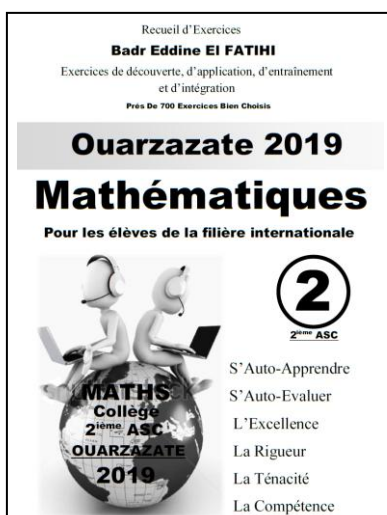
351 pages - été 2012



155 pages - été 2018



161 pages - été 2013



162 pages - été 2018



156 pages - été 2016



171 pages - été 2019